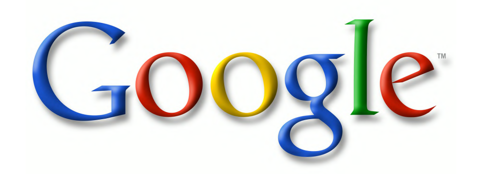






ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XXV.



ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XXV.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT EINUNDSECHZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST FÜNF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1885.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



Inhalt.

Neue Folge. Band XXV.

Fünftes Heft.

Geschlossen am 15. April 1885.

Sechstes Heft.

Geschlossen am 15. Mai 1885.

Siebentes Heft.

Geschlossen am 15. Juni 1885.

Achtes Heft.

Geschlossen am 15. Juli 1885.

Nachweis zu den Figurentafeln.

1885. ANNALEN № 5.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XXV.

I. *Bestimmung der electrischen Widerstände von Quecksilbersäulen in absolutem electromagnetischen Maasse; von L. Lorenz in Kopenhagen.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1 u. 2.)

Die folgenden experimentellen Untersuchungen sind mit Subvention der dänischen Regierung auf Veranlassung der internationalen Conferenz zur Feststellung der electrischen Maasseinheiten im chemischem Laboratorium der Kriegsschule auf dem Schlosse Friedrichsberg ausgeführt. Ein Theil der Messungen ist vom Vorsteher des Laboratoriums, Hrn. Dr. Topsöe, ausgeführt, welcher mir auch in vielfacher anderer Weise wesentliche Dienste bei dieser Arbeit geleistet hat.

Zur Bestimmung der absoluten Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse dienten:

1. ein Pendelchronometer, dessen Gang mittelst des täglichen öffentlichen Zeitsignales des astronomischen Observatoriums bestimmt wurde.

2. ein in Centimeter getheiltes Normalmeter nebst einem Kathetometer, beide von der Société Genevoise bezogen, das erstere mit angegebener, durch Vergleichung mit einem von dem internationalen Bureau in Paris verificirten Meter bestimmter Correction (0,0237 mm, richtig bei $-1,25^{0}$).

3. Normalgewichte von Westphal.

I. Methoden für die Widerstandsmessungen.

Absolute Messungen. Die angewandte Methode ist im Principe ganz dieselbe, wie in meinen früheren Untersuchungen.[1]) In der Ausführung der Versuche aber habe

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. **149.** p. 251. 1873.

ich mehrere Aenderungen gemacht, namentlich in Bezug auf den Rotationsapparat, den ich in Uebereinstimmung mit meinem der internationalen Conferenz gemachten Vorschlage[1]) eingerichtet habe, und über welchen später näher berichtet werden soll.

Relative Messungen. Die beiden zu vergleichenden Widerstände AB und CD, welche durch die Leitung BC verbunden sind, sowie zwei Drahtrollen, werden in einen Stromkreis eingeschaltet. Diese beiden Rollen sind in passender Entfernung vor und hinter einem Spiegelgalvanometer angebracht. Von zwei der vier Punkte A, B, C, D wird der Strom zum Galvanometer abgeleitet, in der Weise, dass der abgeleitete Strom entgegengesetzt dem durch die Drahtrollen gehenden Hauptstrome auf die Galvanometernadeln wirkt. In die zum Galvanometer führende Leitung ist ferner ein Rheostat eingeschaltet, mittelst welches der Widerstand so lange geändert wird, bis der Galvanometerspiegel auf den Nullpunkt der Scala zurückgeführt ist.

Es sei G der Widerstand des Galvanometers nebst dessen Zuleitungsdrähten, R, R_1 und R_2 die gemessenen Rheostatenwiderstände, jenachdem die Punktpaare AC, BD oder AD abgeleitet sind. Man hat alsdann:

$$k.AC = G + R, \quad k.BD = G + R_1, \quad k.AD = G + R_2,$$

wo $k + 1$ das constante Verhältniss zwischen den Intensitäten des Hauptstromes und des zum Galvanometer abgeleiteten Stromes bezeichnet. Hieraus ergibt sich:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{R_2 - R}{R_2 - R_1}.$$

Die Versuche können durch Ableitung anderer Punktpaare als AB und CD abgeändert werden, wodurch Controlen für die Richtigkeit des Resultates erhalten werden.

Um zugleich die Constante k in bestimmter Weise verkleinern oder vergrössern zu können, war der Draht der beiden Rollen aus einem Kabel von elf voneinander isolirten Drähten gebildet. Das Kabel war schwach gedreht,

1) L. Lorenz, Journ. de phys. (2) **1.** p. 477. 1882.

und die beiden 1 m langen Enden des Kabels waren zusammengewunden und seitwärts zu einem Commutator geführt, wo die 22 Drahtenden beliebig miteinander verbunden werden konnten. In dieser Weise konnte bei ungeänderter Stellung der beiden Drahtrollen die Wirkung derselben auf dem Galvanometer zwei-, drei- bis elfmal verstärkt werden. Selbstverständlich musste, wenn diese Combinationen benutzt wurden, darauf geachtet werden, dass die ganze ausserhalb der Drahtrollen vorhandene Leitung des Hauptstromes keine unmittelbare Wirkung auf das Galvanometer ausübte, was leicht durch Einstellung einer in der Nähe des Beobachters an der Leitung angebrachten Drahtschleife erreicht werden konnte.

Das Galvanometer war ein Thomson'sches mit Planspiegel und Fernrohrablesung. Es enthielt zwei Drahtrollen, eine untere mit dickem Drahte und eine obere mit zwei dünnen und langen Drähten, welche letztere Rolle bei diesen Versuchen angewandt wurde. Die Versuche wurden immer in einem nicht erwärmten Locale ausgeführt. Die während einer Versuchsreihe eintretenden Aenderungen des Nullpunktes des Galvanometers wurden mittelst eines in der Nähe des Beobachters angebrachten Magnets aufgehoben. Der Rheostat war ein neuer Siemens'scher mit 1 bis 10000 Einheiten; ausnahmsweise wurde noch dazu ein in Zehntel-Einheiten eingetheilter Rheostat eingeschaltet. Durch Calibrirung zeigte sich der erstere Rheostat so genau, dass eine Correctionstafel überflüssig wurde. Dagegen traten ein halbes Jahr später merkliche Aenderungen hervor, die nicht zu vernachlässigen gewesen wären.

II. Calibrirung der Glasröhre.

Alle Calibrirungen sind von Hrn. Dr. Topsöe ausgeführt. In kleiner Entfernung von dem auf einem Betonfundamente aufgestellten Kathetometer war auf einem ebenfalls auf Beton ruhenden Tische ein Mahagonibrett vertical aufgestellt. In dieses Brett war das Normalmeter und daneben die zu calibrirende Röhre eingelegt.

Das Calibriren der engeren Röhren wurde in der Weise ausgeführt, dass eine kleine Quecksilbersäule allmählich durch die Röhre verschoben wurde, indem jedesmal das untere Ende der kleinen Säule das obere Ende der Säule in ihrer früheren Lage gerade tangirte. Es liess sich dies sehr bequem und genau durch die folgende Einrichtung ausführen. Auf dem erwähnten Brette war in einer Vertiefung eine Glasröhre von der in der Fig. 1 angegebenen Form horizontal eingelegt. In das vertical aufsteigende Ende des Apparates wurde die zu calibrirende Röhre eingesetzt, während der andere verticale Zweig, nachdem derselbe zum Einfüllen des Quecksilbers gedient hatte, mit einem Glasstöpsel verschlossen wurde. Der Apparat war ferner mittelst eines eisernen, mit einer Stopfbüchse versehenen Pfropfens verschlossen, durch welche eine lange und feine Schraube hindurchging. Mittelst dieser Schraube konnte das Quecksilber in der zu calibrirenden Röhre bis zu einer beliebigen Höhe emporgetrieben werden. Diese letztere Röhre war oben doppelt umgebogen und in eine Spitze ausgezogen. Nachdem das Quecksilber bis zu letzterer emporgedrückt war, wurde die Säule wieder in der Weise zurückgezogen, dass eine 2 cm lange Säule von der unteren Säule durch ein Luftbläschen getrennt war. Mit dieser kleinen Säule wurde alsdann das Calibriren ausgeführt.

Nach beendeter Calibrirung wurde die kleine Säule aus der Röhre ausgetrieben, in einer Schale aufgefangen und gewogen. Nachher wurde eine ebenfalls durch eine Luftblase getrennte Quecksilbersäule von ungefähr derselben Länge wie das calibrirte Stück in die Röhre aufgesogen. Nach beendeter Messung der Länge und der Lage in Bezug auf einen markirten Punkt der Röhre wurde diese Säule ebenfalls aus der Röhre herausgetrieben und gewogen. Endlich wurde die Röhre abgenommen, in der Nähe der Grenzen des calibrirten Stückes abgebrochen, an beiden Enden conisch zugeschliffen, und ihre Länge gemessen.

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ die nacheinander gemessenen Längen der kleinen calibrirenden Quecksilbersäule und:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = L.$$

Ferner sei L' die Länge der nachher eingeführten grösseren Quecksilbersäule, während λ_1' und λ_n' die fehlenden Stücke der ganzen calibrirten Länge sind, sodass man hat:

$$L - \lambda_1' - \lambda_n' = L'.$$

In gleicher Weise sei L'' die Länge des abgeschnittenen Theiles der Röhre und λ_1'', λ_n'' die fehlenden Stücke der calibrirten Röhre, also:

$$L - \lambda_1'' - \lambda_n'' = L''.$$

Es wird alsdann der Widerstand R' dieser mit Quecksilber gefüllten Röhre durch:

$$R' = r\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_1''}{s_1} + \frac{\lambda_2}{s_2} + \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{s_{n-1}} + \frac{\lambda_n - \lambda_n''}{s_n}\right)$$

ausgedrückt werden können, indem durch r der specifische Widerstand des Quecksilbers und durch $s_1, s_2, \ldots s_n$ die der Mitte der Säulen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ entsprechenden Querschnitte bezeichnet werden.

Das auf den leeren Raum bezogene Gewicht der kleinen calibrirenden Säule sei w und dasjenige der Säule L' sei W. Die Volumina dieser beiden Säulen können durch $v - 2x$ und $V - 2x$ bezeichnet werden, indem x den Raum angibt, welcher von der convexen Endfläche der Quecksilbersäule, von einer die Mitte derselben tangirenden Ebene und von den cylindrischen inneren Wänden begrenzt wird. Wenn also das Gewicht der Raumeinheit des Quecksilbers, die Temperatur der Versuche vorläufig gleich 0° angenommen, durch ϱ bezeichnet wird, so hat man:

$$w = \varrho(v - 2x), \qquad W = \varrho(V - 2x),$$

woraus:

$$W - w = \varrho(V - v).$$

Da ferner:

$$V = \left(n - \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} - \frac{\lambda_n'}{\lambda_n}\right)v, \quad v = s_1\lambda_1 = s_2\lambda_2 \ldots$$

ist, so ergibt sich, wenn:

$$\lambda_1 - \frac{L}{n} = \delta_1, \quad \lambda_2 - \frac{L}{n} = \delta_2, \ldots \lambda_n - \frac{L}{n} = \delta_n,$$

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots \delta_n^2 = \Sigma\delta^2$$

gesetzt wird:

$$R'(W-w)=r\varrho\left(n-1-\frac{\lambda_1'}{\lambda_1}-\frac{\lambda_n'}{\lambda_n}\right)\left(\frac{LL'}{n}-\lambda_1''\delta_1-\lambda_n''\delta_n+\Sigma\delta^2\right).$$

Die Correction in Bezug auf die Temperatur wurde mittelst der Formel:

$$R=R'\frac{1+b(t'+t''-2t_0)+g(2t'-t'')}{1+\gamma t'}$$

ausgeführt, indem durch R der auf 0^0 bezogene Widerstand, durch t' und t'' die Temperaturen, bei welchen die Längen L' und L'' gemessen waren, durch t_0 die Temperatur, bei welcher die Normalmaassstabe richtig ist, durch b, g die linearen Ausdehnungscoëfficienten des Messings und des Glases, und durch γ der cubische Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers bezeichnet sind. Folgende sind die angenommenen numerischen Werthe dieser Constanten:

$$t_0=-1{,}25,\quad \varrho=13{,}5952,\quad \gamma=0{,}000\,179\,5,\quad b=0{,}000\,018,$$
$$g=0{,}000\,008\,4.$$

In Betreff des Werthes der Constante r mag bemerkt werden, dass, wenn die Längen in Millimetern, die Gewichte in Milligrammen angeben werden, $r = 1/_{1000}$ gesetzt werden muss, wenn R in gewöhnlichen Quecksilbereinheiten ausgedrückt werden soll.

Als Resultate der Messungen ergaben sich:

Röhre Nr. 1.

$L = 368{,}119$, $\lambda_1 = 19{,}406$, $\lambda_n = 19{,}315$ mm,
$L' = 357{,}042$, $\lambda_1' = 4{,}685$, $\lambda_n' = 6{,}392$ „
$L'' = 364{,}61$, $\lambda_1'' = -0{,}87$, $\lambda_n'' = 4{,}38$ „
$n = 19$, $t' = 10{,}0^0$, $t'' = 11{,}0^0$.
$W = 1395{,}75$ mg, $w = 75{,}40$ mg, $\Sigma\delta^2 = 0{,}4714$.
$R = 1{,}26612$ Quecksilbereinheiten.

Röhre Nr. 2.

$L = 445{,}36$, $\lambda_1 = 19{,}965$, $\lambda_n = 20{,}434$ mm,
$L' = 442{,}32$, $\lambda_1' = 3{,}06$, $\lambda_n' = -0{,}01$ „
$L'' = 435{,}30$, $\lambda_1'' = -1{,}58$, $\lambda_n'' = 11{,}66$ „
$n = 22$, $t' = 9{,}6^0$, $t'' = 9{,}0^0$.
$W = 351{,}72$ mg, $w = 16{,}05$ mg, $\Sigma\delta^2 = 1{,}1714$.
$R = 7{,}42980$ Quecksilbereinheiten.

Die Calibrirung der weiten Röhren, nämlich dreier je 1 m langer, 1, 2 und 3 cm weiter Glasröhren, die für die absoluten Widerstandsmessungen gebraucht werden sollten, wurde in folgender Weise ausgeführt. Die Röhren waren unten durch einen mit einem Hahn versehenen eisernen Deckel verschlossen und oben in eine eiserne Büchse eingefügt. Wenn eine der Röhren mit Quecksilber gefüllt werden sollte, wurde sie zunächst in horizontaler Lage mittelst einer mit Glashahn versehenen Glasröhre mit der Luftpumpe in Verbindung gesetzt und so weit wie möglich luftleer gepumpt, wonach das Quecksilber durch den eisernen Hahn eingesogen wurde. Nach der Füllung der Röhre wurde dieselbe an dem Mahagonistatif vertical aufgestellt, und an der oberen Büchse der in Figur 2 dargestellte Apparat befestigt. Derselbe bestand aus einer durchlöcherten Schraube, durch welche eine oben und unten in eine Spitze verlaufende Stahlstange geschoben und in einer beliebigen Stellung festgehalten werden konnte. Die Stahlstange wurde bis zur Berührung der unteren Spitze mit der Oberfläche des Quecksilbers hinuntergeführt, was mit einem Fernrohre beobachtet wurde, und nach der Einstellung die Höhe der oberen Spitze mittelst des Kathetometers und des Normalmaassstabes gemessen. Das Quecksilber wurde nach und nach in passenden, ungefähr gleichen Mengen ausgelassen, und die Messungen wurden durch die ganze zu calibrirende Länge fortgesetzt.

Die weiteste der drei Röhren war mit vier, die beiden anderen mit zwei conisch gegen die innere Wand zulaufenden feinen Löchern versehen. Jedes Loch war mit einer kleinen Platinplatte luftdicht verschlossen, welche durch eine die Röhre theilweise umfassende Uhrfeder festgehalten wurde, indem die umgebogenen Enden der Feder mittelst eines Kupferdrahtes festgespannt wurden. Wenn das Quecksilber eben unterhalb eines dieser Löcher gesunken war, so wurde der Verband verschoben, die untere Stahlspitze in die Mitte des Loches eingestellt und die Höhe der oberen Spitze gemessen. Ausserdem wurden noch die Entfernungen der Löcher, welche in derselben Verticale lagen, für sich gemessen.

Da kleine Temperaturschwankungen während der Versuche nicht zu vermeiden waren, so wurden die Messungen mittelst kleiner Correctionen auf eine gemeinsame mittlere Temperatur zurückgeführt.

Wenn durch L die bei der mittleren Temperatur t calibrirte Länge, durch W das entsprechende Gewicht des Quecksilbers, durch L' die Entfernung zweier Löcher bezeichnet wird, so ergibt sich der in Bezug auf Temperatur nicht corrigirte Widerstand R' der zwischen den beiden Löchern befindlichen Quecksilbersäule aus:

$$WR' = r\varrho LL'\mu,$$

wo μ eine von 1 sehr wenig verschiedene Zahl ist, durch welche die aus den einzelnen Messungen berechnete sehr kleine Correction wegen der Conicität der Röhre angegeben ist. Daraus berechnet sich der auf 0° reducirte Widerstand R in derselben Weise, wie oben angegeben ist, indem in der Formel t' und t'' in t und t' abgeändert wird.

Die Resultate der Messungen waren:

Röhre Nr. I.

$L = 525{,}93$ mm, $t = 12{,}49°$, $W = 2\,312\,197$ mg,
$L' = 499{,}35$ „ , $t' = 10{,}6°$, $\mu = 1{,}000\,071$,

woraus: $R = 0{,}001\,541\,80$ Quecksilbereinheiten.

Röhre Nr. II.

Diese Röhre enthielt 4 Löcher A, B, C, D. Die Widerstände bei 0° der zwischen diesen Löchern befindlichen Quecksilbersäulen seien durch AB, BC und CD bezeichnet:

AB. $L = 200{,}45$ mm, $t = 11{,}70°$, $W = 2\,103\,229$ mg,
$L' = 199{,}79$ „ , $t' = 9{,}0°$, $\mu = 1{,}000\,006$.
BC. $L = 203{,}19$ „ , $t = 10{,}79°$, $W = 1\,124\,558$ mg,
$L' = 199{,}97$ „ , $t' = 9{,}0°$, $\mu = 1{,}000\,021$.
CD. $L = 201{,}09$ „ , $t = 11{,}22°$, $W = 2\,082\,375$ mg,
$L' = 200{,}45$ „ , $t' = 9{,}0°$, $\mu = 1{,}000\,010$,

woraus $AB = 0{,}000\,258\,36$ Quecksilbereinheiten,
$BC = 0{,}000\,259\,64$ „
$CD = 0{,}000\,262\,79$ „

Da es sich bei den späteren absoluten Widerstandsmessungen zeigte, dass die genauesten Resultate mit den kleinsten Widerständen erhalten wurden, so kam die dritte calibrirte Röhre, deren Widerstand 0,006 221 5 Quecksilbereinheiten betrug, nicht zur Anwendung.

III. Thermischer Coëfficient des Widerstandes des Quecksilbers.

Das bei allen Versuchen angewandte Quecksilber war von Dr. Topsöe auf zwei verschiedene Weisen dargestellt. Der eine Theil war in gewöhnlicher Weise sorgfältig, jedoch ohne Destillation, gereinigt, der andere Theil war in grösserer Menge (16 kg) durch Destillation des aus gereinigtem Quecksilber dargestellten Quecksilberoxyds gewonnen. Beide Präparate zeigten sich jedoch bei wiederholten Versuchen als vollkommen identisch in Bezug auf ihre electrische Leitungsfähigkeit.

Für die gegenwärtigen Versuche wurden zwei nicht calibrirte Röhren mit angeblasenen cylindrischen Behältern angewendet. Die eine, 1 m lange und 1 mm weite Röhre war zu einer Spirale gewunden, die andere, 260 mm lange und 0,1 mm weite Röhre war U-förmig umgebogen.

Nachdem die Röhren mit Quecksilber gefüllt waren, wurden sie zunächst unter die Glocke einer Luftpumpe gebracht und die Aenderungen des Widerstandes während des Evacuirens beobachtet. Wenn nämlich kleine Luftblasen vorhanden waren, so mussten sie sich bei der Luftverdünnung erweitern und dabei den Widerstand der Quecksilbersäule vergrössern. Eine kleine Vergrösserung des Widerstandes hätte auch schon durch die Verminderung des Druckes an dem Quecksilber entstehen sollen, ich fand aber im Gegentheil eine constante kleine Abnahme des Widerstandes, welche bei der U-förmigen Röhre nur 0,076 Proc. betrug. Bei anderen, später zu erwähnenden Versuchen mit geraden und horizontalen, von Quecksilber überdeckten Röhren zeigte sich diese Anomalie nicht, weshalb ich die Vermuthung hege, dass dieselbe von dem Aussaugen der zwischen dem Quecksilber und dem Glase in dem oberen Theile der Röhren befindli-

chen Luftschicht herstamme. Jedenfalls wurde durch die Versuche constatirt, dass keine merkbaren Luftblasen in den Röhren vorhanden sein konnten.

Nachher wurde eine der Röhren, nebst einem in Zehntelgrade eingetheilten Normalthermometer und einem Rührer in einen mit Alkohol gefüllten Behälter eingesetzt. Derselbe war von einem anderen mit Wasser gefüllten Behälter umgeben.

Die Widerstandsmessungen wurden nach der oben beschriebenen Methode ausgeführt. Es sei AB der Widerstand der Quecksilbersäule bei t^0, BC der Widerstand eines Platindrahtes, welcher die Röhre mit einem Rheostaten verbindet. In der ersteren Versuchsreihe betrug der Rheostatenwiderstand CD 1 S.-E., in der zweiten 30 S.-E.

Spiralröhre.

$t = 13{,}28^0$. $k.AB = G + 2464{,}2$, $k.AD = G + 6671{,}5$, $k.BD = G + 743{,}1$,
woraus $G = 3464{,}2$, $k.BD = 4207{,}3$, $k.AB = 5928{,}4$ (ber. 5928,3).

$t = 10{,}00^0$. $k.AB = G + 2445{,}9$, $k.AD = G + 6654{,}0$, $k.BD = G + 743{,}0$,
woraus $G = 3465{,}1$, $k.BD = 4208{,}1$, $k.AB = 5911{,}0$ (ber. 5911,0).

$t = 0^0$. $k.AB = G + 2392{,}6$, $k.AD = G + 6600{,}0$, $k.BD = G + 741{,}8$,
woraus $G = 3465{,}6$, $k.BD = 4207{,}4$, $k.AB = 5858{,}2$ (ber. 5858,2).

$t = 27{,}32^0$. $k.AB = G + 2537{,}8$, $k.AD = G + 6746{,}0$, $k.BD = G + 743{,}5$,
woraus $G = 3464{,}7$, $k.BD = 4208{,}2$, $k.AB = 6002{,}5$ (ber. 6002,5).

Die berechneten Werthe sind mittelst der Formel:

$$k.AB = 5858{,}2\,(1 + 0{,}000\,901\,3\,t)$$

hergeleitet und stimmen, wie man sieht, fast vollkommen mit den beobachteten Werthen überein.

U-förmige Röhre. Der doppelte Draht des Galvanometers war hier in einen vereinigt.

$t = 8{,}32^0$. $k.AD = G + 8773{,}1$, $k.BD = G + 3961{,}2$,
woraus $k.AB = 4811{,}9$ (ber. 4811,9).

$t = 33{,}43^0$. $k.AD = G + 8882{,}8$, $k.BD = G + 3961{,}2$,
woraus $k.AB = 4921{,}6$ (ber. 4921,8).

$t = 35{,}31^0$. $k.AD = G + 8891{,}3$, $k.BD = G + 3961{,}0$,
woraus $k.AB = 4930{,}3$ (ber. 4930,1).

Die Berechnung ist nach der Formel:

$$k.AB = 4775{,}6\,(1 + 0{,}000\,916\,t)$$

ausgeführt.

Die so gefundenen Coëfficienten der scheinbaren Widerstandszunahme des Quecksilbers in Glasröhren bei der Temperaturerhöhung um einen Grad sind also:

0,000 901 3 zwischen 0^0 und $27{,}32^0$,
0,000 916 zwischen $8{,}32^0$ und $35{,}31^0$,

welche Coëfficienten um ein wenig grösser sind als die von Lenz gefundenen und ziemlich nahe mit den von Siemens und neuerdings von Mascart gefundenen Werthen übereinstimmen.

IV. Einfluss der Capillarität auf die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers.

In einer der Sitzungen der internationalen electrischen Conferenz des Jahres 1882 hat Becquerel die Aufmerksamkeit auf obige Fehlerquelle hingeleitet, bei welcher Gelegenheit v. Helmholtz erläuterte, dass Siemens immer die grösste Uebereinstimmung zwischen den mit Quecksilbersäulen, deren Durchmesser von 1 bis 2 mm variirten, ausgeführten Messungen gefunden hatte, während Bosscha mittheilte, dass Rink in Delft vergleichende Messungen mit verschiedenen Röhren angestellt und eine bis auf $^1/_{7000}$ gehende Uebereinstimmung gefunden hatte. Da meine absoluten Widerstandsmessungen mit 2 und 3 cm dicken Säulen ausgeführt werden sollten, während das Normalmaass auf eine Säule von 1 qmm Querschnitt bezogen werden sollte, so schien es mir unerlässlich, durch eigene Versuche diese Frage aufs neue aufzunehmen.

Die ersten Versuche wurden mit einem von dicken Spiegelglasplatten gebildeten Troge ausgeführt. Zwei 1 cm hohe Glasstreifen waren auf einer Unterlage von Spiegelglas, 2 cm voneinander entfernt, mit Fischleim festgekittet, und 2 Stahlplatten bildeten die Enden des Troges. Derselbe wurde mit Quecksilber gefüllt, und dicht über der Oberfläche des Quecksilbers war eine Spiegelglasplatte horizontal an-

gebracht. In dieser Platte befanden sich zwei grössere und zwei kleinere Löcher, durch welche letztere 2 Nähnadeln senkrecht hindurchgingen. Dieselben waren mit dem Galvanometer verbunden, während ein starker Strom durch die Endflächen des Troges und die beiden in der Nähe des Galvanometers angebrachten Drahtrollen hindurchgeleitet wurde. Der Widerstand des zwischen den beiden Nadeln befindlichen Theiles der Quecksilbersäule wurde in derselben Weise wie in den früheren Versuchen bestimmt, und die Untersuchung ging darauf hinaus, die Aenderung des Widerstandes, wenn die Deckplatte bis zur Berührung mit der Oberfläche des Quecksilbers gesenkt wurde, zu beobachten.

Es zeigte sich auch hierbei immer eine kleine Aenderung des Widerstandes, allein es ergab sich bald, dass dieselbe von dem auf dem Quecksilber und dadurch auf den Wänden des Troges ausgeübten Drucke herstammte. Je nachdem nämlich das Quecksilber in den beiden grösseren Löchern der Deckplatte eine convexe oder eine concave Oberfläche zeigte, war der Widerstand vergrössert oder verkleinert. Es erklärt sich dies ganz einfach aus den Biegungen der Wände des Troges. Aus meinen Messungen folgte, dass, wenn überhaupt eine unmittelbare Wirkung der Capillarität auf den Widerstand stattfände, dieselbe nicht $^1/_{10000}$ des ganzen Widerstandes betragen konnte.

Da diese Wirkung besonders stark bei engen Röhren hervortreten musste, so habe ich auch Messungen mit solchen angestellt und dabei die oben erwähnten calibrirten Röhren Nr. 1 und 2, deren Durchmesser 0,606 und 0,273 mm betrugen, angewendet.

Die Röhre war in einem Loch in der Mitte einer quadratischen hölzernen Platte (2 cm breit, 1 cm dick) angebracht, welche in einen 2 cm hohen und breiten Trog von Spiegelglasplatten eingesetzt wurde. Der Trog und die Röhre wurden mit Quecksilber gefüllt. Die Versuche begannen damit, den Trog mittelst der Deckplatte luftdicht zu verschliessen und die dabei eintretende Aenderung des Widerstandes der Röhre zu beobachten, um gegen etwa vorhandene Luftblasen in der Röhre sicher gestellt zu sein. Nachher

wurde die Deckplatte entfernt und die Messungen in der Weise ausgeführt, dass der Hauptstrom durch die erwähnten Drahtrollen, ferner durch eine Siemens'sche Normaleinheit und durch den Trog, und somit auch durch die Röhre geleitet wurde, während zwei Punkte dieser Leitung mit dem Galvanometer in Verbindung gebracht wurden.

Es zeigte sich bei diesen Messungen, dass, wenn die beiden Enden der zum Galvanometer führenden Leitung von der hölzernen Platte ab längs der Wände der Röhren bis zu den Endflächen derselben geführt wurden, der gemessene Potentialunterschied unverändert derselbe blieb, wogegen eine merkbare Aenderung sogleich eintrat, wenn die Drahtenden der Nebenschliessung ausserhalb der Endflächen der Röhren angebracht wurden. Wenn also diese Drahtenden sich in der Nähe der hölzernen Platte befanden, so entsprach der gemessene Potentialunterschied genau demjenigen zweier Punkte in den Endflächen der Röhren und in deren äusserem Umfange.

Wenn die Dicke der Glaswand als unendlich gross gegen den inneren Durchmesser der Röhre betrachtet werden kann, so ist der dem so gemessenen Potentialunterschiede entsprechende Widerstand gleich dem Widerstande der Quecksilbersäule der Röhre verlängert um 0,82 des inneren Durchmessers. Diese von Lord Rayleigh berechnete Zahl bedarf bei endlicher Dicke der Röhrenwand eine Correction, welche ich sowohl durch Berechnung als durch Versuche zu bestimmen versucht habe. Ich werde mich hier auf die letzteren beschränken. Für dieselben wurde eine 300 mm lange, 2,724 mm inwendig und 4,2 mm auswendig weite Röhre angewendet. Nachdem der Widerstand dieser mit Quecksilber gefüllten Röhre in der oben angegebenen Weise bestimmt war, wurde die Röhre in 2 Stücke von 200 und 100 mm Länge zerbrochen und der Widerstand dieser beiden Röhren bestimmt, wonach noch das grössere Stück in zwei gleiche Theile zerbrochen und der Widerstand beider gemessen wurde. Als Resultat dieser Messungen ergab sich, dass an der Stelle der Rayleigh'schen Zahl 0,82 die empirische Formel:

$$0{,}82 - 0{,}35\,\frac{d_i}{d_e}$$

angewendet werden muss, indem durch d_i und d_e der innere und der äussere Durchmesser bezeichnet werden.

Es war meine Absicht, in derselben Weise die Correction für die Röhre Nr. 1 direct zu bestimmen, allein schon bevor die ersten Messungen ausgeführt waren, wurde durch einen Unfall die Röhre in 2 Theile zerbrochen. Die beiden Stücke der Röhre wurden, jedes in seiner quadratischen hölzernen Platte angebracht, in den Trog eingesetzt, welcher demnach in 3 Abtheilungen getheilt wurde. Die Entfernung der beiden gegen einander gewendeten Röhrenenden betrug ungefähr 3 cm.

Es sei R der Widerstand des in den beiden Röhren und dem dazwischen liegenden Raume enthaltenen Quecksilbers, S der Widerstand meiner Siemens'schen Normaleinheit, und x derjenige der zwischenliegenden Leitung. Alsdann ergaben die Messungen, wobei die beiden Galvanometerdrähte in einem vereinigt waren:

$$t = 10{,}10^0. \quad k(R + S + x) = 9063{,}3 + G,$$
$$k(R + x) = 4766{,}8 + G,$$
$$k(S + x) = 3551{,}0 + G,$$

woraus: $R = 1{,}28297\, S$.

Der durch directe Messungen gefundene Widerstand der zwischen den beiden Röhren befindlichen Quecksilbersäule betrug 0,00009 S. Mittelst des Temperaturcoëfficienten 0,00090, auf 0° zurückgeführt, ergibt sich demnach der Widerstand der beiden Röhren:

bei 0° gleich 1,27132 S.

Meine Siemens'sche Normaleinheit war gezeichnet: Dec. 82, Nr. 2713, $\alpha = 0{,}000\,340$, richtig bei 15,5°. Durch die sich daraus ergebende Reduction geht der obige Werth in

1,26899 S.-E.

über. Durch Vergleichung meiner Normaleinheit mit einer B.-A.-Normaleinheit (verificirt von Lord Rayleigh, Juni 82, Nr. 54, $\alpha = 0{,}00025$, richtig bei 11,5°) ergab sich:

1 S.-E. = 0,95411 B.-A.,

während Lord Rayleigh und Mrs. Sidgwick[1]) durch

1) Mrs. Sidgwick, Phil. Trans. of the Roy. Soc. 1. p. 173. 1883.

Vergleichungen mit Quecksilbersäulen von 1 bis 2 mm Durchmesser:

1 Quecksilbereinheit = 0,95418 B.-A.

gefunden haben.

Der durch Calibrirung gefundene Widerstand der Röhre (p. 6) war 1,26612 Quecksilbereinheiten, und die nach der obigen Formel berechnete Correction in Bezug auf die 4 Röhrenenden, indem $d_i = 0{,}6056$ mm und $d_e = 3{,}2$ mm waren, betrug 0,00315 Quecksilbereinheiten. Der aus der Calibrirung berechnete Widerstand der beiden Röhrenstücke beträgt also: 1,26927 Quecksilbereinheiten.
Der beobachtete Widerstand ist demnach um 0,022 oder 0,029 Proc. kleiner als der letztere, je nachdem die Quecksilbereinheit aus meiner Siemens'schen oder aus meiner B.-A.-Normaleinheit abgeleitet wird.

Bei den mit der calibrirten Röhre Nr. 2 angestellten Messungen wurde wegen des grösseren Widerstandes der Röhre die Methode in der Weise abgeändert, dass verschiedene Combinationen der in dem Kabel der äusseren Drahtrollen enthaltenen Drähte angewendet wurden. Wenn die Widerstände der Siemens'schen Normaleinheit und der Röhre durch S und R bezeichnet werden, und ferner das Verhältniss der Intensität des Hauptstromes zu derjenigen des abgeleiteten Stromes gleich k'/n gesetzt wird, wo n die Anzahl von Drähten, welche nach einander in den Drahtrollen verbunden waren (hier der Reihe nach 9, 5, 2 und 10), angibt, so können die Resultate der Messungen durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt werden:

$$t = 9{,}32^0. \quad k'S = 9\,(526{,}50 + G + S),$$
$$k'S = 5\,(1635{,}60 + G + S),$$
$$k'S = 2\,(5378{,}7 + G + S),$$
$$k'S = 10\,(8504{,}7 + G + R).$$

Es kann hier innerhalb der Klammern annäherungsweise $S = 1$ und $R = 7{,}51$ gesetzt werden, wonach:

$$R = 7{,}51057\,S$$

gefunden wird.

Der auf 0° reducirte Widerstand der Röhre ist demnach:

7,43243 S.-E.

Der durch die Calibrirung gefundene Widerstand der Röhre betrug 7,42980 Quecksilbereinheiten, während die Correction wegen der beiden Röhrenenden (wobei $d_i = 0{,}273$ mm, $d_e = 3{,}3$ mm) gleich 0,00369 Quecksilbereinheiten gefunden wird. Der corrigirte Werth beträgt also:

7,43349 Quecksilbereinheiten,

woraus hervorgeht, dass auch für diese Röhre der durch die directen Messungen sich ergebene Widerstand um ein wenig kleiner (0,014 und 0,021 Proc.) ist, als der durch die Calibrirung gefundene Werth desselben. Da die Abweichungen sehr klein sind und in demselben Sinne gehen, so geht als Resultat dieser Untersuchung hervor, dass die Capillarität kaum messbare Einwirkungen auf die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers ausübt.

V. Leitungswiderstand des Quecksilbers in absolutem Maasse.

Der Rotationsapparat bestand aus einem auf einem Fussgestelle befestigten hohlen messingenen Cylinder, dessen Länge 1,068 m, äusserer Durchmesser 0,333 m, innerer Durchmesser 0,322 m betrug. In die äussere Fläche des Cylinders war ein Schraubengang eingeschnitten, in welchem ein aus 7, $^1/_2$ mm dicken, Kupferdrähten bestehendes Kabel eingelegt war; jeder Draht sowohl, wie das ganze Kabel war mit Seide doppelt übersponnen. Dieses Kabel war in 472 Windungen um den Cylinder gewickelt, und die Enden desselben waren wieder zur Mitte des Cylinders zurückgeführt, wo vierzehn auf dem Fussgestell angebrachte Klemmschrauben die Drahtenden aufnahmen. Durch Messungen von je 50 Schraubenwindungen zeigte sich die Schraube vollkommen genau, und 472 Windungen entsprachen einer Höhe von 998,70 mm.

Im Inneren des Cylinders befand sich eine auf einer conisch gegen die Enden verlaufenden Axe befestigte Scheibe von Messing oder Kupfer. Die Axe bewegt sich in zwei in den Endflächen des Cylinders angebrachten isolirten Lagern und konnte mittelst einer Dynamomaschine in schnelle Rotation versetzt werden. Die beiden Axen lagen in derselben Geraden und waren mittelst zwei isolirender Universalglieder

und einer 4,3 m langen, 26 mm dicken Messingröhre, welche von vier festen Lagern gestützt war, miteinander in Verbindung gebracht. Die Dynamomaschine wurde anfangs durch den Strom einer anderen mittelst Dampfkraft getriebenen Dynamomaschine in Bewegung gesetzt, wobei eine Geschwindigkeit von bis 30 Umgängen in der Secunde erreicht werden konnte; da sich aber späterhin die kleinen Rotationsgeschwindigkeiten als zweckmässiger zeigten, so wurde bei den endlichen Versuchen allein eine Batterie von Bunsen'schen Elementen als Stromerzeuger für die Dynamomaschine angewendet. 10 bis 20 Elemente genügten, um eine Rotationsgeschwindigkeit von 6 bis 12 Umgängen in der Secunde zu erzeugen. Ein Theil des zur Dynamomaschine führenden Stromes war durch eine Zweigleitung, in welcher ein Rheostat eingeschaltet war, abgeleitet. Durch die Aenderung des Widerstandes dieses letzteren konnte die Umdrehungsgeschwindigkeit der Maschine leicht regulirt werden.

Die in der rotirenden Scheibe inducirte electromotorische Kraft wurde mittelst zweier Contacte zu einer Leitung übergeführt. Der eine Contact war an dem Ende der Axe des Rotationsapparates angebracht und bestand aus einer conischen Messingspitze, welche mittelst einer Feder gegen die Mitte der Axe drückte, wo die umschriebene Fläche kaum einen Quadratmillimeter betrug. Der andere Contact bestand aus einem dünnen, 1 cm breiten Streifen von demselben Metalle wie die Scheibe (Kupfer oder Messing). Dieser an das Ende einer von demselben Metalle gemachten Stange angelöthete Streifen war quer über die 11,8 mm dicke Scheibe geführt und drückte sehr leicht gegen den Rand derselben, indem die Hinterseite des Streifens mit fingerdicken, den Zwischenraum zwischen dem Streifen und dem Cylinder ausfüllenden Filze belegt war. Die Stange war ausserhalb des Cylinders befestigt. Durch passenden Schmieren mit Oel war dafür gesorgt, dass die Contacte nicht trocken liefen. In dieser Weise gelang es, die thermoelectrischen Kräfte an den Contactstellen genügend schwach und constant zu erhalten und eine merkbare Erwärmung der Scheibe zu vermeiden.

Diese Bedingungen zu erfüllen, war von Anfang an mit ziemlich grossen Schwierigkeiten verbunden.

Die beiden Contacte sind mit der Quecksilbersäule, deren Widerstand gemessen werden sollte, und mit einem Galvanometer in einer Leitung verbunden. Das Quecksilber war in einer der oben erwähnten calibrirten, etwa 1 m langen und 2 oder 3 cm weiten Glasröhren eingeschlossen. Die Röhre war vertical, ganz mit Quecksilber gefüllt, aufgestellt, und die zum Galvanometer führende Ableitung des die ganze Säule durchströmenden Hauptstromes geschah mittelst zweier der die Röhre umspannenden Uhrfedern, welche vermöge der in der Röhrenwand gebohrten Löcher mit dem Quecksilber in leitender Verbindung standen. Man hätte auch mit demselben Erfolge diese Anordnung in der Weise umkehren können, dass der Hauptstrom durch die Löcher geleitet wurde, während der abgeleitete Strom von den Endpunkten der Säule genommen wurde. Da aber diese Anordnung hier keine praktischen Vortheile gewährte, so wurde sie nicht benutzt.

Die in dieser Weise in der zum Galvanometer führenden Leitung erzeugten electromotorischen Kräfte müssen selbstverständlich entgegengesetzt gerichtet sein, und bekanntlich sollten die Versuche darauf hinausgehen, die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe in dem Augenblicke zu messen, wenn die beiden entgegengesetzten electromotorischen Kräfte gerade einander aufhoben.

Das Galvanometer war das oben erwähnte Thomson'sche, dessen untere Rolle mit einem Widerstand von 0,7 Ohm hier allein in Anwendung kam. Der äussere compensirende Magnet dieses Apparates war gewöhnlich bei diesen Versuchen weggenommen, da es von Belang war, dass die Schwingungen schnell verliefen. Die Zeit einer einfachen Schwingung betrug ungefähr 3 Secunden. Ein Millionstel Volt entsprach etwa 120 mm der im Fernrohre beobachteten Scala. Bei den Messungen des Widerstandes einer Quecksilbersäule von der Grösse 0,000 24 Ohm war die Intensität des Hauptstromes gleich 2,9 Ampère, und demnach die zu messende electromotorische Kraft ungefähr gleich 700 Mil-

lionstel Volt, was 84000 mm der Scala entsprechen würde. Da innerhalb der kurzen Zeitdauer, während welcher die Rotationsgeschwindigkeit gemessen wurde, die Abweichungen vom Nullpunkte der Scala gewöhnlich nicht 10 mm überstiegen, so konnte der wahrscheinliche Fehler einer Messung höchstens zu $^1/_{84}$ Proc. geschätzt werden.

Der Chronograph. Ausser der schon erwähnten, im Inneren des Cylinders angebrachten Scheibe war noch eine zweite, ganz ähnliche, auf derselben Axe dicht ausserhalb des Cylinders angebracht. Von diesen beiden Scheiben war die eine von Messing, die andere von Kupfer, und konnten dieselben gegenseitig vertauscht werden. Ein in Millimeter eingetheiltes Papierband war um die äussere Scheibe gelegt, wodurch der Umfang der Scheibe in ungefähr 940 Theile getheilt war. In kleiner Entfernung von dem Papierbande befanden sich die Enden zweier Platindrähte, von welchen während der Zeit, wo die Rotationsgeschwindigkeit gemessen werden sollte, electrische Funken alle zwei Secunden durch das Papierband auf den Rand der Scheibe übersprangen. Um die so erhaltenen Marken der Zeitfolge nach ordnen zu können, wurden in allen Fällen, wo es nöthig war, nach jedem Funken die Platindrähte in eine etwas geänderte Lage gebracht, indem sie in einer um ihre Axe beweglichen Röhre angebracht waren, sodass das eine Drahtende sich in der Axe der Röhre befand. Auf diese Weise wurde der Bruchtheil der in zwei Secunden ausgeführten Anzahl von Umdrehungen bestimmt, während die ganze Zahl der Umdrehungen entweder direct gemessen oder als bekannt vorausgesetzt werden konnte, indem überhaupt hier kein Versehen möglich war.

Die beiden Platindrähte waren mit der Inductionsrolle eines Ruhmkorff'schen Apparates verbunden. Die Unterbrechung des Hauptstromes dieses Apparates geschah bei den endlichen Versuchen in folgender, sehr einfacher Weise, die sich als die genaueste von den verschiedenen von mir geprüften Methoden zeigte. Vor dem in der Einleitung erwähnten Pendelchronometer war eine zweite einfache Pendeluhr aufgestellt, deren Gang durch Beobachtung der zusammenfallende Schläge der beiden Pendel mit dem Gange des

Chronometers während der Messungen häufig verglichen wurde. An der unteren Spitze des zweiten Pendels war ein 1 bis $1\frac{1}{2}$ m langer Seidenfaden befestigt, während das andere Ende des Fadens in derselben Höhe und in der Schwingungsebene des Pendels in der Weise befestigt war, dass der Faden bei jeder doppelten Schwingung des Pendels schwach gespannt wurde. An der Mitte dieses Fadens war mittelst eines kurzen Fadens ein kleiner von Kupferdraht gebildeter Bügel aufgehängt. Die beiden Schenkel dieses Bügels tauchten durch zwei Oesen in zwei Cylindergläser, von welchen das eine ganz, das andere zur Hälfte mit Quecksilber, zur Hälfte mit Alkohol gefüllt war. Während der grösseren Zeit der Schwingungen des Pendels wurde der Bügel von den Oesen getragen, und erst wenn der Faden anfing sich zu spannen, wurde der Bügel schnell in die Höhe geworfen, wobei alles so angeordnet war, dass die Spitze des einen Schenkels vom Quecksilber in den Alkohol gerade in dem Augenblicke der grössten Geschwindigkeit gehoben wurde. Durch diese Bewegung wurde der Hauptstrom des Ruhmkorff'schen Apparates unterbrochen, und gleichzeitig schlugen die Inductionsfunken auf die rotirende Scheibe über.

Die Anordnung der Versuche. Die Apparate waren in zwei Zimmern, welche durch ein zwischenliegendes drittes getrennt waren, aufgestellt. In dem grösseren Zimmer befanden sich der Rotationsapparat, die Dynamomaschine und der Chronograph. Die gemeinsame Axe des Rotationsapparates und der Dynamomaschine war ungefähr in der Ostwestrichtung aufgestellt, und alles Eisen aus der Nähe des Rotationsapparates entfernt. Von diesen Apparaten waren alle Leitungen zum anderen Zimmer geführt, wo das Galvanometer, 10 m von dem Rotationsapparate und 15 m von der Dynamomaschine entfernt, aufgestellt war. Ausserdem befanden sich hier in der Nähe des Beobachters verschiedene Commutatoren, Schlüssel und Rheostaten. Zu dem einen Commutator führte die Leitung von einer am anderen Ende des Gebäude aufgestellten Batterie von 24 Bunsen'schen Elementen. Von dem Commutator war der Strom zu den Drahtwindungen des Rotationsapparates geleitet, von da durch einen in der

Luft schwebenden Draht zu der zu messenden Quecksilbersäule und weiter zum Commutator zurück. In der Nähe des Beobachters war diese Leitung durch einen Schlüssel unterbrochen.

Eine andere Batterie von 10 bis 20 Elementen diente als Triebkraft der Dynamomaschine. Mittelst einer Zweigleitung war ein Theil dieses Stromes zu einem in der Nähe des Beobachters aufgestellten Flüssigkeitsrheostaten abgeleitet. Dieser Rheostat bestand aus einem hohen mit einer gesättigten Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd gefüllten Cylinderglase, worin eine als negative Electrode dienende Kupferplatte am Boden angebracht war, während ein dicker Kupferdraht, welcher bequem gehoben und gesenkt werden konnte, als positive Electrode diente. Bisweilen wurde auch daneben noch ein Stöpselrheostat angewendet. Durch Einstellung des Rheostaten konnte die Rotation der Dynamomaschine ohne Schwierigkeit regulirt und constant gehalten werden.

Für den Ruhmkorff'schen Apparat diente eine Batterie von 4 Elementen, von welchen eine Leitung ebenfalls zum Beobachtungszimmer geführt wurde. Diese Leitung war hier durch einen Schlüssel unterbrochen, um während der Zeitdauer, wo die Rotationsgeschwindigkeit gemessen werden sollte, geschlossen zu werden.

Ferner befand sich im Beobachtungszimmer noch ein Daniell'sches Element, in dessen Stromkreis ein Siemens'scher Rheostat eingeschaltet war, während ein Theil des Stromes zum Galvanometer abgeleitet war. Dieser abgeleitete Strom diente zur Compensation der an den Gleitstellen der rotirenden Scheibe erzeugten thermoelectrischen Ströme, deren electromotorische Kraft bei den endlichen Versuchen selten 3 Millionstel Volt überstieg. Ausserdem diente der abgeleitete Strom noch dazu, um sich zu vergewissern, dass die zum Galvanometer führende Leitung in Ordnung war, indem der Beobachter bald durch Erfahrung belehrt war, welcher Ausschlag am Galvanometer bei einer gegebenen Aenderung des Rheostatenwiderstandes eintreten sollte.

Endlich war auch ein Commutator in die zum Galvanometer führende Leitung eingeschaltet.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt.

Nachdem die Dynamomaschine in Gang gesetzt war, wurde durch einen Druck auf den einen Schlüssel der zu den Drahtwindungen des Rotationsapparates führende Strom geschlossen, wonach der Ausschlag des Galvanometers beobachtet und durch Einstellung des zur Regulirung der Umdrehungsgeschwindigkeit dienenden Flüssigkeitsrheostaten zum Nullpunkte zurückgeführt wurde. Jetzt wurde der Batteriestrom unterbrochen und, während die Rotation andauerte, der im Galvanometer beobachtete thermoelectrische Strom in der oben angeführten Weise compensirt. Nachher wurde wiederum der zum Rotationsapparate führende Strom geschlossen und die Rotation mittelst des Flüssigkeitsrheostaten genau regulirt. Wenn alsdann die Galvanometernadel mit geringer Geschwindigkeit den Nullpunkt der Scala passirte, wurde durch einen Druck auf den zweiten Schlüssel die zum Ruhmkorff'schen Apparate führende Leitung geschlossen und somit der Chronograph in Wirksamkeit gesetzt. Nach zwei, bisweilen mehreren Entladungen, welche deutlich vom Beobachter gehört wurden, wurden alle Leitungen unterbrochen, die Rotation hörte auf, und die auf dem Papierbande von den Funken geschlagenen Marken wurden notirt. Der Versuch wurde gleich nachher mit abgeänderter Richtung des zum Rotationsapparate führenden Batteriestromes wiederholt, wonach zwei ähnliche Versuche bei commutirter Leitung zum Galvanometer ausgeführt wurden. Endlich erwies es sich als nothwendig, dieselben Versuche bei entgegengesetzter Rotationsrichtung, indem der zum rotirenden Anker der Dynamomaschine führende Strom umgewendet wurde, zu wiederholen. Zu jeder Versuchsgruppe gehörten demnach acht unmittelbar nacheinander folgende Messungen, von welchen das Mittel genommen wurde.

Während der Versuche wurde häufig die Temperatur der Quecksilbersäule beobachtet. Eine Vertauschung der Pole der verschiedenen Batterien wurde öfters geprüft, zeigte sich aber ohne Einfluss auf das Endresultat.

Noch mag bemerkt werden, dass beim Schliessen und Oeffnen des zum Rotationsapparate führenden Batteriestromes sehr oft in der Galvanometerleitung Inductionsströme ent-

standen, was für die Beobachtung lästig war. Da sie von dem Theile der zum Galvanometer führenden Leitung, welcher sich in der Nähe der Drahtwindungen des Rotationsapparates befand, herstammten, so konnten sie bei passender Anordnung der Drähte leicht beseitigt werden.

Berechnung der Constante des Rotationsapparates. Der Widerstand der abgeleiteten Quecksilbersäule sei durch R, die gemessene Anzahl der Umdrehungen der Scheibe in der Secunde durch n und die Constante des Rotationsapparates durch C bezeichnet. Dann ist:

$$R = nC.$$

Ich kann mich hier darauf beschränken, die Berechnung dieser Constanten für den Fall anzugeben, dass die rotirende Scheibe unendlich dünn ist, dass der Mittelpunkt der Scheibe genau mit der Rotationsaxe und der Axe des Cylinders zusammenfällt, und dass ebenfalls der Centralcontact in dieser Axe liegt, indem die vorhandenen Abweichungen von diesen Voraussetzungen so verschwindend kleine Correctionen mit sich bringen, dass ein näheres Eingehen auf die Berechnung derselben ganz überflüssig wird.

Es sei d die Höhe des um den Cylinder gehenden Schraubenganges, in welchen der Draht eingelegt ist, r der Halbmesser der Drahtwindungen, ϱ der Halbmesser der Scheibe, a_1 und a_2 die Entfernungen der Scheibe von den Endflächen der Drahtwindungen. Alsdann ist die Constante C aus der Formel:

$$C = \frac{2\pi}{d}\int_{-a_2}^{a_1} dx \int_0^{2\pi} d\Theta \frac{r\varrho\cos\Theta}{\sqrt{x^2 + r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\Theta}}$$

zu berechnen.

Wird hier zur Abkürzung $\varrho = qr$, $x^2 + r^2 = \alpha r^2$ und entsprechend $a_1^2 + r^2 = \alpha_1 r^2$, $a_2^2 + r^2 = \alpha_2 r^2$, so wie:

$$Q_\alpha = \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha - 1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta\cos\Theta}{\sqrt{\alpha + q^2 - 2q\cos\Theta}}$$

gesetzt, so erhält man:

$$C = \frac{\pi q r^2}{d}[Q_{\alpha_1} + Q_{\alpha_2}].$$

Bei der Entwickelung in eine Reihe ergibt sich:

$$Q_e = 2\pi q \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[1 + \frac{3q^2}{8\alpha^2} + \frac{5q^4}{16\alpha^4}\left(\frac{7}{4} - \alpha\right) + \frac{35q^6}{128\alpha^6}\left(\frac{33}{8} - \frac{9}{2}\alpha + \alpha^2\right) + \dots\right]$$

wo die angegebenen Glieder hier für die numerische Berechnung hinreichten, während die vollständige Entwickelung in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$Q_e = 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{2m+1} \frac{1.3\dots 2m-1}{2.4\dots 2m.1.2\dots m+1} \frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+1/2}.$$

Resultate der Messungen. Die Messungen mit dem Rotationsapparate konnten erst gegen Ende März (1884) begonnen werden, und das Resultat der ersten Messungen habe ich der den 28. April zusammengetretenen internationalen Conferenz mitgetheilt. Dieses Resultat (1 Quecksilbereinheit = 0,9417 Ohm) habe ich jedoch nur als ein vorläufiges bezeichnet, indem ich die Bemerkung hinzufügte, dass die Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Messungen noch nicht hinlänglich befriedigend war. Auch bei den nächstfolgenden Versuchen zeigten sich die nämlichen Schwankungen, bis ich endlich darauf verfiel, die Rotationsrichtung der Scheibe umzukehren, wodurch die eigentliche Ursache der Fehler enthüllt wurde. Ich werde darauf etwas näher eingehen.

Eine vollkommene Isolation ist bei electrischen Versuchen nicht möglich, doch wird nur ausnahmsweise der Fall eintreten, dass vollständig unvermeidliche Isolationsfehler auf das Resultat einen merklichen Einfluss ausüben. Es trat aber eben dieser Fall hier ein. Die zum Galvanometer führende Leitung war in zwei Punkten A und B mit der Quecksilbersäule, deren Widerstand gemessen werden sollte, und welche vom Hauptstrome durchflossen war, verbunden. Der Widerstand AB betrug nur 0,00026 bis 0,015 Quecksilbereinheiten. Wenn nun ferner ein Punkt C der Galvanometerleitung mit einem Punkte D der Hauptleitung in schwach leitende Verbindung gesetzt worden ist, so wird der durch diese Nebenleitung abgeleitete Theil des Hauptstromes auf das Galvanometer einen verhältnissmässig grossen Einfluss ausüben können. Es sei der Widerstand dieser Nebenleitung

CD, und ferner r der Widerstand desjenigen Theiles der zum Galvanometer führenden Leitung, welcher von C bis A oder bis B führt, je nachdem das Galvanometer in den Leitungen CB oder CA enthalten ist. Alsdann kann die zum Galvanometer abgeleitete electromotorische Kraft E, welche während der Versuche von der in derselben Leitung inducirten electromotorischen Kraft im Gleichgewicht gehalten wird, durch die Gleichung:

$$E = i \, . \, AB \left[1 \pm \frac{BD}{AB} \cdot \frac{r}{CD} \right]$$

annäherungsweise ausgedrückt werden, wobei durch i die Intensität des Hauptstromes bezeichnet ist, und vorausgesetzt wird, dass der Widerstand AB gegen BD und r, und ebenfalls diese letzteren Widerstände gegen CD sehr klein sind. Das obere Vorzeichen entspricht dem Falle, dass das Galvanometer in der Leitung CA, das untere demjenigen, dass das Galvanometer in der Leitung CB enthalten ist. Wenn die Rotation der Scheibe umgekehrt wird, so müssen gleichzeitig die Drähte der Galvanometerleitung in A und B vertauscht werden, wodurch das Vorzeichen des zweiten Gliedes in das entgegengesetzte übergeht. Es wird hieraus ersichtlich, dass der von der Nebenleitung CD herrührende Fehler dadurch eliminirt werden kann, dass die Messungen mit entgegengesetzter Rotation wiederholt werden und das Mittel derselben genommen wird.

Ich werde den ersten der bei entgegengesetzten Rotationen ausgeführten Versuche als Beispiel anführen. Der Hauptstrom ging fünfmal um den Cylinder des Rotationsapparates, und der Widerstand dieser Leitung, welcher nahezu dem obigen Widerstande BD entsprechen musste, betrug 195 S.-E. Ferner war AB gleich 0,00154 S.-E. Die Zahl der Umdrehungen der Scheibe in 2 Secunden betrug für die Rotation rechts 14,6820 und für die Rotation links 14,5751. Die Abweichungen vom Mittel betrugen demnach 0,37 Proc. Der obigen Formel zufolge ist also:

$$0{,}0037 = \frac{195}{0{,}00154} \cdot \frac{r}{CD},$$

woraus $CD = 34 \, . \, 10^6 \, r$.

Wenn also $r = 0,5$ S.-E. angenommen wird, was mit den thatsächlichen Verhältnissen ungefähr übereinstimmt, so folgt hieraus, dass ein Isolationsfehler mit einem Widerstande von 17 Millionen Siemens-Einheiten hinreicht, um den aus den beiden entgegengesetzten Rotationen erscheinenden Fehler zu erklären. Da die beiden Leitungen sowohl bei dem Rotationsapparate, als im Beobachtungslocale nahe aneinander entlang geführt werden mussten, so waren solche kleine Isolationsfehler kaum zu vermeiden, und man musste sich darauf beschränken, dieselben durch die Versuche selbst zu eliminiren.

Die Isolation der einzelnen Drähte des Kabels des Rotationsapparates zeigte sich von Anfang ab, namentlich wenn die Luft feucht war, nicht befriedigend, weshalb das Kabel wiederholt mit einer dünnen Schellacklösung getränkt wurde. Nach dem vollständigen Trocknen derselben betrug der kleinste Widerstand, welcher zwischen zweien der Drähte oder zwischen den Drähten und dem Cylinder gemessen wurde, 500000 S.-E., welche Isolation hier genügte. Ein Draht bildete jedoch dabei eine Ausnahme und musste aus der Leitung ausgeschlossen werden, sowie auch späterhin noch ein zweiter Draht wegen eines eintretenden Isolationsfehlers ausgeschlossen werden musste, weshalb die endlichen Versuche nur mit 5 Drähten angestellt wurden.

Die Messungen der einzelnen Theile des Rotationsapparates ergaben die folgenden Resultate, wobei 1 cm als Längeneinheit angenommen ist.

Der Halbmesser der Drahtwindungen $R = 16,65$,
die Höhe des Schraubenganges . . $d = 0,211589$,
die Entfernungen von der Mitte der Scheibe bis zu den Endflächen der Drahtwindungen:

$$a_1 = 50,09, \quad a_2 = 49,80.$$

Die Messungen des Durchmessers der messingenen Scheibe ergaben vor dem Anfange der Rotationsversuche:

$2\varrho = 29,897, \quad 29,909, \quad 29,901, \quad 29,913 \quad M. 29,905,$

nach Beendigung einer grossen Anzahl von Rotationsversuchen und unmittelbar bevor der endlichen Versuche:

$29,889, \quad 29,879, \quad 29,894 \quad M. 29,8933,$

und endlich nach der Beendigung aller Versuche:

29,889, 29,894, 29,898, $M.$ 29,8937.

Die beiden letzteren fast identischen Resultate zeigten, dass bei den endlichen Messungen kein merkliches Schleifen vorhanden gewesen. Dagegen trat die Wirkung des Schleifens bei der weicheren kupfernen Scheibe deutlich hervor, indem für dieselbe vor und nach den endlichen Versuchen die folgenden Durchmesser gefunden wurden:

29,867, 29,871, 29,872, $M.$ 29,870.
29,856, 29,853, 29,859, $M.$ 29,856.

Die mittelst dieser Werthe nach der oben entwickelten Formel berechnete Constante C, vermindert um die ebendaselbst erwähnten Correction, welche nur 0,6 Einheiten beträgt, ist für die messingene Scheibe:

39656,1,

und für die kupferne Scheibe vor und nach den endlichen Versuchen: 39594,1 und 39556,1

aus welchen beiden Grenzwerthen die einer jeden der drei mit dieser Scheibe angestellten Versuchsreihen entsprechenden Constanten durch Interpolation berechnet sind.

Diese für 0° geltenden Werthe der Constante C gehen bei t^0 in:

$$C(1 + bt)$$

über, indem $b = 0{,}00018$ den linearen Ausdehnungscoëfficienten des Messings angibt.

Es sei die Anzahl der in 2 Secunden des Chronographen gemachten Umdrehungen der Scheibe durch $m + (n/p)$ bezeichnet, indem m die ganze Zahl der Umdrehungen, n die auf dem Papierbande abgelesene Anzahl von Millimetern zwischen zwei aufeinander folgenden Funken, und p die Länge des Papierbandes in Millimetern angibt. Es sei ferner eine Zeitsecunde gleich σ Secunden des Chronographen, die Anzahl der Drähte, welche in dem Kabel hintereinander vom Strome durchflossen werden, sei durch s, der in Quecksilbereinheiten gemessene Widerstand der Quecksilbersäule bei 0° durch R, und der scheinbare Temperaturcoëfficient dieses Widerstandes durch γ ($= 0{,}00090$) bezeichnet. Man hat alsdann:

$$1\ \text{Q.-E.} = \tfrac{1}{2}\sigma\left(m + \frac{n}{p}\right)\frac{Cs(1+bt)}{R(1+\gamma t)}\ \text{abs. Ohm.}$$

Ich beschränke mich darauf, hier die Resultate meiner endlichen Messungen, die alle in den Tagen vom 9. bis 13. Juni (1884) ausgeführt wurden, anzugeben, welche Resultate allein zur Feststellung des nach meinen Messungen wahrscheinlichsten Werthes der Quecksilbereinheit in absoluten Ohms benutzt sind.

Röhre Nr. I. Messingscheibe.

Vier Messungen, wobei die zum Rotationsapparate führende Leitung zuerst commutirt wurde, und nachher die beiden Versuche bei commutirter Leitung zum Galvanometer wiederholt wurden, ergaben die folgenden Werthe von n:

491,0, 583,7, 514,0, 571,0,

und bei Wiederholung derselben Messungen:

492,6, 581,3, 496,5, 592,6 Mittel 540,34.

Nach Umkehrung der Rotation der Scheibe waren die entsprechenden Werthe:

651,1, 676,8, 626,4, 592,5,
663,1, 681,7, 648,2, 586,4, Mittel 640,77.

Es ergibt sich hieraus für diese beiden Fälle, indem $m = 14$, $p = 939{,}6$ waren:

$$m + \frac{n}{p} = 14{,}5751 \text{ und } 14{,}6820, \quad M.\, 14{,}6285.$$

Ferner waren:

$s = 5$, $\sigma = 1{,}01924$, $t = 17{,}06^0$, $R = 0{,}001\,541\,8$, $C = 39656{,}1$,

woraus erhalten wird:

1 Q.-E. = 0,94455 abs. Ohm.

Die folgenden Versuche waren mit jeder der 3 Abtheilungen AB, BC und CD der calibrirten Röhre Nr. II angestellt. Da der Widerstand jeder dieser Quecksilbersäulen ungefähr sechsmal kleiner als derjenige der Röhre Nr. I war, so waren die 5 Drähte des Kabels des Rotationsapparates in einem Drahte vereinigt. Es war dadurch der Widerstand des Kabels fünfundzwanzigmal kleiner, und die Intensität des Hauptstromes zwölfmal grösser geworden. Es geht daraus hervor, dass, obwohl der gemessene Wider-

stand hier sechsmal kleiner ist als bei den obigen Messungen, dennoch die electromotorische Kraft des zum Galvanometer abgeleiteten Stromes doppelt so gross war, weshalb ich auch den Messungen das doppelte Gewicht beilege. Ebenfalls muss auch hier der Unterschied der beiden bei entgegengesetzten Rotationen gewonnenen Resultate bei ungeänderten Isolationsfehlern bedeutend kleiner ausfallen.

Röhre Nr. II, AB, Kupferscheibe. Werthe von n.

243,5, 253,0, 234,1, 239,8
250,8, 258,6, 245,2, — Mittel 246,4.

Bei entgegengesetzter Rotation:

271,6, 280,4, 269,8 277,6 Mittel 258,9.
260,0, 269,6, 270,0, 271,5

Ferner waren:

$m = 12$, $p = 939{,}5$, $s = 1$, $\sigma = 1{,}01977$, $t = 17{,}97^0$,
$R = 0{,}000\,258\,36$, $C = 39578{,}5$,

woraus 1 Q.-E. = 0,94391 abs. Ohm.

Röhre Nr. II, AB, Kupferscheibe. Werthe von n.

351,5, 325,2, 341,4 324,6 Mittel 335,7.

Bei entgegengesetzter Rotation:

349,8, 324,8, 343,8, 321,5 Mittel 335,0.

$m = 12$, $p = 940$, $s = 1$, $\sigma = 1{,}01915$, $t = 18{,}73^0$,
$R = 0{,}000\,259\,64$, $C = 39571{,}0$.

1 Q.-E. = 0,94410 abs. Ohm.

Röhre Nr. II, CD, Kupferscheibe. Werthe von n.

432,8, 435,9, 436,1, 441,2 Mittel 436,5.
$t = 18{,}32^0$, $\sigma = 1{,}01935$.

Bei entgegengesetzter Rotation:

487,7, 518,4, 496,0, 518,2,
495,8, 522,0, 484,2, 511,6 Mittel 504,24.

$t = 18{,}36$, $\sigma = 1{,}01945$, $m = 12$, $p = 941{,}5$,
$R = 0{,}000\,262\,79$, $C = 39562{,}2$.

1 Q.-E. = 0,94391 abs. Ohm.

Aus den gesammten Messungen geht als das wahrscheinlichste Endresultat hervor:

1 Q.-E. = 0,9440 abs. Ohm,
1 abs. Ohm = 1,0593 Quecksilbereinheit.

Es stimmt dieses Resultat sehr nahe mit den von F. Kohlrausch und Roiti gefundenen Werthen überein, während die von uns angewandten Methoden wesentlich verschieden sind. Ueberhaupt geht aus den sämmtlichen der internationalen Conferenz vorgelegten Resultaten, namentlich nachdem neulich Wild einen wesentlichen Fehler in seinen Messungen corrigirt hat, hervor, dass die verschiedenen Methoden übereinstimmende Resultate liefern.

Ich hatte selbst einiges Bedenken in Betreff der Anwendung von variablen Strömen gehegt, indem eine Möglichkeit vorhanden war, dass innere thermoelectrische Verschiedenheiten in einem Leiter dieselbe Wirkung wie z. B. die Polarisation in einem Electrolyten ausüben und namentlich den Widerstand bei variablen Strömen kleiner, als bei constanten Strömen machen könnten. Dieses Bedenken kann ich jetzt ganz aufgeben, zumal da ich zu demselben Resultate auch auf anderem Wege gelangt bin.

Sowohl bei meinen relativen, als bei den absoluten Widerstandsbestimmungen, welche mit constanten Strömen ausgeführt wurden, habe ich häufig dieselben Messungen mit intermittirenden Strömen wiederholt, in keinem Fall jedoch irgend einen Unterschied im Resultate beobachtet. Ferner dürfte die folgende Betrachtung nicht ganz ohne Interesse sein. Ein Unterschied in dem Leitungsvermögen für constante und variable Ströme musste auf die Inductionsconstante des Leiters einigen Einfluss ausüben. In der That habe ich auch bei früheren Versuchen[1]) kleine Abweichungen der beobachteten Inductionsconstanten von den berechneten gefunden, indem die ersteren um 5 bis 6 Proc. kleiner, als die letzteren ausfielen. Die Berechnung war auf die gewöhnliche Weise ausgeführt, nämlich ohne dass auf den Umstand, dass bei variablen Strömen die Stromdichtigkeit eine Function der Entfernung von der Centrallinie des Drahtes ist, die gehörige Rücksicht genommen war. Eine genauere Berechnung zeigte mir, dass die berechnete Inductionsconstante um die Länge des Drahtes vermindert werden musste,

---

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 7. p. 161. 1879.

und diese Correction entsprach auch am nächsten den gefundenen Abweichungen.

Wenn demnach die Unterschiede der von den verschiedenen Forschern erlangten Bestimmungen des Ohms als zufällig betrachtet werden müssen, so darf gewiss auch der von der Conferenz festgestellte Werth des Ohms, nämlich

1 Ohm = 1,06 Quecksilbereinheiten,

welcher Werth sehr nahe dem mittleren Werthe aller Beobachtungen entspricht, als der für die Gegenwart genaueste betrachtet werden, und man darf hoffen, dass hiermit auch der ursprünglich erzielte Grad der Genauigkeit, nämlich eines Tausendstels, wirklich erreicht ist.

II. *Beiträge zur Electricitätsleitung der Gase; von Franz Stenger.*

(Hierzu Taf. I Fig. 3—5.)

Die vorliegende Arbeit verfolgt einen doppelten Zweck. Im ersten Theile sucht der Verfasser theils unter Benutzung der ausserordentlich reichhaltigen Literatur, theils auf Grund eigener Versuche den Nachweis zu liefern, dass ein in allen Fällen gültiges Unterscheidungsmerkmal zwischen Bogenentladung und Glimmentladung nicht vorhanden ist. Von welchem Factor das Auftreten der einen oder der anderen von beiden Formen abhängt, unter welchen Versuchsbedingungen beide Entladungsarten ineinander übergehen können, soll den Gegenstand des zweiten Theiles bilden.

I. Theil.

Vor allem sei es mir gestattet, in kürze die wesentlichen Kennzeichen der Bogenentladung im Gegensatz zum Glimmlicht zusammenzustellen; ich beziehe mich dabei ausdrücklich auf die normalen Formen der Entladung.

1) Die Gasschicht besitzt in der Bogenentladung einen weit geringeren Widerstand, als im Glimmlicht.

2) Im Bogenlicht wird die Anode stärker erhitzt, als die Kathode, beim Glimmlicht umgekehrt.

3) Im Spectrum des Bogenlichtes überwiegt das Licht der Electrodensubstanz über das der zwischen ihnen befindlichen Gasschicht, während umgekehrt bei der Glimmentladung das Spectrum nur die Linien der Gasstrecke gibt, und die Natur der Electroden gleichgültig ist.

4) Im Bogen werden beide Electroden zerstäubt, allerdings in verschiedenem Maasse, während im Glimmlicht nur an der Kathode eine Zerstäubung eintritt.

§ 1. Ueber den Widerstand der Gasstrecke. — Bei der Glimmentladung in verdünnten Gasen sind es nach Hittorf[1]) die beiden ersten Schichten des Kathodenlichtes, welche dem Durchgang electrischer Ströme einen Widerstand entgegensetzen, gegen welchen der Widerstand des positiven Büschellichtes sehr klein ist. Da mit abnehmendem Druck beide Schichten eine immer grössere Ausdehnung annehmen, wächst gleichzeitig der Widerstand des Kathodenlichtes. Als umgekehrt Hittorf zu grösseren Gasdichten überging, nahm die Dicke des Glimmlichtes ab, die Stromstärke zu. Bei einem mit Stickstoff von etwa 17 mm Druck gefüllten Vacuumrohr trat unmittelbar nach Stromschluss, wie bei starken Verdünnungen, auf der 17 mm langen Kathode ein 1 mm dickes Glimmlicht auf, das in kurzer Zeit den Draht auf starke Gelbgluth erhitzte, die sich an dem der Anode zugewendeten Ende auf Weissgluth steigerte und die starke Iridiumelectrode zur Schmelzung brachte. Wurde die Gasdichte noch mehr gesteigert, so kam auch die Anode zur Weissgluth; ja bei einem Drucke von 53 mm wurde die Anode sogar heisser als die Kathode. Gleichzeitig wuchs die Stromstärke immer mehr an und erreichte schliesslich eine Stärke von 2 Ampère, eine Stromstärke, die sich von den bei Bogenlicht erhaltenen nicht sehr unterscheidet. Besonders deutlich zeigen aber einige andere Beobachtungen von Hittorf[2]) und Goldstein[3]), dass bei ge-

1) Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 97. 1884.
2) Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 133. u. folg. 1884.
3) Goldstein, Wied. Ann. 24. p. 81 u. folg. 1885.

eigneter Wahl der Versuchsbedingungen der Widerstand des Gases beim Glimmlicht von derselben Grössenordnung ist, wie im Davy'schen Bogen. Erhitzte nämlich Hittorf eine als Kathode verwendete Platinspirale durch Hindurchleiten eines kräftigen Stromes, so blieb der Widerstand ungeändert, solange das Platin nur rothglühend war; mit dem Gelbglühen trat plötzlich eine Abnahme des Widerstandes ein, die sich mit der Temperaturerhöhung des Platins schnell steigerte. Wurde der Versuch in ähnlicher Weise mit einem Carré'schen Kohlenstäbchen ausgeführt, so gelang es noch mit 10 kleinen Elementen bei 4 cm Electrodenabstand eine Entladung zu erzeugen. Bei einem Abstand von 15 cm gaben 40 Elemente einen stetigen Strom von $^1/_{10}$ Ampère. Wandte Hittorf als Kathoden die Kohlen eines Davy'schen Bogens an, so war die Wirkung noch weit grösser. Wurde dagegen die Anode stark erhitzt, so war keine Aenderung in der Stromstärke zu constatiren. Ganz gleiche Resultate hat Goldstein erhalten.

Es kommt nach diesen Untersuchungen also nur auf geeignete Versuchsbedingungen an, um auch bei Glimmentladungen Ströme von derselben Grössenordnung, wie beim Bogenlicht zu erhalten.

§ 2. Existirt eine Abhängigkeit der Temperatur der Electroden bei der Bogenentladung vom Druck und der Natur des umgebenden Gases?

Die erste Beobachtung über die verschiedene Temperatur der Electroden rührt von Gassiot her; einige Jahre später stellte Grove[1]) Untersuchungen über das Verhalten des Bogenlichts in verschiedenen Gasen und in einem Vacuum an, wie es damals zu erreichen war. Seine Resultate stimmen nur zum Theil mit meinen Beobachtungen überein. In Wasserstoff wie auch Stickstoff soll nach ihm die Temperatur beider Electroden dieselbe sein — beurtheilt nach der Färbung und der Schnelligkeit des Erlöschens — ebenso in möglichst vollkommenem Vacuum. Wie er jedoch selbst mittheilt, gelang es ihm in Wasserstoffatmosphäre nur bei

1) Grove, Phil. Mag. (3) **16.** p. 478. 1840.

Kohlenelectroden, den Bogen einige Zeit lang constant zu erhalten, sodass seiner Behauptung, dass dann die Electroden keinen Unterschied in der Temperatur erkennen liessen, kein grosser Werth beigelegt werden kann. Ich habe mich ebenfalls vergebens bemüht, ein constantes Bogenlicht in Wasserstoff zwischen Metallelectroden herzustellen; wie auch Liveing und Dewar[1]) beobachtet haben, ist die Länge des Bogens in Wasserstoff weit kleiner als in Luft, und ruft daher eine geringe Vergrösserung des Electrodenabstandes das Verlöschen des Bogens hervor. Dass aber bei kurzem Stromschluss die Temperatur der Electroden wesentlich anders sein kann, als bei anhaltendem Brennen, geht deutlich aus der Angabe von Moigno[2]) hervor, dass, nachdem der Contact zwischen den Electroden zur Erzeugung des Bogens unterbrochen wird, zunächst weisses Licht an der Spitze der negativen Electrode aufblitzt, und erst dann die positive zu erglühen beginnt. Bei Kohlenelectroden dagegen habe ich durch eine Reihe von Versuchen sicher constatirt, dass in Wasserstoff wie auch in Stickstoff stets die Anode eine höhere Temperatur besitzt als die Kathode, wenngleich der Unterschied nie so merklich war, wie in Luft. Es scheint danach allerdings die Vermuthung Grove's nicht unberechtigt, dass in sauerstoffhaltigem Gase secundäre Erscheinungen eine Rolle spielen. Dass man bei derartigen Beobachtungen den Bogen erst einige Minuten in Gang erhalten muss, ehe man die Temperaturvergleichung vornimmt, kann aus der Angabe entnommen werden, dass man beide Kohlen häufig gleichzeitig verlöschen sieht, wenn man den Bogen hergestellt hat und unmittelbar darauf unterbricht.

Die meisten dieser Versuche habe ich mit einem ausserordentlich einfachen Apparate angestellt, der gleichwohl das Arbeiten mit reinen Gasen bei den verschiedensten Drucken gestattet, weil die Bewegung der Electroden ohne die nie dichtschliessenden Stopfbüchsen geschieht. Der Apparat (Fig. 3) besteht aus einer mit zwei angeblasenen Röhren

1) Liveing u. Dewar, Proc. of the Lond. Roy. Soc. **30.** p. 156. 1880.
2) Moigno, Compt. rend. **30.** p. 359. 1850.

versehenen Kugel; jede der Röhren trägt noch ein seitliches Rohr, von denen das eine mit einer Bessel-Hagen'schen Luftpumpe, das andere mit dem Gasentwickelungsapparat communicirt. Die Enden der Röhren tragen Schliffstücke, in welche die Electroden eingesetzt sind, und einfach durch Drehen der Schliffe können die Electroden zum Contact gebracht und zur Herstellung des Bogens voneinander entfernt werden.

Wollte ich dagegen mit grösserer Bogenlänge arbeiten, so war diese Versuchsanordnung nicht zu gebrauchen. Ich benutzte dann eine andere Vorrichtung, die Fig. 4 in einfachen Umrissen darstellen möge. An den mittleren kugelförmigen Theil *a* von etwa 9 cm Durchmesser war eine 1 cm weite Röhre *b* von 80 cm Länge angeblasen, die durch einen Kautschukschlauch mit einer zweiten *b'* von denselben Dimensionen communicirte. Seitlich war die kurze Röhre *c* mit der Quecksilberluftpumpe verbunden. Oben war endlich ein kurzes ebenfalls 1 cm weites Rohr *d* aufgeblasen von 10 cm Länge, auf das ein weites Rohr *e* aufgesetzt war, von welchem endlich ein Rohr *f* von 80 cm Länge nach unten führte und mit einem anderen *g* durch einen Schlauch verbunden war. In das Rohr *d* wurde die eine der beiden Electroden — der Apparat wurde nur mit Kohlenlicht benutzt — eingesetzt, sodass ihr Ende in den Mittelpunkt des kugelförmigen Theiles reichte, und in ihrer Lage durch 4 Kupferstäbe erhalten, welche an einen Kupferring angelöthet waren, der fest an die Kohle angeklemmt war. Sodann wurde die weite Röhre *e* oben abgeschmolzen. Die Zuführung des Stromes zur oberen Kohle geschah durch Quecksilber, dass das Röhrensystem *f*, *g* und den Zwischenraum zwischen *c* und *d* ausfüllte und die 4 Kupferdrähte umspülte. Die untere Kohle schwamm im Rohr *b* auf Quecksilber, sodass einfach durch Heben oder Senken von *b'* die Distanz der Kohlen sich variiren liess.

Besonders wichtig schien es mir, mit diesem Apparat die Behauptung Grove's zu controliren, dass im Vacuum beide Kohlen entweder keine oder doch nur eine sehr geringe Temperaturdifferenz besitzen. Es wurde zu dem Zwecke

mehrmals sorgfältig getrocknete Luft in den Apparat eingeführt und mit der Luftpumpe auf weniger als $^1/_{10}$ mm Druck evacuirt. Sobald dann der Strom der Gramme'schen Maschine das Bogenlicht erzeugt hatte, trat eine starke Drucksteigerung ein durch Entwickelung von Gasen an den glühenden Kohlen. Infolge dessen sank das Niveau des Quecksilbers im communicirenden Röhrensystem b b', und der Abstand beider Electroden nahm beträchtlich zu, oft bis zu 2 cm, ohne dass der Bogen erlosch. Im Gegentheil war das Licht ausserordentlich stetig. Die Temperatur der Kohlen war dann nur wenig, aber doch mit Sicherheit erkennbar, verschieden, und bei der Unterbrechung des Stromes erlosch die Kathode etwas früher als die Anode. Wurde das Bogenlicht mehrmals wieder hergestellt, — nachdem jedesmal soweit als möglich evacuirt war — so nahm allmählich die Gasentwickelung ab, und als schliesslich eine Druckvermehrung kaum mehr zu constatiren war, verschwand gleichzeitig die Temperaturdifferenz der Kohlen. Da jedoch durch das langsame Zerstäubtwerden der Electroden immer neue Theile derselben in Glühhitze versetzt werden, ist es mir nicht gelungen, Drucke unter 1 bis 2 mm zu erreichen, sodass es unentschieden bleiben muss, ob nicht bei noch geringeren Drucken die Kathode sogar stärker glüht als die Anode.

In den gewöhnlichen Formen der Glimmentladung ist stets diese Erscheinung zu beobachten; die Kathode erscheint häufig roth- oder gar weissglühend, während die Anode dunkel ist. Dass jedoch auch Fälle der Glimmentladung existiren, bei denen die Temperatur der Anode höher ist, als die der Kathode, geht aus den bereits im ersten Paragraphen besprochenen Versuchen von Hittorf[1]) hervor.

§ 3. Das Spectrum des Bogens und der Kohlen.— Betrachtet man das Spectrum des Bogenlichtes, wie es in atmosphärischer Luft von gewöhnlichem Drucke sich bildet, so erscheint es continuirlich, nur selten sieht man einige Metalllinien auftreten. Im Moment aber, wo der Strom

1) Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 112. 1884.

unterbrochen wird, blitzt eine sehr grosse Anzahl heller Linien auf, die ihren Ursprung in den mineralischen Beimengungen der Kohlen haben. Bequemer gelingen spectrale Beobachtungen des Kohlenlichts, wenn man im Vacuum mit verhältnissmässig schwachem Strome operirt; man hat dann einmal den Vortheil, dass der Abstand der Kohlen bis auf 1 cm vergrössert werden kann, ohne dass der Bogen erlischt, und dass man infolge dessen das Spectrum von Kathode, Anode und Bogen leicht trennen kann. Vor allem aber hört dann das ausserordentlich intensive continuirliche Spectrum der im Bogen auf hoher Weissgluth befindlichen Kohlentheilchen auf, die hellen Linien der im Bogen vorhandenen Metalldämpfe zu verdecken.

Stets war man der Ansicht gewesen, dass die Gasatmosphäre, in der man das Bogenlicht erzeugte, ohne Einfluss auf das Spectrum des Bogens sei; erst Liveing und Dewar[1]) sahen im Bogen einer Wechselstrommaschine von de Meritens in Wasserstoff die Linien C und F, bei einer Siemens'schen Maschine mit gleichgerichteten Strömen dagegen die Linie C nur im Moment der Stromesunterbrechung, die F-Linie auch dann nicht deutlich. Der Grund dieses Verhaltens liegt allein in der übergrossen Helligkeit des continuirlichen Spectrums der weissglühenden Kohlentheilchen, denn bei meinen Versuchen im Vacuum waren die Wasserstofflinien sowohl wie die Metalllinien ausserordentlich scharf vom hellen Hintergrund des Bogens abgehoben, ganz unabhängig davon, ob der Apparat vorher mit Wasserstoff gefüllt war oder nur mit trockener Luft. Beobachtete man dagegen das von den Electroden selbst ausgesandte Licht, so war je nach den Umständen die Erscheinung eine wesentlich andere; ich möchte mit wenigen Worten den Vorgang zu schildern versuchen. Waren die Kohlen schon einige Zeit in Gebrauch, sodass die aus ihnen durch die hohe Temperatur freiwerdenden geringen Gasmengen den Druck nicht mehr schnell änderten, wurde von einem Gehülfen das Bild des Lichtbogens auf dem Spalt des Collimators des Spectroskops mit Hülfe einer achromatischen

1) Liveing u. Dewar, Proc. of the Lond. Roy. Soc. **35.** p. 75. 1883.

Linse entworfen und in wechselnder Reihenfolge durch eine geeignete Blende nur Licht von der oberen oder unteren Kohle ins Spectroskop gelassen. War der benutzte Strom schwach, so war das Spectrum der Kohlen lichtschwach und zeigte zuerst keine hellen Linien; nach kurzer Zeit jedoch waren die Wasserstofflinien, wie auch eine Menge Metalllinien, bald an der einen, bald an der anderen Kohle scharf sichtbar. Der Grund für diese plötzlichen Aenderungen wird wohl zum Theil darin zu suchen sein, dass der Bogen nicht gleichförmig um beide Kohlen herum brennt, sodass die dem Collimator zugewandten Theile der Kohlenspitzen bald intensiv glühen, bald nur schwach leuchten. Ist der Strom stark, so ist das Spectrum der Kohlen ein continuirliches.

Aus den angeführten Beobachtungen geht also hervor, dass an beiden Kohlen Wasserstoff frei wird; wir erhalten damit eine Bestätigung dafür, dass die zur electrischen Beleuchtung verwendeten Kohlen stets Kohlenwasserstoffe enthalten, die durch die hohe Temperatur des Bogens wenigstens partiell zersetzt werden. Ich möchte dabei an die Untersuchungen von Dewar[1]) erinnern, nach welchen es überhaupt unmöglich ist, Kohlen von ihren Wasserstoffverbindungen zu befreien, selbst nicht durch tagelanges Glühen im Chlorstrome. Welche Zusammensetzung diese Verbindungen haben mögen, welche Veränderungen sie bei den hohen Temperaturen des Lichtbogens erleiden, ist allerdings noch gänzlich unbekannt; einzig sicher ist wohl die von Berthelot nachgewiesene Bildung von Acetylen im Bogenlicht in einem Wasserstoffstrome. Ob man es aber in diesem Falle wirklich mit einer Synthese von Kohlenstoff und Wasserstoff zu C_2H_2 zu thun hat, ob sich nicht auch im Vacuum Acetylen bildet, man also eher an eine partielle Zersetzung der in den Kohlen vorhandenen Kohlenwasserstoffe zu denken hat, scheint mir noch nicht erledigt.

§ 4. Die Zerstäubung der Electroden. — Unter den üblichen Versuchsbedingungen beschränkt sich bei der Glimmentladung der Process der Zerstäubung auf die

1) Dewar, Proc. of the Lond. Roy. Soc. **30.** p. 87. 1880.

Kathode; soweit diese reicht, ist die Glaswand des Vacuumrohres mit einem ausserordentlich dünnen spiegelnden Beschlag bedeckt, der namentlich bei Anwendung dünner Platindrähte sich rasch bildet. Die Oberfläche der Electrode ist nach einigem Gebrauch in feine Spitzen und Haare aufgelockert, wie man es besonders deutlich bei dem schwer flüchtigem Aluminium beobachtet. Als aber Hittorf die Ströme seiner Batterie ohne eingeschaltete Widerstände durch ein mit Stickstoff oder Wasserstoff von etwa 50 mm Druck gefülltes Vacuumrohr schickte, wurden beide Iridiumelectroden weissglühend, ja begannen zu schmelzen, und gleichzeitig verschwand das Glimmlicht auf der Kathode und mit ihm der Metallabsatz. Danach scheint es mir nothwendig, den in normalen Fällen gebildeten Metallspiegel nicht einer durch die hohe Temperatur des Glimmlichtes bedingten oberflächlichen Verdampfung zuzuschreiben, sondern einer besonderen Einwirkung des Glimmlichtes. Für eine solche spricht auch eine Beobachtung von Dewar, dass ein bei Magnesiumelectroden gebildeter Metallbeschlag einige Zeit nach der Stromunterbrechung wieder verschwunden war; vielleicht besitzen die Gastheilchen, während sie die Glimmentladung leiten, grössere Affinitäten und bilden Verbindungen mit dem Metall der Kathode, die unter Umständen allmählich von der Electrode resorbirt werden können. Aehnliches fanden Warren de la Rue und H. Müller für Palladiumelectroden in Wasserstoffröhren. Unter den Versuchsbedingungen dagegen, wo beide Electroden auf intensive Weissgluth und sogar bis zur Schmelztemperatur erhitzt werden, senden beide Metalldämpfe aus, wie es in grösserem Umfange bei Bogenlicht zwischen Metallelectroden auftritt.

Dass für diese letztere Entladungsart die Verdampfung der Electroden sowohl in Luft, wie auch anderen Gasen und im leeren Raume eintritt, ist schon lange bekannt. Die hohe Temperatur der Electroden ist die Hauptursache ihrer Abnutzung, und nur in zweiter Linie wird durch die Verbrennungsprocesse der Verbrauch grösser. In Luft wird infolge ihrer höheren Temperatur die Anode schneller auf-

gebraucht, als die Kathode, und ferner werden die Electroden um so schneller zerstäubt, je leichter sie verdampfbar sind.

Etwas complicirter ist der Vorgang bei Kohlenlicht. Bei sehr kräftigen Strömen (400—500 Bunsen'sche Elemente) wird nach Despretz[1]) der Kohlenstoff der Electroden in Dampf verwandelt, an der Oberfläche der Kohlen sieht man einzelne zusammengeschmolzene rundliche Körner. Bei schwächeren Strömen, wie man sie gegenwärtig zur electrischen Beleuchtung benutzt, kann von einer Verdampfung der Electroden keine Rede sein. Wie schon bemerkt, enthalten alle derartigen Kohlen Kohlenwasserstoffe; bei der hohen Temperatur werden diese zersetzt und lassen die Electrode als poröses Kohlenstoffgefüge zurück, das allmählich abgebröckelt wird. In meinem Fig. 4 abgebildeten Apparat fand ich dem entsprechend zahlreiche grössere Kohlentheilchen in den feinen Beschlag der Glaswände eingebettet, der sich in Salpetersäure leicht löst und daher nicht aus reinem Kohlenstoff, sondern Verbindungen desselben bestehen muss.

Da ferner im Vacuum keine Temperaturverschiedenheit zwischen beiden Electroden mehr zu constatiren war, wird dann auch der Verlust an beiden gleich sein, natürlich abgesehen von Ungleichheiten in der Porosität und Zusammensetzung der Kohlen.

Fassen wir die bisher erhaltenen Resultate noch einmal kurz zusammen: Es gibt kein unbedingt sicheres Kennzeichen dafür, ob man eine gegebene Entladung als Glimmentladung oder Bogenentladung anzusehen hat, sondern es existirt zwischen den so sehr verschiedenen typischen Fällen beider Formen ein stetiger Uebergang.

Ehe ich zu den mit dem ersten Theile innig verwachsenen Betrachtungen des zweiten übergehe, möchte ich in § 5 eine Beobachtung mittheilen, die mir nicht ohne Interesse erscheint.

§ 5. Ueber Aenderungen des Druckes im Bogenlicht. — Nach Warren de la Rue und H. Müller[2]) soll bei Stromesschluss im Bogenlicht eine Druckvermehrung ein-

1) Despretz, Compt. rend. **28.** p. 757. 1849; **29.** p. 48. u. 709. 1849.

2) Warren de la Rue u. H. Müller, Phil. Trans. **171.** p. 65. 1879; Proc. of the Lond. Roy. Soc. **29.** p. 286. 1879.

treten, die unmittelbar mit der Stromesunterbrechung wieder verschwindet. Nach ihren Angaben belief sich die Drucksteigerung bei einem ursprünglichen Drucke von $1^1/_2$ bis 28 mm auf 25 bis 50 Proc. Indessen waren Zweifel an der Existenz der Erscheinung berechtigt, da die Versuche[1]) es kaum für möglich erscheinen lassen, dass die Verfasser mit normalem Bogenlicht operirt haben. Durch Zufall habe ich indessen Gelegenheit gehabt, ein Phänomen zu beobachten, das mir in der That dafür zu sprechen scheint, dass die Entladung eine momentane Drucksteigerung hervorruft. Ich hatte in den Fig. 4 dargestellten Apparat Wasserstoff eingeleitet, sodass der Druck sich auf etwa 50 mm belief; sobald ich dann durch Heben des Quecksilbers Contact zwischen beiden Kohlen hergestellt hatte, bildete sich der Bogen, das Quecksilberniveau sank und mit ihm die untere Kohle, bis die Länge des Bogens 3 cm betrug. Fig. 5 möge bei dieser Länge das Aussehen des Bogens andeuten. Der Kern desselben ist von einer helmförmigen, stark leuchtenden Hülle umgeben, um welche sich wieder eine lichtschwächere Schicht lagert. Da plötzlich ging die untere Kohle wieder in die Höhe bis zum Contact mit der oberen, und das Spiel begann von neuem. Während einer Minute wiederholte sich die Erscheinung etwa 50 mal. Offenbar war eine Druckzunahme eingetreten, die den Abstand der Kohlen derartig vergrösserte, dass der Bogen erlosch; sofort aber ging der Druck auf seine frühere Grösse zurück, die Kohlen kamen zur Berührung etc. Sehr gut würde sich diese Erscheinung aus der Hypothese von A. Schuster[2]) erklären, wonach der Vorgang der Electricitätsleitung in Gasen dadurch zu Stande kommen soll, dass die Molecüle dissociirt werden, dass aber, sobald der electrische Strom unterbrochen wird, der alte Zustand des Gases sich wieder herstellt.

II. Theil.

Das Endresultat des ersten Theiles unserer Untersuchung war, dass Bogenentladung und Glimmentladung nicht scharf

1) S. Goldstein's Kritik in den Fortschritten der Physik im Jahre 1880, p. 858.

2) Schuster, Proc. of the Lond. Roy. Soc. **37.** p. 317. 1884.

unterschieden werden dürfen, dass insbesondere auch der im allgemeinen ausserordentlich grosse Unterschied im Widerstand der Gasstrecke nicht immer vorhanden ist. Ich möchte in diesem zweiten Theile den Versuch machen, zu zeigen, wodurch die verschiedene Grösse des Widerstandes bedingt ist, und dass dieselbe Ursache im Spiele ist in allen Fällen der Gasentladung, in welchem der Widerstand des Gases klein ist. Ich halte es für das Zweckmässigste, wenn ich gleich von vornherein meine Ansicht darlege und sie sodann in den einzelnen Fällen (§ 6—11) als richtig nachweise.

Sobald bei einer Gasentladung der Widerstand des Gases gering ist, sind heisse Metalldämpfe zugegen, die die Leitung übernehmen.

§ 6. Zunächst möchte ich an einige Versuche erinnern, welche zeigen, dass glühende Metalldämpfe unvergleichlich besser leiten als Stickstoff, Wasserstoff oder Luft.

De la Rive[1]) benutzte zu dem Zwecke ein kugelförmiges Gefäss mit vier Tubulaturen; zwei einander gegenüberliegende dienten als Electroden einer Inductionsrolle, die beiden anderen zur Erzeugung von Bogenlicht; der Druck des Stickstoffes betrug 2—3 mm. Zunächst wurde durch ein in den Stromkreis des Inductionsstromes eingeschaltetes Galvanometer die Stromstärke gemessen, ohne dass der Volta'sche Bogen hergestellt war. Sodann wurde das Bogenlicht hervorgerufen und die neue Stromstärke abgelesen.

Es ergab sich dann ein starkes Anwachsen des Leitungsvermögens, als der Bogen zwischen Silber- und Kupferelectroden überging; weniger gross war die Aenderung bei Aluminiumelectroden, am schwächsten bei Zink-, Cadmium-, Magnesiumpolen. Besonders merklich war die Zunahme des Leitungsvermögens bei Kohlenlicht. Dagegen ergaben Eisen und Platinelectroden keine merkliche Aenderung, woraus hervorgeht, dass die Zunahme des Leitungsvermögens in den übrigen Fällen nicht von der höheren Temperatur des Stick-

1) de la Rive, Phil. Mag. (4) **29.** p. 553. 1865; Compt. rend. **60.** p. 1002. 1865.

stoffes bedingt sein kann. Der Versuch ist aber insofern sehr ungünstig und gestattet keinen Schluss auf das wahre Leitungsvermögen der verschiedenen Metalldämpfe, weil, wie Hittorf's Arbeiten zur Genüge gezeigt haben, der Hauptwiderstand der Glimmentladung in der Umgebung der Kathode sich befindet, und bei der grossen Entfernung der Electroden in de la Rive's Versuch die Bildung von Metalldämpfen ausschliesslich im Bereich des positiven Büschellichtes geschieht. Ausserdem ist zu bedenken, dass bei derartiger Versuchsanordnung es nicht allein darauf ankommt, was für Metalldämpfe zugegen sind, sondern zweifellos auch ihre Menge, dass ein leichter flüchtiges Metall daher eine weit bessere Leitung erzeugen kann, als ein weniger flüchtiges, obgleich das wahre Leitungsvermögen im ersten Falle weit schlechter sein kann als im zweiten.

Als zweiten Beleg für das relativ gute Leitungsvermögen heisser Metalldämpfe möchte ich einige Beobachtungen von Hittorf[1]) anführen. „Bei den Temperaturen unserer Flammen, für welche die Gase derselben einen so bedeutenden electrischen Widerstand besitzen, haben andere Dämpfe ein viel grösseres Leitungsvermögen. Von allen Gasen leitet am besten der Dampf des Kaliums. Nach demselben folgt das Natrium. Die übrigen Metalle, soweit sie hier flüchtig sind, verändern im gasförmigen Zustande wenig die Ablenkung." An einer anderen Stelle zeigte Hittorf, dass in der nichtleuchtenden Bunsen'schen Flamme Quecksilberdampf weit schlechter leitet als Kaliumdampf. Dass im Bunsen'schen Brenner die meisten Metalle noch keine merkliche Aenderung des Widerstandes hervorrufen, hat wohl den Grund, dass diese Temperatur zu reichlicher Dampfentwickelung nicht genügt.

Nach diesen Vorbemerkungen will ich nun dazu übergehen, in den einzelnen Fällen, wo Gasstrecken relativ geringen Widerstand besitzen, das Vorhandensein glühender Metalldämpfe und ihren Einfluss nachzuweisen.

§ 7. Was zunächst das Bogenlicht bei Metallelectroden anlangt, ist es allgemein bekannt, dass die Farbe des Lichtes

1) Hittorf, Pogg. Ann. **136.** p. 229. 1869.

wesentlich variirt mit der Art des verwendeten Metalles, dass im Spectrum des Bogens die betreffenden Metalllinien sehr scharf hervortreten. Nach Casselmann[1]) ist der Lichtbogen für verschiedene Metalle verschieden lang, und zwar soll er um so grösser sein, je leichter dieselben verdampfen. In folgende Reihe ordnete er die Metalle an: Ka, Na, Zn, Hg, Fe, Sn, Pb, Sb, Bi, Cu, Ag, Au, Pt, sodass Kalium den grössten, Platin den kleinsten Bogen liefert. Wie schon bemerkt, kommen wesentlich zwei Factoren in Betracht, das wahre Leitungsvermögen der Dämpfe und die Menge, in der sie gebildet werden; da ferner das Leitungsvermögen in hohem Maasse von der Temperatur abhängt, ist es nicht zu verwundern, dass die Versuche Hittorf's in der Bunsenflamme und Casselmann's im Bogenlicht verschiedene Resultate ergeben haben.

§ 8. Weniger leicht zu übersehen sind die Verhältnisse im electrischen Kohlenlicht. Dass auch hier Metalldämpfe, die man in den Bogen bringt, die Leitungsfähigkeit erhöhen, ist nach Obigem selbstverständlich, und brauche ich wohl blos auf einige Angaben von Casselmann zu verweisen. Danach erhält man einen grösseren Lichtbogen zwischen Kohlen, die mit Metallsalzen getränkt sind, als zwischen den Kohlen, wie man sie im Handel bezieht.

Dass aber auch in den Kohlen, wie sie jetzt in so grosser Zahl für electrische Bogenlichter benutzt werden, Metallverbindungen in reichlichem Maasse vorhanden sind, lässt sich mit geringer Mühe zeigen. Wie allgemein bekannt, zeigen sich im Spectrum des Kohlenbogens eine Menge heller Linien, die besonders deutlich werden im Moment der Stromesunterbrechung, wo das continuirliche Spectrum der weissglühenden Kohlentheilchen verblasst. Besonders deutlich ist die Natriumlinie; ausserdem beobachtet man stets Linien von Calcium, Eisen und Magnesium. Das Ergebniss ist stets das gleiche, aus welcher Fabrik auch die Kohlen bezogen sind, und bietet es vielleicht einiges Interesse, damit die verschiedenen Ansichten über die Herstellung guter Kohlen zusam-

1) Casselmann, Pogg. Ann. 63. p. 576. 1844.

menzustellen. Nach Carré[1]) werden gute Kohlen dadurch gewonnen, dass man Kienruss und gepulverte Steinkohle innig gemischt comprimirt und stark glüht nach einem Zusatz von Eisen, Antimon oder Zinn, oder dass man die Kohlen längere Zeit in Metallsalzlösungen kocht. Aehnlich verfahren Archereau und Gauduin. Ganz entgegengesetzt verfährt Jacquelain[2]), indem er alle Mineralbestandtheile der Kohlen durch Glühen in einem Chlorstrome, durch Behandlung mit geschmolzener Potasche oder durch Eintauchen in Fluorwasserstoffsäure zu entfernen sucht. Wie jedoch Liveing und Dewar[3]) gezeigt haben, gelingt es nach diesen Methoden durchaus nicht, Eisen, Magnesium, Natrium und Calcium völlig zu entfernen.

§ 9. Während electrische Entladungen in Luft, Wasserstoff, Stickstoff, Kohlensäure grosse electromotorische Kräfte erfordern, weil sie einen sehr hohen Widerstand zu überwinden haben, gelingt es bei Gegenwart der gutleitenden Metalldämpfe mit verhältnissmässig wenig Elementen sogar Bogenentladung zu erreichen. So erhielt Hittorf[4]) bei Cylindern von Retortenkohle, deren Enden in einem Abstande von 3—4 mm in eine Bunsen'sche Flamme mit Kaliumsalzperle tauchten, Bogenlicht mit 80 seiner Elemente, ohne dass es nöthig war, vorher Contact zwischen den Kohlen herzustellen. Dabei war es ganz unwesentlich, ob beide Spitzen oder nur die Kathode sich im Kaliumdampf befand, weil wie bei der Glimmentladung in verdünnten Gasen auch in den reinen Flammengasen die Umgebung der Kathode einen weit grösseren Widerstand darbietet.

Ferner beobachtete Gassiot bei Anwendung einer Säule von 400 Grove'schen Elementen beim Stromschluss, dass zunächst die Entladung zwischen Coaks- oder Metallkugeln discontinuirlich war, sehr schnell aber in die continuirliche

---

1) Carré, Compt. rend **84.** p. 346. 1877.

2) Jacquelain, Compt. rend. **94.** p. 873. 1882.

3) Liveing und Dewar, Proc. of the Lond. Roy. Soc. **30.** p. 155. 1880; **33.** p. 406. 1882.

4) Hittorf, Pogg. Ann. Jubelband. p. 440 u. f. 1874.

Bogenentladung überging, jedenfalls, weil durch den überspringenden Funken Metalldampf sich gebildet hatte, welcher durch seinen geringen Widerstand einen stetigen Strom von grosser Intensität entstehen liess.

Bekannt ist endlich der Kunstgriff von Herschel, die Bogenentladung, statt durch Berührung der Electroden, durch einen Funken einzuleiten, den man zwischen ihnen überspringen lässt.

§ 10. Schon an einer früheren Stelle habe ich Veranlassung gehabt, Beobachtungen von Hittorf[1]) anzuführen, nach welchen er in Stickstoff von 53 mm Druck mit seiner Batterie von 1600 Elementen Ströme von bedeutender Grösse erhalten hatte. Es war die beträchtliche Abnahme des Widerstandes der Gasstrecke, wie ich schon hervorhob, von intensiver Weissgluth der Electroden begleitet, sodass man wohl auch hier die reichliche Bildung von Metalldämpfen als die Ursache der Erscheinung ansehen kann. Noch viel deutlicher zeigt sich der Einfluss der Weissgluth der Electroden in späteren Versuchen von Hittorf[2]) und Goldstein[3]), welche bei sehr geringem Gasdruck angestellt sind. Jene älteren Beobachtungen zeigen nämlich die Widerstandsabnahme nicht so eclatant, weil allerdings durch den gebildeten Metalldampf der Widerstand an der Kathode ausserordentlich verringert wird, durch den höheren Gasdruck aber der Widerstand des positiven Lichtes wächst.

Erwärmt man aber in stark verdünnten Gasen die Kathode durch geeignete Mittel bis zur Verdampfung, so wird man selbst mit geringen electromotorischen Kräften relativ grosse Stromstärken erzielen. In der That haben Hittorf und Goldstein diese Erscheinungen beobachtet; von ihren Resultaten will ich nur das eine anführen, dass bei einem Electrodenabstand von 6 cm ein kleines Element bei möglichst weit getriebener Verdünnung und starkem Weissglühen der Kathode einen stetigen Strom lieferte.

---

1) Hittorf, Wied. Ann. **21.** p. 111 u. f. 1884.
2) Hittorf, Wied. Ann. **21.** p. 133 u. f. 1884.
3) Goldstein, Wied. Ann. **24.** p. 81 u. f. 1885.

§ 11. Warren de la Rue und H. Müller[1]) haben in einer umfangreichen Untersuchung zeigen wollen, dass allein durch die Aenderungen der Gasdichte Glimmentladung und Bogenentladung ineinander übergehen. Ich möchte auch hier unter Hinweisung auf die Kritik von Goldstein[2]) meinen Zweifel wiederholen, ob die Verfasser thatsächlich Bogenlicht gehabt haben; es ist ihre Behauptung auch in directem Widerspruch mit der schon vorher erörterten Beobachtung Gassiot's über den Uebergang der Glimmentladung in die Bogenentladung bei ungeändertem Drucke. Auch nach den vorstehenden Entwickelungen ist der Druck von wenig Belang, sondern es kommt vor allem darauf an, ob glühende Metalldämpfe den Raum zwischen den Electroden erfüllen oder gewöhnliche Gase. Ich habe ferner bei meinen Versuchen Gelegenheit gehabt, den Uebergang einer Bogenentladung in eine Glimmentladung zu beobachten, der sich leicht aus demselben Princip erklärt. Verlängerte ich nämlich bei einem Drucke von 10 mm den Bogen in dem Fig. 4 gezeichneten Apparat, bis der Widerstand sich bis zum Erlöschen desselben steigerte, so trat unmittelbar vorher an der Anode eine etwa 1 mm dicke, 10 mm lange Schicht blauen Glimmlichtes auf, das nach wenigen Secunden mit dem Licht zwischen den Kohlen verschwand. Während also der Widerstand zu gross wurde, als dass die Bogenentladung fortbestehen konnte, reichte das Leitungsvermögen der noch glühenden Metalldämpfe noch kurze Zeit hin, einen weit schwächeren Strom unter Glimmlichterscheinung zu ermöglichen.

§ 12. In diesem Schlussparagraphen möchte ich einige Bemerkungen über das Leuchten der Gase und Dämpfe machen, die sich an einige schon mehrmals angeführte Versuche von Hittorf anknüpfen. Kamen bei electrischen Glimmentladungen die Electroden auf intensive Weissgluth, so verschwand jedesmal das blaue Glimmlicht. Aus diesen,

---

1) Warren de la Rue und H. Müller, Phil. Trans. 171. p. 65. 1879.

2) Goldstein, Fortschritte der Physik im Jahre 1880. p. 858.

sowie früheren Beobachtungen von Hittorf[1]) und W. Sie mens[2]) über das Leuchten der Flammen, ergibt sich, das bis zur Temperatur des schmelzenden Iridiums Gase kei merkliches Emissionsvermögen besitzen, wenn sie nicht i chemischen Processen oder electrischen Entladunge begriffen sind. Das Aufhören des Leuchtens bei Weissglut der Electroden kann man vielleicht dadurch erklären, das die heissen Metalldämpfe die Leitung übernehmen, und nu ein verschwindender Bruchtheil des Stromes durch den Was serstoff oder Stickstoff geht, der nicht genügt, sie zun Leuchten zu bringen. Die Bedingungen, unter denen Metall dämpfe Licht aussenden, mögen ganz anderer Art sein, al die für die gewöhnlichen Gase gültigen. Dass wenigsten Quecksilberdampf in Vacuumröhren, aus denen jede Spu anderer Gase vertrieben ist, wesentlich verschiedene, un zwar einfachere Erscheinungen darbietet, haben die Unter suchungen von Schuster[3]) gezeigt, wonach die electrisch Entladung dann ohne Glimmlicht, dunklen Raum und Schich tung geschieht. Ob die Erklärung Schuster's, dass de Grund in der einfacheren Constitution des Quecksilbe dampfes liegt, richtig ist, oder ob nicht Metalldämpfe übe haupt diese einfache Entladungsart zeigen, scheint mir eine näheren Untersuchung werth. Da ich selbst bei 3 cm lange Bogen stets eine ungeschichtete, zusammenhängende Lich masse den Zwischenraum zwischen den Electroden ausfülle sah, scheint mir sogar die zweite Möglichkeit glaubwürdige

Physik. Inst. der Univ. Strassburg i./E.

---

1) Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 587—591. 1879.
2) W. Siemens, Wied. Ann. 18. p. 311. 1883.
3) Schuster, Proc. of the Lond. Roy. Soc. 37. p. 317. 1884.

III. *Ueber die Gültigkeit des Joule'schen Gesetzes für Electrolyte; von Hans Jahn.*

(Hierzu Taf. I Fig. 6 u. 7.)

Um bei den durch den galvanischen Strom in einem Electrolyten hervorgerufenen Wärmeerscheinungen den auf die chemischen Leistungen entfallenden Antheil bestimmen zu können, muss man vor allen Dingen die durch die übrigen Arbeitsleistungen des Stromes entwickelten Wärmemengen kennen.

Zwar ist das Joule'sche Gesetz, dessen Gültigkeit für Leiter erster Ordnung keinem Zweifel unterliegt, von Joule selbst und von E. Becquerel[1]) auch für Leiter zweiter Ordnung als annähernd zutreffend befunden worden. Ebenso haben F. Kohlrausch und W. A. Nippoldt, sowie Cohn, die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für Electrolyte bei Ausschluss der Polarisation nachgewiesen, woraus nach den theoretischen Ableitungen von William Thomson und R. Clausius das Joule'sche Gesetz folgt, vorausgesetzt, dass der Strom ausser der Ueberwindung des Leitungswiderstandes keine weitere Arbeit leistet.

Bei vollständigem Ausschluss chemischer Arbeit könnten für etwaige Arbeitsleistungen des Stromes in Electrolyten nur noch der Transport der Ionen, sowie der unzersetzten Flüssigkeit in Betracht kommen. Die diesbezüglichen Arbeitsleistungen können aber nach Hittorf und Clausius nur minimale sein, und somit würde die Uebertragung des Joule'schen Gesetzes auf Electrolyte keinem theoretischen Bedenken unterliegen. Nichtsdestoweniger schien es nicht überflüssig, das Gesetz einer neuerlichen experimentellen Prüfung für Electrolyte zu unterziehen, da die von den oben genannten Forschern zu diesem Zweck benutzten Methoden nicht den Grad von Genauigkeit ermöglichen, welcher sich mit den modernen Hülfsmitteln unschwer erzielen lässt.

Bezüglich der Methode für die Wärmebestimmungen

1) Wiedemann, Electricität 2. p. 412.

konnte die Wahl nicht zweifelhaft sein, da das Eiscalorimeter von Bunsen neben der leichten und bequemen Handhabung den Vortheil bietet, dass die Temperatur während des ganzen Versuches nahezu constant bleibt, sodass alle Fehlerquellen eliminirt werden, welche durch die Veränderlichkeit der specifischen Wärme des Wassers, des Widerstandes und der Stromintensität mit der Temperatur bedingt sein können. Für die Bestimmung der electrischen Grössen ferner musste eine Methode gewählt werden, welche genaue und schnelle Messungen gestattete, ohne dass durch Oeffnen des Stromkreises die Vorgänge in demselben irgend welche Veränderung erlitten. Diesen Bedingungen schien eine Methode zu genügen, deren Princip neuerdings vielfach zu Messungen an Glüh- und Bogenlampen Anwendung gefunden hat.

Die Methode.

In dem nebenstehenden Diagramm bezeichnet *I* einen Stromkreis, in welchen die Batterie *K* und der Widerstand *z* eingeschaltet ist.

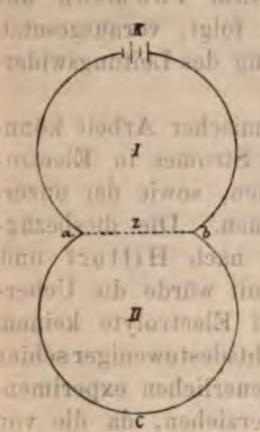


Fig. 1.

Von diesem Stromkreis zweigt sich bei *a* und *b* der Stromkreis *II* ab. Der Widerstand in dem Zweig *ab* sei *r*, in dem Zweig (*a c b*) *R*, während die Stromintensität in dem Zweig (*a K b*) mit *J*, in dem Zweig *ab* mit *J'* und in dem Zweig (*a c b*) mit *i* bezeichnet werden möge. Bedeutet endlich *p* die electromotorische Kraft der in dem Zweig *ab* etwa vorhandenen Polarisation, so ist nach dem zweiten Kirchhoff'schen Stromverzweigungsgesetz:

$$p = -J'r + iR \quad \text{oder} \quad J'r + p = iR,$$

und für den Fall, dass in dem Zweige *ab* keine Polarisation vorhanden ist:

$$J'r = iR.$$

Das erste Kirchhoff'sche Gesetz ergibt ferner für den Verzweigungspunkt *a* die Beziehung:

$$J - J' - i = o.$$

Trägt man nun durch Einschaltung eines hinreichend grossen Widerstandes in die Leitung II dafür Sorge, dass i im Vergleich zu J und J' verschwindend klein werde, so ist:

$$J = J'$$

und mithin im ersten Falle:

$$Jr + p = iR, \tag{1}$$

im zweiten:

$$Jr = iR. \tag{1_a}$$

Die Potentialdifferenz iR lässt sich durch Ablesung eines Galvanometers im Stromkreis II bestimmen, ebenso die Stromintensität J in dem Zweige ab durch Ablesung eines Galvanometers in dem Stromkreis I, sodass also, wenn man von der Polarisation zunächst absieht, sämmtliche für die vorliegende Untersuchung in Betracht kommenden electrischen Grössen bekannt sind.

Die Anordnung des Apparates macht das beistehende Diagramm verständlich.



Fig. 2.

K bezeichnet die galvanische Batterie, ferner seien T und G Galvanometer, z die Zersetzungszelle oder ein Draht im Eiscalorimeter, α bis η Quecksilbernäpfchen, R ein sehr grosser Widerstand und Cl ein Normalelement.

Ist α mit δ, β mit ε verbunden, so geht der Hauptstrom durch z und ein sehr schwacher Nebenstrom durch die Leitung II. Zum Zweck der Aichung des Galvanometers T löst man die Verbindung der Drähte 1 und 2 bei a und b und überbrückt α und β durch einen bekannten Widerstand.

Bei der Aichung des Galvanometers G wird die Verbindung $\alpha\delta$ und $\beta\varepsilon$ aufgehoben, und durch die Verbindung $\gamma\delta$ einerseits, $\varepsilon\eta$ andererseits das Normalelement Cl eingeschaltet.

Als Stromgeber wurden, je nach Bedürfniss, ein oder mehrere Bunsen'sche Elemente benutzt.

Das Eiscalorimeter wurde im wesentlichen in der von Schuller und Wartha, sowie von v. Than vorgeschlagenen Anordnung verwendet. Das Calorimeter befand sich in einem mit destillirtem Wasser gefüllten Blechgefäss, an dessen Wänden ein Eiscylinder gebildet war, und welches seinerseits in einem geräumigen, mit Filz überzogenen und mit Eis gefüllten Holzbottich stand. Das spontane Abschmelzen des Eises im Calorimeter wurde durch regelmässige Wägungen des eingesaugten Quecksilbers vor dem Schliessen des Stromes und nach dem Wärmeausgleich controlirt. Um das Calorimeter unter constantem Druck zu erhalten, war an dem abwärts gerichteten Schenkel der Capillare ein fein zugespitzter Eisenstift befestigt, welcher stets in Contact mit dem Quecksilberniveau in dem Glaseimerchen gehalten wurde. Das letztere befand sich auf einem mittelst einer Schraube leicht auf und ab bewegbaren Stativ. Die zu dem Calorimeter führenden Drähte 1 und 2 waren, um Wärmeleitungen von Aussen her zu vermeiden, einmal an der inneren Wand des Eisbottichs herumgeführt. Dieselben waren also stets von einer bedeutenden Eismasse umgeben, sodass eine Wärmeleitung bis zum Calorimeter hin nicht zu befürchten war. Der Gesammtwiderstand dieser Drähte, auf den ich später noch einmal zurückkommen werde, möge im Folgenden mit ϱ bezeichnet werden.

Bei den Punkten a und b zweigten die Drähte C und D ab, welche zu den Quecksilbernäpfchen α und β führten. Diese Drähte waren stark genug gewählt, um, wie durch eigene Versuche erwiesen wurde, ihren Widerstand gegenüber dem des Stromkreises II vernachlässigen zu können.

Der in die Leitung *II* eingeschaltete Widerstand R bestand aus einem mit nahezu gesättigter Zinksulfatlösung gefülltem Thermometerrohr, in dessen rechtwinklig aufwärts gebogene Erweiterungen zwei amalgamirte Zinkstäbchen eintauchten. Die ganze Vorrichtung wurde, um schädliche Temperaturänderungen während der Dauer eines Versuches zu vermeiden, in ein geräumiges, mit Wasser gefülltes Gefäss

getaucht. Eine approximative Bestimmung des Widerstandes dieser Vorrichtung mit Hülfe der Wheatstone'schen Brücke ergab: 200 000 S.-E.

Für grössere Widerstände im Calorimeter wurde der Widerstand R nach Bedarf auf 400 000 S.-E. erhöht. Dieser Widerstand erfüllte vollkommen den angestrebten Zweck, die Vorgänge in der Leitung I von der Leitung II unabhängig zu machen. Das in die Leitung I eingeschaltete Galvanometer T zeigte keine merkliche Aenderung der Stromintensität, je nachdem die Leitung II ein- oder ausgeschaltet war.

Das Galvanometer T hatte eine kurze, dicke Leitung, die des Galvanometers G dagegen bestand aus langen dünnen Drahtwindungen. Die Dämpfung der beiden Galvanometer war so stark, dass die Magnete nach wenigen Secunden ihre Ruhelagen erreichten. Die Ablesung der Galvanometer geschah mittelst Spiegel und Fernrohr. Um Störungen durch Erschütterungen auszuschliessen, waren die Galvanometer auf in die Mauer eingelassene Marmorsockel gestellt, und zwar war die Entfernung zwischen denselben genügend gross, um, wie durch einige Versuche ermittelt wurde, jeden störenden Einfluss der beiden Instrumente auf einander unmöglich zu machen. Das Fernrohr, dessen Stativ gleichfalls auf einer soliden Steinunterlage ruhte, war so gestellt, dass sich der Spiegel des einen Galvanometers in der Verlängerung seiner Axe befand, der des zweiten dagegen senkrecht darauf. Vor dem Objectiv des Fernrohres befand sich ein Reflexionsprisma, welches die eine Hälfte des Objectives bedeckte, sodass die Bilder der beiden sich rechtwinklig kreuzenden Scalen in dem Gesichtsfeld übereinander erschienen. Auf dem das Fernrohr tragenden Stativ waren zwei Stromwender angebracht, sodass die Ablenkung auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage durch Umlegen des Stromes in den Galvanometern beobachtet werden konnte. Neben dem einen Stromwender befand sich ein Stromunterbrecher, damit ein Beobachter leicht nach dem Schliessen und Oeffnen des Stromes die Galvanometerablesungen ausführen konnte. Die Galvanometer einerseits und das Calorimeter andererseits befanden sich in benachbarten, getrennten Räumen.

Aichung der Apparate.

Zur Aichung des Galvanometers G wurde in der oben erläuterten Weise nach Trennung der Leitung I von der Leitung II in die letztere das Normalelement Cl eingeschaltet. Vorausgesetzt, die Ablenkung des Magnets im Galvanometer G hätte unter dem Einfluss des Normalelementes ϑ^0 betragen, bei dem eigentlichen Versuche dagegen φ^0, so ist:

$$iR : Cl = \operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\vartheta, \qquad \text{mithin:}$$

$$iR = Cl\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\vartheta}, \tag{2}$$

wenn Cl die als bekannt vorausgesetzte, in Volt (Gramm, Centimeter, Secunde) ausgedrückte electromotorische Kraft des Normalelementes, iR, wie aus den Gleichungen (1) und (1_a) ersichtlich ist, die zwischen a und b herrschende Potentialdifferenz bezeichnet.

Als Normalelement wurde ein Clark'sches Element benutzt. Die electromotorische Kraft desselben ist durch die Versuche von Lord Rayleigh, sowie von v. Ettingshausen in vollkommen übereinstimmender Weise zu:

1,434, bez. 1,433 Volt

bei 15° bestimmt worden. Prof. v. Ettingshausen hatte die Freundlichkeit, unsere Normalelemente mit den seinigen electrometrisch zu vergleichen. Es ergaben sich für das Verhältniss der electromotorischen Kräfte unserer und der Ettingshausen'schen Elemente die Werthe:

Datum	$\frac{Cl}{E}$	Datum	$\frac{Cl}{E}$
3. Januar 1885. .	1,0004	7. Januar 1885. .	1,0008
4. " " . .	1,0007	8. " " . .	0,9993
5. " " . .	0,9998	9. " " . .	0,9993
6. " " . .	1,0010	also im Mittel . .	1,0002

Es konnte daher für die electromotorische Kraft des Normalelementes unbedenklich der obige Werth angenommen werden.

Angesichts des verhältnissmässig bedeutenden Temperaturcoëfficienten des Clark'schen Elementes war es nöthig, die Temperatur in Rechnung zu ziehen. Durch die Methode

des Gegeneinanderschaltens bestimmte ich den Temperaturcoëfficienten der beiden Normalelemente zwischen 10 und 30° C. zu: 0,053 09 Proc.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, dass beim Eintauchen der beiden gegeneinander geschalteten Elemente in dasselbe Bad keine merkliche Ablenkung des Galvanometers zu beobachten war, sodass die electromotorische Kraft derselben als gleich gross zu betrachten war. Um die Elemente vor allzubedeutenden Temperaturschwankungen während der Dauer eines Versuches zu schützen, wurden dieselben in eine kleine, mit Baumwolle ausgepolsterte Kiste gestellt, durch deren Deckel ein empfindliches Geissler'sches Thermometer geführt wurde. Um die Elemente schnell ausschalten und gegeneinander schalten zu können, ohne das Gehäuse zu öffnen, war auf dem Deckel desselben ein Umschalter mit Quecksilbernäpfchen angebracht.

Um die Stromintensität in Ampères aus der Ablesung am Galvanometer T zu erhalten, schaltet man anstatt der Zersetzungszelle z den bekannten Widerstand N ein und beobachtet beide Galvanometer. Dann ist:

$$J' N = i' R.$$

Hat man $i'R$ in Volts nach Gl. (2) bestimmt, so ist, wenn φ den Ablenkungswinkel am Galvanometer T bei dem eigentlichen Versuche, φ_1 bei Einschaltung des Widerstandes N bezeichnet:

$$J_{\text{Amp.}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1} \frac{i' R_{\text{Volt}}}{N_{\text{Ohm}}}.$$

Als Normalwiderstand wurde bei den zunächst zu besprechenden Versuchen mit Platindrähten ein mit Guttapercha überzogener Kupferdraht benutzt. Derselbe wurde, um seine Temperatur constant zu erhalten, in eine mit Eiswasser gefüllte Glasschale getaucht. Der Widerstand dieses Drahtes wurde durch Vergleich mit zwei Etalons bestimmt, und zwar mit einem Stöpselrheostaten von Siemens und Halske, welcher nach Versuchen des Hrn. Prof. v. Ettingshausen bei 20° C. richtige Siemenseinheiten enthielt, und einem von Hrn. v. Ettingshausen angefertigten und verglichenen Etalon. Die Temperatur wurde bei beiden Etalons berück-

sichtigt, und der Widerstand mit Hülfe des von Siemens und Halske angegebenen Temperaturcoëfficienten:

$$0{,}000\,329$$

reducirt. Die Bestimmung wurde in der Weise ausgeführt, dass der zu messende Widerstand N und der bekannte Widerstand Q nach Ausschaltung der Zersetzungszelle abwechselnd bei $\alpha - \beta$ eingeschaltet und die Galvanometer T und G abgelesen wurden, bezeichnet:

φ den Ablenkungswinkel im Galvanometer T } bei Einschaltung
ψ " " " " G } d. Widerstandes N
φ_1 " " " " T } bei Einschaltung
ψ_1 " " " " G } d. Widerstand. Q

so ist:

$$N = Q \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi_1}.$$

Die Beobachtungsresultate waren:

$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \psi$	$\operatorname{tg} \varphi_1$	$\operatorname{tg} \psi_1$	Q S.-E.	N S.-E.
0,049 427	0,009 067	0,046 08	0,012 084	1,0541	0,721 26
0,049 548	0,009 113	0,036 673	0,018 270	1,9659	0,725 66
0,050 255	0,017 495	0,050 555	0,017 036	0,6997	0,722 84
"	"	0,048 683	0,019 654	0,8397	0,724 08
0,047 440	0,016 271	0,047 743	0,015 823	0,6972	0,721 52
"	"	0,046 472	0,017 647	0,7968	0,719 68
				Mittel:	0,722 52

Die vier ersten Beobachtungen sind mit dem Ettingshausen'schen Etalon, die beiden letzten mit dem Siemens'schen Stöpselrheostaten ausgeführt.

Zur Reduction der Siemenseinheiten auf Ohm wurde der auch der oben angeführten Angabe über die electromotorische Kraft des Stromelementes zu Grunde liegende Werth:

$$1 \text{ S.-E.} = 0{,}942 \text{ Ohm}$$

von G. Wiedemann benutzt, mit dem sich die neueste Bestimmung von Wild[1]) in vollkommener Uebereinstimmung findet. Es ergibt sich demgemäss:

$$N = 0{,}6806 \text{ Ohm}.$$

1) Wild, Wied. Ann. 23. p. 665. 1884.

Zur Bestimmung des Widerstandes ϱ der beiden Zuleitungsdrähte 1 und 2 zum Calorimeter wurde eine alsbald näher zu beschreibende Vorrichtung benutzt. Die Beobachtungen ergaben:

$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \psi$	$\operatorname{tg} \varphi_1$	$\operatorname{tg} \psi_1$	$\frac{N}{\text{Ohm}}$	$\frac{\varrho}{\text{Ohm}}$
0,058 544	0,002 999	0,048 485	0,016 924	0,6806	0,099 88

Der Widerstand der Zuleitung wurde immer rund als

$$\varrho = 0{,}1 \text{ Ohm}$$

in Rechnung gebracht.

Als Wärmeeinheit fungirt bei allen folgenden Zahlen die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 0 und 100° C., und zwar wurde als Quecksilberwerth der so definirten Calorie der von Bunsen ermittelte Werth:

15,41 mg benutzt.

Versuche mit Leitern erster Ordnung.

Um die bisher erörterte Methode einer Prüfung zu unterziehen, wurden einige Versuche mit metallischen Leitern, und zwar mit Platindrähten ausgeführt.

Es waren bei der Beschaffenheit des Apparates vor allen Dingen Nebenschliessungen zu vermeiden, die durch eindringende Feuchtigkeit leicht hätten hergestellt werden können, da sich die Vorrichtung in Wasser und die Zuleitung unter Eis befinden musste. Diese Schwierigkeit wurde vollständig durch folgende Einrichtung behoben.

In Fig. 7 bezeichnen *AA* zwei enge Glasröhrchen, welche durch den doppelt durchbohrten Kautschukstopfen *F* und den dreifach durchbohrten Kork *E* geführt waren. Letzterer verschliesst das an beiden Enden offene Glasrohr *C*. In die beiden Glasröhren *AA* sind Kupferdrähte von 1 mm Durchmesser eingekittet, deren freie Enden in die Erweiterungen *B* hineinragen, während die unteren Enden mit den Enden des Platindrahtes *D* verlöthet sind. Letzterer ist spiralförmig auf das mit paraffinirtem Papier überzogene Glasröhrchen *C* gewickelt und mit einem paraffinirten Papierstreifen bedeckt. Zur vollständigen Isolirung wurde die ganze Vorrichtung in

geschmolzenes Paraffin getaucht, sodass sich eine gleichmässige, nicht zu starke Paraffindecke bildete. Die dritte Bohrung des Korkes E blieb offen, um eine vollkommen freie Circulation des im Calorimeter befindlichen Wassers um die Vorrichtung zu ermöglichen.

Die Erweiterungen B der beiden Glasröhren wurden mit Quecksilber gefüllt, und die Zuleitungsdrähte mittelst kleiner Kautschukringe in dieselben eingepresst. Der Stopfen F verschloss das Reagirglas des Calorimeters. Nachdem über die umgebogenen Zuleitungsdrähte das Bechergläschen G gestülpt war, wurde das Ganze mit Eis bedeckt.

Dieselbe Vorrichtung wurde auch benutzt, um den Widerstand der Zuleitungsdrähte zum Calorimeter zu bestimmen. Zu dem Ende hatte man nur das Paraffin von den Löthstellen zwischen Kupfer und Platin zu entfernen, und dieselben in ein in das Calorimeter gestelltes, mit Quecksilber gefülltes Gefäss zu tauchen.

Der Gang eines Versuches war folgender:

Nachdem man sich durch einige Wägungen in regelmässigen Intervallen von 30 Minuten von dem gleichmässigen Abschmelzen des Eises im Calorimeter überzeugt hatte, wurde der Strom auf den Secundenschlag einer gut gehenden Uhr geschlossen, und die Ablenkung der beiden Galvanometer in gleichen Zeitabständen von 5, resp. 10 Minuten ausgeführt. Während der Dauer eines Versuches, die je nach den Umständen eine halbe oder ganze Stunde betrug, wurde durch Einschaltung des Normalelementes in der oben beschriebenen Weise die Aichung des Galvanometers G zwei- bis dreimal ausgeführt. Die Unterbrechung des Stromes erfolgte mit möglichst grosser Präcision genau nach Ablauf der in Aussicht genommenen Versuchszeit. Zum Schluss wurde der Normalwiderstand nach Ausschaltung des in dem Calorimeter befindlichen Widerstandes eingeschaltet, um die nöthigen Daten für die Bestimmung der Stromintensität und des Widerstandes in absolutem Maasse zu gewinnen.

Die Stromintensität, sowie die electromotorische Kraft blieben bei diesen Versuchen nahezu constant. Die kleinen

Schwankungen, die hin und wieder eintraten, betrugen nie mehr als $^1/_4$ bis $^1/_2$ Proc. des mittleren Werthes.

Um von dem regelmässigen Gang des spontanen Eisschmelzens im Calorimeter ein Bild zu geben, mögen einige auf das Gerathewohl gewählte Beispiele ihren Platz finden. Es betrug die während 30 Minuten eingesaugte Quecksilbermenge:

Datum	Vor d. Schliessen des Stromes	Nach d. Wärmeausgleich
20. November 1884	0,0184 g	0,0187 g
22. " "	0,0212 "	0,0219 "
23. " "	0,0238 "	0,0235 "
26. " "	0,0250 "	0,0248 "
28. " "	0,0234 "	0,0235 "
9. December "	0,0243 "	0,0250 "

In den nachfolgenden Tabellen bezeichnet:

φ den Ablenkungswinkel im Galvanometer T,
ψ " " " " G,
φ_1 " " " " T } während der Einschaltung d. Normalwiderstandes
ψ_1 " " " " G }

Cl die electromotorische Kraft des Normalelementes für die beobachtete Temperatur.

ϑ den Ablenkungswinkel im Galvanometer G während der Einschaltung des Normalelementes,

iR die aus der Aichung des Galvanometers G berechnete electromotorische Kraft,

J die Stromintensität,

r den Widerstand des Versuchsobjectes (direct gefundener Widerstand vermindert um $\varrho = 0{,}1$ Ohm),

G das corrigirte Gewicht des während des Ausgleiches eingesaugten Quecksilbers.

W_h die G entsprechende Wärmemenge.

W_{sec} die während einer Secunde entwickelte Wärmemenge.

α die aus dem Joule'schen Gesetz:

$$W_{sec} = \alpha J^2 r,$$

berechnete Constante.

Versuch I. Versuchsdauer 30 Minuten.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,084 292	0,046 749	0,049 208	0,013 092	0,051 65	1,4382	1,3017	0,9175
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	1,3187	7,3944	479,85	0,26658	0,2401		

Versuch II. Versuchsdauer 30 Minuten.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,083 067	0,06025	0,046 496	0,016 251	0,067 775	1,4397	1,2798	0,90616
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	1,3124	7,1691	465,23	0,25846	0,2398		

Versuch III. Versuchsdauer 30 Minuten.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,039 919	0,028 903	0,048 551	0,016 825	0,067 350	1,4400	0,61797	0,43458
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	1,3220	1,6680	108,24	0,060 134	0,2414		

Versuch IV. Versuchsdauer 1 Stunde.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,040 087	0,029 11	0,048 700	0,016 982	0,067 46	1,4396	0,62121	0,43829
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	1,3173	3,3528	217,57	0,060 437	0,2388		

Versuch V. Versuchsdauer 1 Stunde.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,042 616	0,030 571	0,052 021	0,017 792	0,066 885	1,4404	0,65836	0,46119
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	1,3275	3,7883	245,83	0,068 287	0,2419		

Versuch VI. Versuchsdauer 1 Stunde.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,045 582	0,07449	0,050 255	0,017 495	0,06722	1,4394	1,5951	0,49925
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	3,0949	10,190	661,26	0,18368	0,2381		

Versuch VII. Versuchsdauer 1 Stunde.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,045 214	0,073 665	0,049 856	0,017 373	0,066 96	1,4396	1,5887	0,49770
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	3,0822	10,034	651,14	0,18087	0,2369		

Versuch VIII. Versuchsdauer 1 Stunde.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,048 988	0,080 681	0,049 666	0,017 406	0,067 47	1,4391	1,7209	0,53804
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	3,0984	11,857	769,37	0,21371	0,2382		

Versuch IX. Versuchsdauer 1 Stunde.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,044 808	0,074 355	0,044 905	0,015 888	0,068 265	1,4385	1,5668	0,49086
	r Ohm	G Gramm	W_h Calorien	W_{sec} Calorien	α		
	3,0921	9,9197	643,72	0,17881	0,2400		

Bei dem zuletzt angeführten Versuch war, um eine Controle für die richtige Aichung der beiden Galvanometer zu gewinnen, ein Silbervoltameter in den Stromkreis eingeschaltet. Die während einer Stunde ausgeschiedene Silbermenge betrug: 1,9667 g,

mithin die während einer Secunde ausgeschiedene Menge:

0,5463 mg.

Unter Zugrundelegung des von F. und W. Kohlrausch ermittelten Werthes für das electrochemische Aequivalent des Silbers: 1,1183 mg,

berechnet sich mithin die Stromintensität zu:

0,48851 Amp.,

also in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit der galvanometrisch ermittelten Stromintensität.

Die Resultate der Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestelt,

Stromintensität in Amp. J	Widerstand in Ohm r	Wärmemenge pro 1 Secunde W	$\frac{W}{J^2 r}$
0,91752	1,3187	0,266 58	0,2401
0,90616	1,3124	0,258 46	0,2398
0,43458	1,3220	0,060 134	0,2414
0,43829	1,3173	0,060 437	0,2388
0,46119	1,3275	0,068 287	0,2419
0,49925	3,0949	0,183 68	0,2381
0,49770	3,0822	0,180 87	0,2369
0,53804	3,0984	0,213 71	0,2382
0,49086	3,0921	0,178 81	0,2400
		Mittel	0,2395

Der Quotient:

$$\frac{W}{J^2 r} = \alpha$$

ist also in der That, wie das Joule'sche Gesetz verlangt, eine Constante, denn die Abweichungen der obigen Zahlen voneinander, sind wohl in Anbetracht dessen, dass das Endresultat durch die Vereinigung dreier mit unvermeidlichen Versuchsfehlern behafteter Daten gewonnen wird, minimale zu nennen. Jedenfalls beweisen die Resultate, dass die in Aussicht genommene Methode vollkommen brauchbar ist.

Eine weitere Controle lässt sich auf folgendem Wege gewinnen. Die obige Constante, multiplicirt mit der Intensität der Erdschwere, muss den reciproken Werth des mechanischen Aequivalentes der Wärmeeinheit geben.[1])

Nimmt man für die Erdschwere den Werth:

981,1 cm

1) Wiedemann, Electr. 2. p. 435.

an, so erhält man unter Benutzung des Mittelwerthes obiger Resultate für das mechanische Wärmeäquivalent den Werth:

426,56 kgm.

Dieser Werth ist mit den übrigen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes nicht unmittelbar vergleichbar, da ihm eine andere Wärmeeinheit zu Grunde liegt. Ich setzte, wie schon bemerkt, die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 0 und 100° gleich 1, während bei den übrigen Bestimmungen, namentlich den neuesten von H. F. Weber die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 15 und 18° C. als Wärmeeinheit fungirt. Nach den Versuchen von Velten[1]) entsprechen der letzteren Wärmeeinheit: 15,616 mg eingesaugten Quecksilbers, während der von mir angewendeten Calorie 15,471 mg entsprechen. Auf die gewöhnliche Calorie bezogen, beträgt also das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit nach meinen Bestimmungen:

$$426{,}56 \frac{15{,}616}{15{,}471} = 430{,}56 \text{ kgm.}$$

Sieht man von der älteren Angabe von Quintus Icilius ab, die, wie H. F. Weber hervorgehoben hat, wegen einer fehlerhaften Bestimmung des Normalwiderstandes ungenau ausgefallen ist, so befindet sich der obige Werth in vollkommener Uebereinstimmung mit den von den übrigen Beobachtern ermittelten Werthen.

Joule fand:

429,8 kgm,

und H. F. Weber gibt als Mittelwerth seiner sämmtlichen Bestimmungen: 428,14 kgm

an. Auch mit dem für ideale Gase berechneten Werthe:

428,95 kgm,

befindet sich der obige Werth in befriedigender Uebereinstimmung.

Jedenfalls haben die erwähnten Versuche die in Aussicht genommene Methode als vollkommen zuverlässig erwiesen.

1) Velten, Wied. Ann. 21. p. 57. 1884.

Versuche mit Electrolyten.

Dieselbe Methode wurde benutzt, um das Joule'sche Gesetz auch für Electrolyte zu prüfen, und zwar wurde die Untersuchung zunächst auf solche Fälle beschränkt, bei denen die Polarisation thunlichst ausgeschlossen war. Es wurden Lösungen von Kupfer- und von Zinksulfat verwendet, welche zwischen Electroden aus den betreffenden Metallen electrolysirt wurden. Die Electroden bestanden, um alle Zustandverschiedenheiten, die die Ergebnisse der Versuche hätten fraglich erscheinen lassen können, auszuschliessen, aus den electrolytisch abgeschiedenen Metallen. Die Anordnung des Apparates war ganz dieselbe wie bei den früheren Versuchen. Die Zersetzungszelle A (Fig. 6) bestand aus einer dünnwandigen, an dem einen Ende zugeschmolzenen Glasröhre, welche durch einen doppelt durchbohrten Kautschukstopfen verschlossen war. Durch die beiden Bohrungen desselben wurden die mit Guttapercha überzogenen Zuleitungsdrähte B geführt, deren Enden einerseits mit den Metallplatten C verlöthet waren, andererseits in die Erweiterungen der beiden Glasröhrchen D hineinragten. Diese Erweiterungen waren mit Quecksilber angefüllt, und in sie wurden in der schon früher erläuterten Weise die Zuleitungsdrähte eingeführt.

Um den Ausgleich der Concentration zwischen den einzelnen Schichten der electrolysirten Lösung thunlichst zu beschleunigen, wurde die Anode über der Kathode angebracht, sodass die an der ersteren entstehende concentrirtere Lösung hinabsinken musste. Trotz dieser Vorsicht waren kleine Schwankungen in der Stromintensität nicht zu vermeiden, die bei der ausnahmslos beobachteten relativen Constanz der electromotorischen Kraft auf den Umstand zurückzuführen sind, dass sich Strömungen von verschieden leitenden Lösungen bildeten. Um nun auf möglichst einfache und doch einwurfsfreie Weise die mittlere in der Zeiteinheit geleistete Arbeit bestimmen zu können, wurde für die Berechnung der Versuche folgender Weg eingeschlagen.

Die während des Zeittheilchens dt geleistete Arbeit kann bekanntlich dargestellt werden durch den Ausdruck:

$$dA = V.J.dt,$$

wenn V die electromotorische Kraft, J die Stromintensität bezeichnet. Es ist mithin die während der Zeit T geleistete Arbeit:

$$A = \int_0^T V J dt = V \int_0^T J dt,$$

da V, wie schon bemerkt, im wesentlichen constant blieb. Zur Ausführung der Integration:

$$\int_0^T J dt,$$

hätte man eigentlich: $J = f(t)$, unter Berücksichtigung sämmtlicher Beobachtungsdaten mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnen müssen. Um aber diese langwierige Rechnung zu umgehen, wurde das besagte Integral mit Hülfe der bekannten Simpson'schen Regel bestimmt. Es ist danach angenähert:

$$\int_0^T J dt = \tfrac{1}{3} \frac{T}{2n} \Big\{ J_0 + J_{2n} + 4(J_1 + J_3 + - + J_{2n-1}) + 2(J_2 + J_4 + - + J_{2n-1}) \Big\},$$

in welcher Formel $2n$ die um 1 verminderte ungerade Anzahl der in gleichen Zeitabständen ausgeführten Beobachtungen bezeichnet. Für J_0 ist die erste, wenige Secunden nach Schluss des Stromes gemachte Ablesung eingesetzt, was dadurch gerechtfertigt ist, dass infolge der geringen Polarisation die Abnahme der Stromintensität innerhalb der ersten Secunden nach dem Stromschluss eine geringe ist. Die in der Zeiteinheit geleistete mittlere Arbeit ist mithin:

$$A_1 = \frac{V}{T} \int_0^T J dt = V \bar{J},$$

wenn $\bar{J}$ die mittlere Stromintensität bezeichnet.

In dem gegebenen Falle ist aber:

$$J(r + \varrho) + p = iR, \quad \text{oder:} \quad Jr + p = iR - J\varrho,$$

mithin: $$dA = (JiR - J^2 \varrho)\, dt$$

die während des Zeittheilchens dt geleistete Arbeit, da:

$$iR - J\varrho$$

die Potentialdifferenz zwischen den beiden Electroden ist, ϱ bezeichnet in diesen Formeln den gesammten Widerstand der Drähte 1 und 2. Man erhält demnach für die in der Zeiteinheit geleistete mittlere Arbeit:

$$A_1 = \frac{1}{T}\int_0^T J i R\, dt - \frac{1}{T}\int_0^T J^2 \varrho\, dt = \frac{iR}{T}\int_0^T J\, dt - \frac{\varrho}{T}\int_0^T J^2\, dt$$

$$= \bar{J}\, iR - \frac{\varrho}{T}\int_0^T J^2\, dt.$$

Die Kleinheit des mit ϱ multiplicirten Gliedes einerseits, die Geringfügigkeit der Variationen der Stromintensität andererseits gestatten, wie durch eigene Controlrechnungen erhärtet wurde, zur Berechnung der Versuche:

$$A_1 = \bar{J}(iR - \bar{J}\varrho)$$

zu setzen, ohne der Genauigkeit der Resultate Abbruch zu thun. Ist nun:

$$\alpha = \frac{W_{sec}}{\bar{J}(iR - \bar{J}\varrho)}$$

constant, so muss auf die Anwendbarkeit des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie und die Gültigkeit des Joule'schen Gesetzes auch in diesem Falle geschlossen werden. Hierbei ist die Annahme gemacht, dass die gesammte im Electrolyten geleistete Stromarbeit in Wärme verwandelt wird, also nicht nur $J^2 r$, sondern auch der auf die Polarisation entfallende Antheil Jp. Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Annahme im vorliegenden Fall sollen später geliefert werden. Uebrigens kommt für die im Folgenden mitzutheilenden Versuche diese Arbeitsleistung wegen der Geringfügigkeit der vorhandenen Polarisation nur wenig in Betracht.

Der Gang der Versuche war ganz der oben beschriebene, nur wurden die Galvanometer alle 5 Minuten abgelesen, und die Stromintensität in ihrem Mittel durch die soeben besprochene angenäherte Integration erhalten. Uebrigens waren, wie schon bemerkt, die Schwankungen der Stromintensität

keine allzu bedeutenden und überschritten in keinem Falle 3–4 Proc. des mittleren Werthes.

In den nachfolgenden Tabellen haben die Bezeichnungen dieselbe Bedeutung wie in den früheren. N ist der zur Aichung des Galvanometers T benutzte Normalwiderstand. Als solcher wurde der Normalwiderstand von 100 S.-E einer Wheatstone'schen Brücke von Hartmann in Würzburg verwendet. Der Widerstand betrug bei 20° C.

99,97 S.-E.

und hatte einen Temperaturcoëfficienten von 0,05 Proc. p endlich bezeichnet die unmittelbar nach dem Oeffnen des Stromes bestimmte electromotorische Kraft der Polarisation.

Versuche mit Kupfersulfat.

Die Lösungen von bekannter Concentration wurden, wie schon bemerkt, zwischen Electroden aus electrolytisch niedergeschlagenem Kupfer electrolysirt.

Versuch I.

Versuchsdauer 1 Stunde. Zusammensetzung der Lösung $CuSO_4 + 200\,H_2O$.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,010 25	0,083 577	0,006 856	0,084 366	0,017 328	1,4373	6,9324	0,11171
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,77317	93,654	0,0186	10,224	663,49	0,1843	0,2383

Versuch II.

Versuchsdauer 1 Stunde. Dieselbe Lösung.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,009 748	0,085 307	0,006 812	0,086 003	0,017 819	1,4369	6,8790	0,10594
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,72761	93,682	0,02613	9,6517	626,33	0,17398	0,2391

Versuch III.

Versuchsdauer 1 Stunde. Dieselbe Lösung.

$\text{tg}\,\varphi$	$\text{tg}\,\psi$	$\text{tg}\,\varphi_1$	$\text{tg}\,\psi_1$	$\text{tg}\,\vartheta$	Cl Volt	iR Volt
0,046 119	0,067 53	0,019 718	0,068 565	0,018 121	1,4381	5,3593
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.
	0,7263	93,673	0,0139	9,5886	622,23	0,17284

Versuch IV.

Versuchsdauer 1 Stunde. Dieselbe Lösung.

$\text{tg}\,\varphi$	$\text{tg}\,\psi$	$\text{tg}\,\varphi_1$	$\text{tg}\,\psi_1$	$\text{tg}\,\vartheta$	Cl Volt	iR Volt
0,045 876	0,067 87	0,019 765	0,069 10	0,018 237	1,4377	5,3505
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.
	0,71981	93,748	0,0197	9,5411	619,15	0,17198

Für die Versuche III und IV wurde eine neue
setzungszelle hergestellt, deren Electroden etwas nähe
einander gerückt waren, als in der für die Versuche I
II verwendeten, sodass der Widerstand ein geringerer

Versuch V.

Versuchsdauer 1 Stunde. Zusammensetzung der Lös
$CuSO_4 + 150H_2O$.

$\text{tg}\,\varphi$	$\text{tg}\,\psi$	$\text{tg}\,\varphi_1$	$\text{tg}\,\psi_1$	$\text{tg}\,\vartheta$	Cl Volt	iR Volt
0,055 104	0,067 235	0,019 578	0,068 713	0,018 285	1,4376	5,2861
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.
	0,85475	93,748	0,0235	11,309	733,81	0,20385

Versuch VI.

Versuchsdauer 1 Stunde. Dieselbe Lösung.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,054 761	0,066 07	0,019 468	0,067 87	0,018 186	1,4381	5,2246	0,16136
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,840 44	93,559	0,0128	11,094	719,92	0,1998	0,2377

Die Resultate dieser Versuche sind mithin:

Stromintensität J	Stromarbeit $J(iR-J\varrho)$	Wärmeentwickelung W	$\frac{W}{J(iR-J\varrho)}$
0,11171	0,77317	0,1843	0,2383
0,10594	0,72761	0,17398	0,2391
0,13586	0,7263	0,17284	0,2379
0,13486	0,71981	0,17198	0,2389
0,16219	0,85475	0,20385	0,2385
0,16136	0,84044	0,1998	0,2377
		Mittel	0,2384

Diese Werthe, welche sowohl unter sich, als auch mit den früheren für Drähte erhaltenen sehr gut übereinstimmen, erweisen die vollständige Gültigkeit des Joule'schen Gesetzes für Kupfersulfatlösungen.

Versuche mit Lösungen von Zinksulfat.

Diese Versuche wurden ganz in derselben Weise wie die früheren ausgeführt, nur mussten schwächere Ströme angewendet werden, um das Zusammenwachsen der Electroden zu verhindern.

Versuch I.

Versuchsdauer 1 Stunde. Zusammensetzung der Lösung $ZnSO_4 + 200\,H_2O$.

tg φ	tg ψ	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,048 457	0,069 925	0,055 123	0,069 739	0,018 627	1,4376	5,3967	0,050505
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,2723	93,682	0,02484	3,5867	232,75	0,064 654	0,2374

Versuch II.

Versuchsdauer 1 Stunde. Dieselbe Lösung.

$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\psi$	$\operatorname{tg}\varphi_1$	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\vartheta$	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,051 488	0,072 081	0,056 020	0,071 993	0,018 958	1,4372	5,4644	0,053 529
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,29222	93,71	0,0259	2,8819	187,01	0,069 265	0,2370

Versuch III.

Versuchsdauer 1 Stunde. Zusammensetzung der Lösung $ZnSO_4 + 300\,H_2O$.

$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\psi$	$\operatorname{tg}\varphi_1$	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\vartheta$	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,035 823	0,069 465	0,055 368	0,069 035	0,018 378	1,4388	5,4383	0,037 352
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,20299	93,616	0,0244	2,6738	173,51	0,048 198	0,2374

Versuch IV.

Versuchsdauer 1 Stunde. Dieselbe Lösung.

$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\psi$	$\operatorname{tg}\varphi_1$	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\vartheta$	Cl Volt	iR Volt	J Amp.
0,029 582	0,066 675	0,045 477	0,066 25	0,017 647	1,4391	5,4373	0,037 556
	$J(iR-J\varrho)$	N Ohm	p Volt	G Gramm	W_h Calor.	W_{sec} Calor.	α
	0,20406	93,597	0,0305	2,6896	174,67	0,048 518	0,2378

Die Resultate dieser Versuche sind mithin:

Strom-intensität J	Stromarbeit $J(iR-J\varrho)$	Wärmeent-wickelung W	$\frac{W}{J(iR-J\varrho)}$
0,050 505	0,2723	0,064 654	0,2374
0,053 529	0,29222	0,069 265	0,2370
0,037 352	0,20299	0,048 198	0,2374
0,037 556	0,20406	0,048 518	0,2378
		Mittel	0,2374

Auch diese Zahlen stimmen sowohl untereinander, als auch mit den früher erhaltenen genügend überein, um die Gültigkeit des Joule'schen Gesetzes auch für diesen Fall als erwiesen betrachten zu können.

Bemerkenswerth ist übrigens, dass die befriedigende Uebereinstimmung der für die Lösungen von Kupfer- und Zinksulfat erhaltenen Zahlen mit denen, welche die Versuche mit Platindrähten ergaben, den schon eingangs besprochenen Schluss von Hittorf und Clausius bestätigen, dass die bei dem Transport der Ionen und der unzersetzten Lösung geleistete Arbeit eine minimale sein muss.

Vorstehende Untersuchung wurde im chemischen Institut der hiesigen Universität ausgeführt.

Es sei mir gestattet, Hrn. Prof. v. Pebal für die vielfache Unterstützung, die er mir durch seinen Rath zu Theil werden liess, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Graz, Februar 1885.

IV. *Ueber biegsame Stromleiter unter magnetischer Einwirkung; von R. Lamprecht.*

Ein Solenoidpol von der Intensität M befinde sich an einer Stelle des Raumes, deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges System a, b, c heissen mögen.

Befindet sich andererseits an der Stelle x, y, z ein Stromelement ds, welches durch einen galvanischen Strom von der Intensität J durchflossen wird und nach den Richtungen der Coordinatenaxen die Projectionen dx, dy, dz besitzt, so sind die Componenten Xds, Yds, Zds derjenigen Kraft, welche der Solenoidpol auf das Element senkrecht zu der durch beide gelegten Ebene ausübt, dargestellt durch:

$$(1)\quad \begin{cases} X ds = -AJM\dfrac{(c-z)\,dy-(b-y)\,dz}{r^3}, \\ Y ds = -AJM\dfrac{(a-x)\,dz-(c-z)\,dx}{r^3}, \\ Z ds = -AJM\dfrac{(b-y)\,dx-(a-x)\,dy}{r^3}. \end{cases}$$

Hierin bezeichnet noch r den Abstand zwischen P und Element; A^2 ist der von der Wahl der Maasseinheite abhängige constante Factor des Ampère'schen Gesetze statt dessen man $^1/_2$ setzen muss, um letzteres Gesetz in de von Ampère mitgetheilten Fassung zu erhalten.

Das Stromelement möge einem biegsamen, unausdehnbaren und schwerelosen linearen Leiter angehören, dessen Endpunkte befestigt sind.

Die Gleichgewichtslage, welche ein biegsamer Faden unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte einnimmt, bestimmt sich einerseits durch die Länge des Fadens, andererseits dadurch, dass die auf ein Element in irgend einer Richtung ausgeübte Kraftcomponente durch die Zunahme, welche die Componente der Spannung nach jener Richtung erfährt, im Gleichgewichte gehalten wird. Also ist, wenn T die Spannung bedeutet:

$$(2) \qquad \begin{cases} X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + T\frac{d^2x}{ds^2},$$

multiplicirt man ferner die Gleichungen (2) beziehentlich mi dx/ds, dy/ds, dz/ds und addirt sodann unter Berücksich tigung der Relationen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

sowie der aus (1) sich ergebenden:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

so folgt:

$$\frac{dT}{ds} = 0, \qquad T = \text{const.}$$

Die Spannung des Leiters ist längs seiner ganzen Ausdehnung constant.

Demzufolge erhalten die Differentialgleichungen (2) die Form:

$$(3)\quad \begin{cases} T\dfrac{d^2x}{ds^2} = AJM\dfrac{(c-z)\dfrac{dy}{ds}-(b-y)\dfrac{dz}{ds}}{r^3}, \\ T\dfrac{d^2y}{ds^2} = AJM\dfrac{(a-x)\dfrac{dz}{ds}-(c-z)\dfrac{dx}{ds}}{r^3}, \\ T\dfrac{d^2z}{ds^2} = AJM\dfrac{(b-y)\dfrac{dx}{ds}-(a-x)\dfrac{dy}{ds}}{r^3}. \end{cases}$$

Wir multipliciren jetzt die zweite Gleichung beiderseits mit $c-z$, die dritte ebenso mit $b-y$ und subtrahiren dann die dritte von der zweiten:

$$T\left[(c-z)\frac{d^2y}{ds^2}-(b-y)\frac{d^2z}{ds^2}\right]$$

$$=\frac{AJM}{r^3}\left\{(a-x)\left[(b-y)\frac{dy}{ds}+(c-z)\frac{dz}{ds}\right]-\left[(b-y)^2+(c-z)^2\right]\frac{dx}{ds}\right\}$$

Nun ist: $r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2$,

$$r\frac{dr}{ds}=-(a-x)\frac{dx}{ds}-(b-y)\frac{dy}{ds}-(c-z)\frac{dz}{ds}.$$

Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung lässt sich daher, nachdem in Minuend und Subtrahend $(a-x)^2\,(dx/ds)$ hinzugefügt ist, zusammenziehen in:

$$\frac{AJM}{r^3}\left\{-(a-x)\,r\frac{dr}{ds}-r^2\frac{dx}{ds}\right\},$$

oder:
$$AJM\left\{(a-x)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{ds}(a-x)\right\}.$$

Jetzt lässt sich die Gleichung integriren:

$$(4)\quad \begin{cases} T\left[(c-z)\dfrac{dy}{ds}-(b-y)\dfrac{dz}{ds}\right]=AJM\left[\dfrac{a-x}{r}+A\right]. \\ \text{Ebenso folgt:} \\ T\left[(a-x)\dfrac{dz}{ds}-(c-z)\dfrac{dx}{ds}\right]=AJM\left[\dfrac{b-y}{r}+B\right], \\ T\left[(b-y)\dfrac{dx}{ds}-(a-x)\dfrac{dy}{ds}\right]=AJM\left[\dfrac{c-z}{r}+\Gamma\right]. \end{cases}$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichungen beziehentlich mit $a-x$, $b-y$ und $c-z$ und addirt, so ergibt sich:

$$(5)\qquad 0 = r + A(a-x) + B(b-y) + \Gamma(c-z).$$

Diese Gleichung stellt einen gewöhnlichen Rotationskegel dar.

Die Curve, welche der biegsame Stromleiter unter dem Einflusse des Solenoidpols bildet, liegt auf einem geraden Kreiskegel, dessen Scheitel mit dem Pole zusammenfällt.

Man überzeugt sich leicht, dass die Curve eine kürzeste Linie auf dem Kegel bildet. Schreibt man nämlich die Kegelgleichung (5) kurz $F=0$, so wird:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} - A = -\frac{a-x}{r} - A.$$

Aus (3) aber leitet man ab:

$$\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dz}{ds} - \frac{d^2z}{ds^2}\frac{dy}{ds} = \frac{AJM}{Tr^3}\left\{(a-x)\left[\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. - \left[(b-y)\frac{dy}{ds} + (c-z)\frac{dz}{ds}\right]\cdot\frac{dx}{ds}\right\}$$
$$= \frac{AJM}{Tr^2}\left\{\frac{a-x}{r} + \frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds}\right\}.$$

Diese Ausdrücke nebst den entsprechenden, durch Vertauschung von xyz, abc, $AB\Gamma$ zu erhaltenden befriedigen in der That die bekannte Gleichung der kürzesten Linie auf einer Fläche:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(d^2y\,dz - d^2z\,dy) + \frac{\partial F}{\partial y}(d^2z\,dx - d^2x\,dz)$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial z}(d^2x\,dy - d^2y\,dx).$$

Directen Aufschluss über die Natur unserer Linie erhalten wir durch folgende Betrachtung.

Aus: $\frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{ds} = -(a-x)\frac{dx}{ds} - (b-y)\frac{dy}{ds} - (c-z)\frac{dz}{ds}$

folgt durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$
$$-(a-x)\frac{d^2x}{ds^2} - (b-y)\frac{d^2y}{ds^2} - (c-z)\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Hierin verschwinden die subtractiven Glieder, wie aus (3) zu ersehen ist. Es bleibt die einfache Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds^2} = 1, \tag{6}$$

welche zweimalige Integration zulässt:

$$\frac{d(r^2)}{ds} = 2s + \gamma, \tag{7}$$

$$r^2 = s^2 + \gamma s + \delta. \tag{8}$$

Man bestimmt die beiden Integrationsconstanten durch Anwendung der Gleichung auf die Endpunkte des biegsamen Leiters, wo $s = 0$ und $s = l$ wird und die Entfernung vom Pole bekannte Werthe r_0 und r_1 annimmt:

$$r_0^2 = \delta, \quad r_1^2 = l^2 + \gamma l + r_0^2, \quad \gamma = \frac{r_1^2 - r_0^2 - l^2}{l}.$$

Hierdurch wird:

$$r^2 = s^2 - 2\frac{r_0^2 + l^2 - r_1^2}{2r_0 l} s r_0 + r_0^2, \tag{9}$$

Die Gleichung besagt, dass jeder beliebige Bogen s unserer Curve gleich der einen Seite eines ebenen Dreiecks ist, in welchem die Radiivectores vom Solenoidpole nach den Endpunkten des Bogens die beiden anderen Seiten bilden, und in welchem der Winkel zwischen der die Bogenlänge darstellenden Seite und r_0 constant ist, nämlich gleich dem Winkel, welcher in einem aus r_0, r_1 und l gebildeten Dreiecke der Seite r_1 gegenüberliegt; sein Cosinus ist nämlich: $\frac{r_0^2 + l^2 - r_1^2}{2r_0 l}$.

Hierin liegt die Eigenschaft der kürzesten Linien auf einem Rotationskegel ausgedrückt, dass sie in Gerade übergehen, wenn der Kegel längs einer Kante aufgeschnitten und in eine Ebene abgewickelt wird. Die Curven werden also veranschaulicht durch die Ränder eines conisch zusammengerollten Papierstreifens.

Wenn man die Gleichungen (4) quadrirt und addirt, erhält man zu denjenigen Beziehungen zwischen den Constanten $AB\Gamma$, welche durch Anwendung der Gl. (5) auf die Endpunkte des Leiters gewonnen werden, nämlich:

$$0 = r_0 + A(a - x_0) + B(b - y_0) + \Gamma(c - z_0)$$
$$0 = r_1 + A(a - x_1) + B(b - y_1) + \Gamma(c - z_1)$$

noch eine neue. Die angegebene Operation liefert nämlich:

$$T^2\left\{(a-x)^2\left[\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]+(b-y)^2\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]\right.$$
$$+(c-z)^2\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]-2(b-y)(c-z)\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}-2(c-z)(a-x)\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$\left.-\,2(a-x)(b-y)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right\}$$
$$=(AJM)^2\left\{1+A^2+B^2+\Gamma^2+2\left[A\frac{a-x}{r}+B\frac{b-y}{r}+\Gamma\frac{c-z}{r}\right]\right\}.$$

Auf der linken Seite werden in der Klammer die Glieder:

$$(a-x)^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,\quad (b-y)^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,\quad (c-z)^2\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

den additiven und den subtractiven hinzugefügt; gleichzeitig wird auf der rechten Seite Bezug genommen auf Gl. (5):

$$T^2\left\{r^2-\left(r\frac{dr}{ds}\right)^2\right\}=(AJM)^2\{A^2+B^2+\Gamma^2-1\}. \tag{10}$$

Diese Gleichung führt, nach ds aufgelöst und integrirt, zu (9) und der schon erwähnten Beziehung, welche wir einfacher erhalten, indem wir uns auf (9) stützen:

$$T^2\left\{r_0^2-\left(\frac{r_0^2+l^2-r_1^2}{2l}\right)^2\right\}=(AJM)^2\{A^2+B^2+\Gamma^2-1\}.$$

Der Factor von T^2 ist nichts anderes, als das Quadrat des Höhenperpendikels in einem aus r_0, r_1 und l gebildeten ebenen Dreieck oder der kürzesten Kegelkante, welche von dem Solenoïdpole aus nach der (vervollständigten) kürzesten Linie gezogen werden kann. Wird diese Strecke durch h bezeichnet, so folgt:

$$T^2h^2=(AJM)^2\{A^2+B^2+\Gamma^2-1\}. \tag{11}$$

$\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-1}$ oder Th/AJM ist aber nach (5) die Tangente des Winkels, welchen die Kanten des Kegels mit seiner Axe bilden.

Endlich soll noch der Krümmungsradius der Curve berechnet werden. Man hat:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

Setzt man hierin die Werthe aus (3) ein, so vereinfacht sich die rechte Seite ebenso wie bei Ableitung von (10):

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 = \left(\frac{AJM}{Tr^3}\right)^2 \left\{r^2 - \left(r\frac{dr}{ds}\right)^2\right\}$$

$$\varrho = \frac{Tr^3}{AJMh}. \tag{12}$$

Die Krümmung ist für diejenigen Theile des Leiters geringer, welche vom Pole weiter abstehen.

Nach Beendigung der vorstehenden Ableitungen wurde der Verfasser mit dem Aufsatze des Hrn. E. Riecke in einem der jüngsten Hefte dieser Annalen[1]) bekannt. Hr. Riecke löst das vorliegende Problem der magnetischen Einwirkung auf einen biegsamen Leiter oder der electrodynamischen Kettenlinie unter der Voraussetzung, dass der Faden sich in einem homogenen magnetischen Felde befinde, und seine Endpunkte auf einer zu der Richtung der Kraftlinien senkrechten Linie gelegen seien. Die Curve ist dann ein Kreis. Im Obigen ist die Lage des Poles beliebig gelassen. Es scheint angezeigt, auch auf die Wirkung eines Hufeisenmagnets etwas einzugehen, welche nach Le Roux' Beobachtungen den Leiter bei äquatorialer Lage gleichfalls kreisförmig biegen soll.

Auf den biegsamen Leiter mögen zwei entgegengesetzte Pole M und $-M$ wirken. Die Endpunkte des Fadens mögen sich in der Ebene befinden, welche auf der Verbindungslinie der beiden Pole im Halbirungspunkte senkrecht steht. Dann übersieht man leicht, dass auch der ganze Leiter in jener Aequatorialebene liegen muss. Wählen wir den Punkt mitten zwischen den Polen als Anfangspunkt der Coordinaten, so sind die Coordinaten der Pole a, b, c und $-a$, $-b$, $-c$. Ferner ist:

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = (a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2,$$
$$ax + by + cz = 0,$$

und die Differentialgleichungen erhalten die Form:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} T\dfrac{d^2x}{ds^2} = \dfrac{2AJM}{r^3}\left\{c\dfrac{dy}{ds} - b\dfrac{dz}{ds}\right\} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \right.$$

Indem man die mit y multiplicirte dritte Gleichung von

1) E. Riecke, Wied. Ann. **23**. p. 252. 1884.

der mit z multiplicirten zweiten subtrahirt, gelangt man zu der integrirbaren Gleichung:

$$T\left\{z\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2z}{ds^2}\right\} = 2AJMa\frac{1}{r^3}\frac{dr}{ds}.$$

Die Integration gibt:

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} T\left\{z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right\} = 2AJM\left\{-\frac{a}{r} + A\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit xyz und addirt, so folgt hier:

$$0 = -\frac{ax + by + cz}{r} + Ax + By + \Gamma z,$$

oder:

$$0 = Ax + By + \Gamma z.$$

Folglich ist:

$$A : B : \Gamma = a : b : c, \quad A = \frac{a}{\varDelta}, \quad B = \frac{b}{\varDelta}, \quad \Gamma = \frac{c}{\varDelta},$$

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} T\left\{z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right\} = 2AJMa\left\{\frac{1}{\varDelta} - \frac{1}{r}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Wenn man diese drei Gleichungen quadrirt und addirt und dabei wie p. 76 verfährt, so folgt:

$$T^2\left\{r^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - \left(r\frac{dr}{ds}\right)^2\right\} = \left(\frac{2AJM}{\varDelta r}\right)^2(a^2+b^2+c^2)(r-\varDelta)^2.$$

Löst man nach ds auf, so ergibt sich für die Bogenlänge s das Integral:

$$(16)\quad s = \int_{r_0}^{r} \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - (a^2 + b^2 + c^2)r^2 - \frac{2AJM}{T\varDelta}(a^2 + b^2 + c^2)(r - \varDelta)^2}}.$$

Endlich erhält man für den Krümmungsradius einen analogen Ausdruck wie bei der Einwirkung e i n e s Poles, nämlich:

$$(17)\quad \varrho = \frac{Tr^3}{AJM2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

S o l a n g e d i e A b s t ä n d e d e r e i n z e l n e n T h e i l e des biegsamen Leiters von jedem Pole merklich untereinander verschieden sind, weicht die Gestalt des Leiters von der kreisförmigen ab: die Theile, welche

den Polen näher liegen, sind stärker gekrümmt, als die entfernteren.

Der Versuch bestätigt dies, wenn man nach dem Vorgange des Hrn. Riecke einen Strom durch ein an beiden Enden festgeklemmtes Goldblatt führt und diesem die Pole eines constanten oder Electromagnets so nähert, dass die Enden des Goldblattes in der Symmetrieebene der Magnetpole liegen.[1])

Bringt man einen Magnetpol nahe an das Goldblättchen heran, so ist ausser der wechselnden Krümmung auch die eigenthümlich gewundene Gestalt des Blättchens, welche aus den theoretischen Untersuchungen im ersten Theile dieses Aufsatzes hervorging, nämlich die kürzeste Linie auf einem Rotationskegel, dessen Scheitel im Magnetpole liegt, gut zu beobachten.

Hr. E. Riecke macht die Bemerkung, dass, abgesehen von constanten Factoren, die Differentialgleichungen für die electrodynamischen Kettenlinien in diejenigen für die Bewegung eines electrischen Theilchens unter der Einwirkung magnetischer Kräfte übergehen, wenn $T = ds/dt$ gesetzt wird. Daher erfolgt diese Bewegung in denselben Curven, welche bei den hier behandelten Problemen sich ergaben.

Es sei noch gestattet, auf den Umstand besonders hinzuweisen, dass die Spannung längs des ganzen Leiters dieselbe ist. Wenn daher der Leiter nicht unausdehnbar, sondern elastisch ist, so erfährt seine Länge eine Vergrösserung, welche der Spannung proportional ist; die Gestalt, welche der Leiter annimmt, muss aber dieselbe sein, wie die eines entsprechend längeren, unausdehnbaren Fadens. Also können auch dann unsere Resultate Anwendung finden.

Mag man nun den galvanischen Lichtbogen, den Electricitätsübergang in verdünnten Gasen, die Lichthülle des Inductionsfunkens erklären durch Ausstrahlung von mit träger Masse verbundenen electrischen Theilchen[2]) oder etwa durch

1) Le Roux wandte einen dünnen Platindraht an, welcher durch den hindurchgeleiteten Strom zum Glühen gebracht wurde.

2) E. Riecke, Wied. Ann. **13.** p. 194. 1881. Wiedemann, Lehre vom Galvanismus 2. Aufl. **2.** § 937 und an anderen Orten.

Bildung einer elastischen leitenden Verbindung in dem Gas zwischen den Electroden[1]), so könnte in beiden Fällen das Vorstehende als Beitrag zur theoretischen Untersuchung der Wirkung magnetischer Kräfte auf diese Entladungen gelten.

Zittau, November 1884.

V. *Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs;* *von J. J. Balmer.*

(Aus den Verhandl. d. Naturforsch. Ges. zu Basel, Bd. 7, p. 548, mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Ausgehend von den Messungen von H. W. Vogel und Huggins über die ultravioletten Linien des Wasserstoffspectrums habe ich versucht, eine Gleichung aufzusuchen, welche die Wellenlängen der verschiedenen Linien in befriedigender Weise ausdrückt, ich wurde dazu durch die Aufmunterung von Hrn. Prof. E. Hagenbach ermuthigt. Die sehr genauen Messungen Angström's der vier Wasserstofflinien ermöglichten es, für deren Wellenlängen einen gemeinschaftlichen Factor aufzusuchen, der zu den Wellenlängen in möglichst einfachen Zahlenverhältnissen stand. So gelangte ich denn allmählich zu einer Formel, welche wenigstens für diese vier Linien als Ausdruck eines Gesetzes gelten kann, durch welches deren Wellenlängen mit einer überraschenden Genauigkeit dargestellt werden. Der gemeinschaftliche Factor für diese Formel ist, wie er sich aus den Angström'schen Bestimmungen ableitet:

$$\left(h = 3645{,}6 \frac{\mathrm{mm}}{10^7}\right).$$

Man könnte diese Zahl die Grundzahl des Wasserstoffs nennen; und wenn es gelingen sollte, auch für andere

---

1) Hittorf, Pogg. Ann. 136. p. 215. 1869. Die von Hittorf beobachteten Spiralen des negativen Glimmlichtes unter Einwirkung eines Magnetpoles scheinen mit unseren kürzesten Linien auf Rotationskegeln gut übereinzustimmen.

Elemente die entsprechenden Grundzahlen ihrer Spectrallinien zu finden, so wäre die Vermuthung gestattet, dass zwischen diesen Grundzahlen und den entsprechenden Atomgewichten bestimmte, wieder durch irgend eine Function ausdrückbare Beziehungen stattfinden.

Die Wellenlängen der vier ersten Wasserstofflinien ergeben sich nun dadurch, dass die Grundzahl $h = 3645{,}6$ der Reihe nach mit den Coëfficienten $^9/_5$; $^4/_3$; $^{25}/_{21}$ und $^9/_8$ multiplicirt wird. Scheinbar bilden diese vier Coëfficienten keine gesetzmässige Reihe; sobald man aber den zweiten und den vierten durch vier erweitert, stellt sich die Gesetzmässigkeit her, und die Coëfficienten erhalten zum Zähler die Zahlen 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 und zum Nenner eine je um vier kleinere Zahl.

Es ist mir aus verschiedenen Gründen wahrscheinlich, dass die vier eben genannten Coëfficienten zwei Reihen angehören, sodass die zweite Reihe die Glieder der ersten Reihe noch einmal aufnimmt; und so komme ich dazu, die Formel für die Coëfficienten allgemeiner so darzustellen: $(m^2/m^2 - n^2)$, wobei m und n stets ganze Zahlen sind.

Für $n = 1$ erhält man die Reihe $^4/_3$, $^9/_8$, $^{16}/_{15}$, $^{25}/_{24}$ etc., für $n = 2$ die Reihe $^9/_5$; $^{16}/_{12}$; $^{25}/_{21}$; $^{36}/_{32}$; $^{49}/_{45}$; $^{64}/_{60}$; $^{81}/_{77}$; $^{100}/_{96}$ etc. In dieser zweiten Reihe ist je das zweite Glied schon in der ersten Reihe, aber hier in gekürzter Form vorhanden.

Führt man mit diesen Coëfficienten und der Grundzahl 3645,6 die Berechnung der Wellenlängen aus, so erhält man folgende Zahlen in 10^{-7} mm für dieselben.

Es wird nach der Formel

		Ångström hat	Differenz
$H\alpha$ (*C*-Linie)	$= {}^9/_5\, h = 6562{,}08$	6562,10	+0,02
$H\beta$ (*F*-Linie)	$= {}^4/_3\, h = 4860{,}8$	4860,74	−0,06
$H\gamma$ (vor *G*)	$= {}^{25}/_{21}\, h = 4340$	4340,1	+0,1
$H\delta$ (*h*-Linie)	$= {}^9/_8\, h = 4101{,}3$	4101,2	−0,1

Die Abweichung der Formel von der Angström'schen Beobachtung beträgt also im ungünstigsten Falle noch nicht $^1/_{40000}$ der Wellenlänge, eine Abweichung, welche ganz wohl noch innerhalb der Grenzen der möglichen Beobachtungs-

fehler liegen dürfte und eher ein glänzendes Zeugniss für die grosse Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt ist, mit welcher Angström bei seinen Operationen zu Werke gegangen sein muss.

Nach der Formel erhielte man für eine fünfte Wasserstofflinie $^{49}/_{45} . 3645{,}6 = 3969{,}65 . 10^{-7}$ mm. Von einer solchen fünften Linie, die noch innerhalb des sichtbaren Theiles des Spectrums, ganz nahe vor H_I (welches nach Angström die Wellenlänge 3968,1 hat) liegen müsste, war mir nichts bekannt; und ich musste entweder annehmen, dass die Temperaturverhältnisse zur Entwickelung dieser Linie nicht günstig genug seien, oder dass dennoch die Formel keine allgemeine Geltung besitze.

Auf meine Erkundigung theilte mir Hr. Prof. Hagenbach mit, es existire noch eine grössere Anzahl, namentlich von den Herren Vogel und Huggins gemessener Wasserstofflinien im violetten und ultravioletten Theile des Wasserstoffspectrums und des Spectrums weisser Sterne; er war so freundlich, selbst eine Vergleichung der betreffenden Wellenlängenbestimmungen mit meiner Formel durchzuführen und mir das Ergebniss mitzutheilen.

Trotzdem die Formel im allgemeinen etwas grössere Zahlen ergibt, als die Veröffentlichungen Vogel's und Huggin's sie enthalten, so ist der Unterschied zwischen den berechneten und den beobachteten Wellenlängen so klein, dass die Uebereinstimmung im höchsten Grade überraschen muss. Vergleichungen der Wellenlängebestimmungen verschiedener Forscher zeigen im allgemeinen keine vollkommen genaue Uebereinstimmung; doch lassen sich die Beobachtungen des einen auf die des anderen durch eine kleine Reduction in ganz befriedigender Weise zurückführen.

Auf umstehender Tabelle sind diese Messungen zusammengestellt und die Ergebnisse der Wellenlängen nach der Formel damit verglichen worden. Die Angaben von Vogel und Huggins fallen dabei immer noch etwas kleiner aus, als wenn man die Grundzahl für Wasserstoff auf $3645 . 10^{-7}$ mm reducirt.

Tabelle der Wellenlänge für die Wasserstofflinien in 10^{-7} mm.

Fraunhofer's Bezeichnung:	$H\alpha = \frac{9}{5}h$ C	$H\beta = \frac{4}{3}h$ F	$H\gamma = \frac{25}{21}h$ vor G	$H\delta = \frac{9}{8}h$ h	$H\varepsilon = \frac{49}{45}h$ nahe vor H_I	Ultraviolett $H\zeta = \frac{16}{15}h$	$H\eta = \frac{81}{77}h$	$H\vartheta = \frac{25}{24}h$	$H\iota = \frac{121}{117}h$	Mittelwerthe der Grundzahl h
Beobachter:										
Van d. Willigen [1])	6565,6	4863,94	4342,80	4103,8	$(H_I = 3971,3)$	—	—	—	—	$h = 3647,821$
Ångström	6562,10	4860,74	4340,10	4101,2	$(H_I = 3968,1)$	—	—	—	—	$h = 3645,589$
Mendenhall	6561,62	4860,16	—	—	—	—	—	—	—	$h = 3645,232$
Mascart	6560,7	4859,8	—	—	$(H_I = 3967,2)$	—	—	—	—	$h = 3644,842$
Ditscheiner	6559,5	4859,74	4338,60	4100,0	$(H_I = 3966,8)$	—	—	—	—	$h = 3644,460$
Huggins	—	für die ultravioletten H-Linien weisser Sterne				3887,5	3834	3795	3767,5	$h = 3643,846$
Vogel	—	—	—	—	3969	3887	3834	3795	6769	$h = 3644,379$
Formel: $H = \frac{m^2}{m^2 - 2^2}h$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$	$m = 11$	
$h = 3645,6$	6562,08	4860,8	4340	4101,3	3969,65	3888,64	3834,98	3797,5	3770,2	
$h = 3645$	6561	4860	4339,283	4100,625	3969	3888	3834,35	3796,875	3769,615	

1) Wenn man diesen, durchschnittlich um $\frac{1}{1500}$ höher stehenden Werthen nur $\frac{1}{3}$ soviel Gewicht beilegt, wie den übrigen Beobachtungen, so erhält man als genauen Mittelwerth für h: 3645.

Aus diesen Vergleichungen ergibt sich zunächst, dass die Formel auch für die fünfte, nahe vor der ersten Fraunhofer'schen *H*-Linie (welche dem Calcium zugehört) liegende Wasserstofflinie zutrifft. Ferner zeigt sich, dass die Vogel'schen Wasserstofflinien und die ihnen entsprechenden Huggins'schen Linien weisser Sterne durch die Formel sehr befriedigend dargestellt werden. Man dürfte fast als sicher voraussetzen, dass auch die nachfolgenden Linien weisser Sterne, welche Huggins noch weiter im ultravioletten Theile des Spectrums gefunden hat, mit durch die Formel ausgedrückt werden. Eine Kenntniss der betreffenden Wellenlängebestimmungen fehlt mir. Nach der Formel ergeben sich mittelst der Grundzahl 3645,6 folgende Bestimmungen für die neunte und die folgenden bis zur funfzehnten Wasserstofflinie:

$^{121}/_{127} \cdot h = 3770{,}24$ $\qquad$ $^{225}/_{221} \cdot h = 3711{,}58$

$^{36}/_{35} \cdot h = 3749{,}76$ $\qquad$ $^{64}/_{63} \cdot h = 3703{,}46$

$^{169}/_{165} \cdot h = 3733{,}98$ $\qquad$ $^{289}/_{285} \cdot h = 3696{,}76$

$^{49}/_{48} \cdot h = 3721{,}55$

Ob die Wasserstofflinien der weissen Sterne auch noch so weit der Formel Recht geben, oder ob allmählich andere Zahlenverhältnisse an ihre Stelle treten, kann nur durch die Thatsachen selbst entschieden werden.

Ich knüpfe an das Gesagte noch einige Fragen und Folgerungen.

Sollte die obige Formel blos für das einzige chemische Element des Wasserstoffs Geltung haben und sich nicht auch in den Spectrallinien anderer einfacher Stoffe mit einer diesen Stoffen eigenthümlichen Grundzahl wieder finden? Wenn nicht, so dürfte man vielleicht annehmen, dass die dem Wasserstoff zukommende Formel ein besonderer Fall einer allgemeineren Formel sei, welche für gewisse Bedingungen eben in die Formel für die Wasserstofflinien übergehe.

Von Wasserstofflinien, welche der Formel für $n = 3$, 4 etc. entsprächen, und welche man als Linien dritter, vierter Ordnung u. s. w. bezeichnen könnte, finden sich in den bis jetzt bekannt gewordenen Spectren keine vor; sie müssten

sich etwa unter ganz neuen Temperatur- und Druckverhältnissen entwickeln, um wahrnehmbar zu werden.

Ist die Formel für $n = 2$ für sämmtliche Hauptlinien des Wasserstoffspectrums richtig, so ginge aus derselben hervor, dass diese Spectrallinien sich nach der ultravioletten Seite hin der Wellenlänge 3645,6 immer mehr und in immer dichterer Folge nähern, aber diese Grenze nicht überschreiten können, während die *C*-Linie auch zugleich die äusserste mögliche Linie nach der rothen Seite hin darstellt. Nur wenn noch Linien höherer Ordnungen vorkämen, würden sich auch noch weitere Linien nach der infrarothen Seite hin ergeben.

Mit dem aus sehr zahlreichen Linien bestehenden „Zweiten Wasserstoffspectrum", welches Hr. Hasselberg in den „Mémoires de l'Academie des sciences de St.-Pétersbourg", Jahrg. 1882, veröffentlichte, steht die Formel in keinem irgendwie nachweisbaren Zusammenhang. Es möchte also der Wasserstoff unter gewissen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur sich so verändern, dass das Gesetz der Bildung der Spectrallinien ein vollständig anderes würde.

Das Auffinden einer Grundzahl für andere chemische Elemente, Sauerstoff oder Kohlenstoff etc., vermittelst welcher sich aus der Formel deren Hauptspectrallinien ergäben, ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Nur die allergenausten und zuverlässigsten Wellenlängebestimmungen der hervorragendsten Linien eines Stoffes könnten zur Feststellung eines gemeinschaftlichen grössten Maasses dieser Wellenlängen führen und ohne ein solches Maass scheint alle Mühe des Probirens und Suchens umsonst. Vielleicht findet sich in einer anderen graphischen Construction der Spectraltableaus das Mittel, auf dem Wege solcher Untersuchungen weiter zu kommen.

Nachtrag. Aus einer mir durch gütige Vermittelung des Hrn. Prof. Hagenbach zugekommenen Notiz des Hrn. Huggins vom 14. Sept. 1884 ergibt sich, dass allerdings auch noch weitere Wasserstofflinien sich im Spectrum

weisser Sterne finden, über welche Hr. Huggins[1]) berichtet. Auch diese entsprechen sämmtlich der Formel $m^2/(m^2-4).h$, wenn schon eine kleine, mit dem Coëfficienten m wachsende Differenz zwischen den beobachteten und den nach der Formel berechneten Wellenlängen sich kundgibt. Hr. Prof. Hagenbach machte mich zuerst auf diesen letzteren Umstand aufmerksam. Er findet bei einer Vergleichung der mit $h = 3645$ berechneten und der von Hrn. Huggins beobachteten Wellenlängen folgende Differenzen.

		Nach der Formel berechnet	v. Huggins beobachtet	Differenz (B. — Huggins)
H_γ	$m =$ 5	4339,3	4340,1	−0,8
h	6	4100,6	4101,2	−0,6
H_I	7	3969,0	3968,1	+0,9
α	8	3888,0	3887,5	+0,5
β	9	3834,3	3834,0	+0,4
γ	10	3796,9	3795,0	+1,9
δ	11	3769,6	3767,5	+2,1
ε	12	3749,1	3745,5	+3,6
ξ	13	3733,3	3730,0	+3,3
η	14	3720,9	3717,5	+3,4
ϑ	15	3711,0	3707,5	+3,5
ι	16	3702,9	3699,0	+3,9

Wenn man die Linien H_α und H_β noch dazu nimmt, so sind es im ganzen 14 Linien, welche durch die vorgeschlagene Formel sich darstellen lassen, wenn man dem m die Werthe aller ganzen Zahlen von 3 bis 16 gibt. Ob nun die obigen Differenzen zeigen, dass die Formel nur annäherungsweise das Gesetz gibt, oder ob dieselben aus Beobachtungsfehlern sich erklären lassen, ist schwer zu beurtheilen. Die Messungen von Huggins sind mit äusserster Sorgfalt angestellt, doch mag die Schwierigkeit der Herstellung absolut gleicher Bedingungen bei der photographischen Aufnahme der Vergleichsspectra und der Sternspectra, von der Hr. Huggins auf p. 675 spricht, vielleicht die Abweichung erklären. — Der Umstand, dass die von Huggins gemessenen Wellenlängen sich auf Luft beziehen, ist nicht von Be-

1) Huggins, Phil. Trans. **171.** II. p. 669. 1880.

lang, denn wenn man mit den nach der Cauchy'schen Dispersionsformel aus den Lorenz'schen Beobachtungen abgeleiteten Brechungsverhältnissen die Wellenlängen auf das Vacuum reducirt, so ergibt sich eine ganz unbedeutende Vergrösserung, z. B. bei der Linie ι von 3699,0 auf 3700,1.

Hr. Huggins citirt in einer Anmerkung seiner Abhandlung die ihm von einem seiner Freunde mitgetheilte Berechnung der sogenannten harmonischen Verhältnisse der Schwingungszahlen der Wasserstofflinien. Dabei ist es nothwendig, für dieselben (drei) getrennte Serien solcher harmonischen Reihen anzunehmen, zugleich wird der gemeinschaftliche Factor für jede Serie ziemlich klein, und die ganzzahligen Coëfficienten bilden keine gesetzmässigen Reihen. Beides macht es mir zweifelhaft, ob dieser Versuch, so interessant er an sich ist, wirklich einen inneren Zusammenhang der Erscheinungen anzugeben hat.

Basel, 30. Januar 1885.

VI. *Aenderung der Lichtbrechung in Glas und Kalkspath mit der Temperatur; von Dr. Friedr. Vogel.*

Unter den bisher auf ihre Aenderung der Lichtbrechung untersuchten festen Körpern bieten Glas und Kalkspath ein erhöhtes Interesse, da ihr Brechungsindex mit steigender Temperatur zunimmt, während er bei anderen Körpern abnimmt. Die bisherigen Untersuchungen von Rudberg[1], Fizeau[2] und Stefan[3] beschränken sich auf geringere Temperaturintervalle. Die Berechnung setzt dann voraus, dass die Aenderungen proportional den Temperaturerhöhungen sind. Es war daher nicht ohne Interesse, diese Körper bei verschiedenen und höheren Temperaturen zu

1) Rudberg, Pogg. Ann. **26.** p. 291. 1832.
2) Fizeau, Ann. de chim. et de phys. (3) **66.** p. 429.
3) Stefan, Wien. Ber. **63.** Febr. 1871.

untersuchen. Ich erwartete eine immer geringer werdende Zunahme des Index mit steigender Temperatur, doch bewahrheitete sich diese Voraussetzung nicht.

Es wurde mittelst eines Meyerstein'schen Spectrometers, das an zwei Mikroskopen Ablesungen bis auf zwei Secunden erlaubte, untersucht: ein Prisma von weissem Glase, ein von Hartmann und Braun geliefertes grünes, ganz schweres Flintglasprisma, ein Kalkspathprisma, dessen optische Axe senkrecht zur brechenden Kante und zur Halbirungslinie des brechenden Winkels lag (⊥) und ein Kalkspathprisma, in welchem die brechende Kante parallel der optischen Axe war (∥). Beide letzteren waren von Dr. Steeg und Reuter bezogen.

Die Erwärmung geschah in einem messingenen Heizkasten, wie er in Groth's „Physikalischer Krystallographie" p. 484, näher beschrieben ist, in den von oben zwei Thermometer, nach der Mitte hin convergirend, eingeführt waren. Die Oeffnungen zur Durchsicht waren mit planparallelen Glasplatten verschlossen. Die Prismen standen auf in den Kasten geklemmten Bleistegen, von oben her durch eine Schraubvorrichtung leicht gehalten, so vor den Glasplatten, dass man darüber hinweg und daran vorbei stets die Einstellung des Fernrohrs auf den direct gesehenen Spalt controliren konnte. Unter den Heizkasten wurden zur Erwärmung desselben kleine, aus Glas gefertigte Bunsen'sche Brenner geführt, die gut functionirten und sich leicht reguliren liessen. Die Messung der Ablenkungswinkel geschah stets im Minimum der Ablenkung. Die brechenden Winkel wurden bei allen Prismen in verschiedenen Temperaturen geprüft. Es ergaben sich keine messbaren Aenderungen mit Ausnahme des Kalkspathprismas ⊥. Im Folgenden sind die Resultate zusammengestellt, wobei auf die drei Wasserstofflinien (H_α, H_β, H_γ) und die Natriumlinie eingestellt wurde.

1) Weisses Glas. Brechender Winkel 58° 41′ 20″.

Die Ablenkungswinkel waren:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
12° C.	45° 25′ 18″	45° 51′ 35″	46° 58′ 12″	47° 54′ 24″
126	45 27 25	45 53 49	47 1 7	47 57 53
190	45 29 3	45 55 35	47 3 6	48 0 15
260	45 31 10	45 57 46	47 6 2	48 3 17

Auf eine Correction der Ablenkungswinkel wegen des Durchganges des Lichtes durch Schichten von verschiedenem Brechungsvermögen wurde verzichtet, da die Correctur, die für Luft nur einige Secunden beträgt, durch das Glas noch vermindert wird, dessen Brechung mit der Temperatur zunimmt. Die Temperatur der Verschlussplatten nimmt nämlich offenbar auch nach aussen ab.

Aus den oben angeführten Daten berechnen sich die Brechungsindices gegen Luft von derselben Temperatur wie das Glas.

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
12	1,609 204	1,613 986	1,626 010	1,636 033
126	1,609 587	1,614 397	1,626 533	1,636 654
190	1,609 891	1,614 718	1,626 888	1,637 070
260	1,610 279	1,615 111	1,627 414	1,637 608

Diese Zahlen bedürfen noch einer Correction, um miteinander vergleichbar zu werden. In der folgenden Tabelle sind die Indices gegen den leeren Raum zusammengestellt, wobei die Beobachtungen Mascart's[1]) über die Aenderung der Brechung in Luft zu Grunde gelegt sind, wenn man von den geringen Aenderungen des Barometerstandes absieht. Bezeichnet n den Brechungsindex gegen den leeren Raum, n' den gegen Luft von der Temperatur t, und μ_t den von Luft von der Temperatur t gegen den leeren Raum, so ist:

$$n = n'.\mu_t = n'.\frac{1,000\,294 + 0,00382\,t}{1 + 0,00382\,t}.$$

Die sich daraus ergebenden Werthe sind:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
12	1,609 656	1,614 440	1,626 467	1,636 486
126	1,609 907	1,614 718	1,626 855	1,636 979
190	1,610 184	1,615 011	1,627 184	1,637 368
260	1,610 517	1,615 349	1,627 653	1,637 849

1) Mascart, Ann. d'Ecol. norm. (2) **6.** p. 9.

Berechnet man daraus die Aenderungen für 100° in den verschiedenen Intervallen, so findet man:

$$\frac{n_{t'} - n_t}{t' - t} \cdot 100$$

Intervall	H_α	D	H_β	H_γ
126—12	0,000 221	0,000 243	0,000 340	0,000 432
190—12	296	305	402	495
260—12	347	366	470	549

Diese Zahlen beweisen, dass die Aenderung nicht proportional der Temperaturerhöhung ist, sondern dass man in der Gleichung, die den Zusammenhang der Indices bei verschiedenen Temperaturen darstellt, ein positives quadratisches Glied hinzufügen muss:

$$n_t = n_{t'} + \alpha (t - t') + \beta (t - t')^2.$$

2) Schweres Flintglas. Brechender Winkel 59° 24′ 5″.

Die Ablenkungswinkel sind:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
20	61° 2′ 26″	61° 56′ 57″	64° 22′ 16″	66° 34′ 35″
124	61 6 21	62 1 20	64 28 31	66 43 5
194	61 9 3	62 4 36	64 33 53	66 50 9
257	61 11 55	62 7 56	64 38 33	66 56 12

Die Dispersion war hier so stark, dass die beiden Natriumlinien vollkommen getrennt erschienen. Es wurde immer auf die Mitte zwischen beiden eingestellt.

Die uncorrigirten Brechungsindices sind also:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
20	1,751 770	1,759 680	1,780 175	1,789 145
124	1,752 367	1,760 307	1,781 036	1,799 281
194	1,752 750	1,760 776	1,781 773	1,800 215
257	1,753 163	1,761 254	1,782 420	1,801 021

Auf den leeren Raum reducirt sind sie:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
20	1,752 412	1,760 324	1,780 827	1,798 804
124	1,752 717	1,760 659	1,781 392	1,799 641
194	1,753 046	1,761 073	1,782 069	1,800 520
257	1,753 424	1,761 516	1,782 684	1,801 288

Daraus ergibt sich:

$$\frac{n_t - n_{t'}}{t - t'} . 100$$

Intervall	H_α	D	H_β	H_β
124—20	0,000 293	0,000 322	0,000 543	0,000 804
194—20	364	429	716	0 985
257—20	427	503	783	1 048

Auch hier zeigt sich, dass die Zunahme der Indices grösser wird, zu je höheren Temperaturen man übergeht. Die Coëfficienten der oben erwähnten Temperaturgleichung berechnen sich für das weisse Glas Nr. 1:

	H_α	D	H_β	H_γ
$\alpha . 10^{+8}$	96	123	224	327
$\beta . 10^{+10}$	107	106	97	93

für Flintglas Nr. 2:

	H_α	D	H_β	H_γ
$\alpha . 10^8$	190	190	362	575
$\beta . 10^{10}$	101	147	221	221

Das gleichmässige Verhalten der beiden untersuchten Gläser deutet darauf hin, dass ein bei bestimmter Temperatur achromatisches System es nahezu bei allen Temperaturen bleibt.

3) Kalkspath $\perp$. Die brechende Kante lag senkrecht zur optischen Axe, und zwar, wie oben erwähnt, so, dass das gebrochene Licht ohne Doppelbrechung sich in der optischen Axe fortpflanzte. Der brechende Winkel φ ändert sich mit der Temperatur. Er wurde für jede Beobachtungstemperatur experimentell ermittelt. Es ergaben sich nicht zu vernachlässigende Abweichungen gegen die Werthe, die man mit den Ausdehnungscoëfficienten Fizeau's[1]) nach der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_t}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} . \frac{1 + 0{,}000\,027\,7\,t}{1 - 0{,}000\,005\,5\,t}$$

1) Fizeau, Ann de chim. et de phys. l. c.

erhält, weil bei dem benutzten Prisma die Forderung de Senkrechtstehens der optischen Axe und der Halbirungslini des brechenden Winkels nicht streng genug erfüllt war. E ergab sich für φ:

	18°	103°	146	194
berechnet	— — —	60° 3′ 46″	60° 7′ 52″	60° 12′ 28″
beobachtet	59° 55′ 40″	60 2 26	60 6 30	60 11 2

Die Ablenkungen waren:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
18	51° 31′ 16″	51° 55′ 14″	52° 54′ 7″	53° 42′ 35″
103	51 42 56	52 6 58	53 6 6	53 54 54
146	51 49 39	52 13 54	53 13 18	54 2 19
194	51 57 60	52 21 36	53 21 12	54 10 18

Die uncorrigirten Indices sind dann:

18	1,654 487	1,658 398	1,667 948	1,675 719
103	1,654 677	1,658 585	1,668 117	1,675 891
146	1,654 742	1,658 670	1,668 212	1,675 995
194	1,654 783	1,658 756	1,668 293	1,676 056

Die auf den leeren Raum bezogenen Indices sind:

18	1,654 939	1,658 855	1,668 407	1,676 181
103	1,655 026	1,658 936	1,668 470	1,676 245
146	1,655 055	1,658 984	1,668 527	1,676 312
194	1,655 062	1,659 036	1,668 575	1,676 339

also: $\dfrac{n_{t'} - n_t}{t' - t} \cdot 100.$

Intervall	H_α	D	H_β	H_γ
103—18	0,000 010 2	0,000 009 3	0,000 007 3	0,000 007 3
146—18	09 2	10 0	9 4	10 2
194—18	06 9	10 3	9 5	08 9

4) Kalkspath ||. Brechende Kante parallel zur optische Axe. Der brechende Winkel war: 59° 55′ 56″ und änderte sich nicht bei Temperaturänderungen.

Für den ordentlichen Strahl waren die Ablenkungen:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
13°	51° 31′ 39″	51° 55′ 40″	52° 54′ 26″	53° 42′ 53″
106	51 32 49	51 56 53	52 55 42	53 44 12
145	51 33 9	51 57 14	52 56 8	53 44 40
193	51 33 32	51 57 40	52 56 37	53 45 10

Daraus ergibt sich n[1]):

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
13	1,654 482	1,658 407	1,667 932	1,675 691
106	1,654 673	1,658 607	1,668 136	1,675 904
145	1,654 727	1,658 670	1,668 206	1,675 978
193	1,654 788	1,658 733	1,668 286	1,676 068

Die corrigirten Werthe sind:

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
13	1,654 945	1,658 871	1,668 399	1,676 162
106	1,655 019	1,658 954	1,668 485	1,676 254
145	1,655 037	1,658 977	1,668 521	1,676 295
193	1,655 068	1,659 018	1,668 568	1,676 351

Folglich sind die Aenderungen $(n_{t'} - n_t)/(t' - t) . 100$.

Intervall	H_α	D	H_β	H_γ
106—13	0,000 079	0,000 089	0,000 092	0,000 100
145—13	66	76	87	096
193—13	68	78	93	105

Die Zunahme ist gering, aber merklich constant für den ordentlichen Strahl. Diese Zunahmen verlaufen auch regelmässiger als die beim anderen Kalkspathprisma berechneten, da dort geringere Temperaturschwankungen gleichzeitig brechenden Winkel und Ablenkung ändern. Ein Vergleich der auf Luft von gewöhnlicher Temperatur bezogenen Indices gibt auch ein Maass der mit dem Instrument erreichten Genauigkeit. Die Abweichungen betragen im Maximum 2 Einheiten der fünften Decimalstelle.

Für den ausserordentlichen Strahl ist die Zunahme eine ausnehmend starke, wie die folgenden Tabellen zeigen. Sie ist gleichfalls proportional der Temperaturerhöhung.

Die Ablenkungen waren:

1) Für gewöhnliche Temperatur sind die Brechungsindices nach:

	H_α	D	H_β	H_γ
Mascart	1,65452	—	1,66802	—
Rudberg	1,65440	—	1,66793	—
	1,65452	1,65850	1,66802	—
Glazebrook	1,65441	—	1,66779	1,67553

Temp.	H_α	D	H_β	H_γ
13	35° 47′ 46″	35° 56′ 48″	36° 19′ 33″	36° 37′ 37″
106	35 53 11	36 2 15	36 25 13	36 43 22
145	35 55 15	36 4 23	36 27 30	36 45 41
195	35 57 56	36 7 5	36 30 23	36 48 40

n uncorrigirt[1]):

13	1,484 634	1,486 397	1,490 824	1,494 336
106	1,485 688	1,487 457	1,491 925	1,495 447
145	1,486 098	1,487 872	1,492 371	1,495 892
193	1,486 618	1,488 398	1,492 934	1,496 472

Die corrigirten Indices werden:

13	1,485 050	1,486 814	1,491 242	1,494 755
106	1,485 999	1,487 767	1,492 237	1,495 759
145	1,486 379	1,488 154	1,492 653	1,496 175
193	1,486 869	1,488 650	1,493 186	1,496 726

also: $\frac{n_{t'} - n_t}{t' - t} \cdot 100.$

Intervall	H_α	D	H_β	H_γ
106—13	0,001 020	0,001 024	0,001 069	0,001 079
145—13	1 006	1 015	1 069	1 075
193—13	1 010	1 020	1 080	1 095

Die Brechungsindices des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles nähern sich einander im ganzen Spectrum nahezu proportional der Temperaturerhöhung; es nimmt also dieser proportional die Doppelbrechung ab. Fizeau[2]) war schon bei Natriumlicht zu denselben Resultaten gelangt. Rudberg[3]) glaubte für die F-Linie ($= H_\beta$) eine Abnahme des Brechungsindex vom ordentlichen Strahl zu finden, was ich nicht bestätigen konnte. Auffallen könnten vielleicht die für die mittlere Temperatur bis 145° berechneten geringeren Zunahmen der Indices, doch fallen die Abweichungen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Phys. Inst. d. Univ. Strassburg, Januar 1885.

1) Für gewöhnliche Temperatur sind die Indices nach:

	H_α	D	H_β	H_γ
Mascart	1,48455	—	1,49075	—
Rudberg {	1,48474	—	1,49084	—
	1,48455	1,48635	1,49075	—
Glazebrook	1,48456	—	1,49074	1,49430

2) Fizeau, l. c.

3) Rudberg, Pogg. Ann. 26. p. 291. 1832.

VII. *Die optischen Eigenschaften sehr dünner Metallschichten; von W. Voigt.*

(Aus den Nachr. d. k. Göttinger Ges. d. Wiss. v. 19. Jan. 1885 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Beobachtnngen über das optische Verhalten sehr dünner Metallschichten sind hauptsächlich von Hrn. Quincke[1]) angestellt worden. Sie betreffen die elliptische Polarisation der reflectirten und durchgegangenen Wellen, wenn lineärpolarisirtes Licht auffällt, d. h. also das Verhältniss der Amplituden und die Differenz der Verzögerungen der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Componenten, auch in gewissen Fällen diese Amplituden und Verzögerungen selbst. Hauptsächlich die auf letztere bezüglichen Resultate sind so absonderlich und scheinbar in sich widerspruchsvoll, dass sie noch bis in neueste Zeit als unerklärlich angesehen worden sind.[2])

Die in Betracht kommenden Hauptpunkte sind folgende:

Beobachtungen mit dem Jamin'schen Interferentialrefractor[3]) haben sicher gestellt, dass die Verzögerung, welche eine Welle beim Durchgang durch dünne Silber- und Goldblättchen erfährt, geringer ist, als die dem gleichen Wege in Luft entsprechende.[4]) Hieraus schloss Hr. Quincke, dass in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Cauchy'schen Theorie der Metallreflexion für diese beiden Metalle der Brechungscoëfficient kleiner als Eins sein müsste. Aber an diesem Schlusse wurde er später irre durch die Bemerkung, dass der Werth der beobachteten Differenz der Verzögerungen grösser ist, als die ganze Verzögerung in Luft,

1) Quincke, Pogg. Ann. **119.** p. 368. 1863; **120.** p. 599. 1863; **129.** p. 177. 1866; **142.** p. 186. 1871.

2) S. z. B. Wüller, Physik, **2.** p. 557. 1883.

3) Quincke, Pogg. Ann. **119.** p. 382. 1863; **120.** p. 602. 1863.

4) Dass einzelne Präparate sich anders verhielten, ist nach Hrn. Wernicke's werthvollen Untersuchungen nicht durch eine besondere Modification, sondern ganz einfach durch ein nicht vollständig dichtes Gefüge des Niederschlages zu erklären (vgl. W. Wernicke, Pogg. Ann. Ergbd. **8.** p. 78 u. f. 1878).

woraus man auf einen „unmöglichen, nämlich negativen Brechungscoëfficienten" schliessen müsste[1]), wenn man nicht annehmen wollte, „dass beim Eintritt oder Austritt an der Grenze Metall—Luft eine Beschleunigung stattfände.[2])" Hr. W. Wernicke[3]) hat sich später ebenfalls gegen die Folgerung erklärt, dass die Brechungsindices für Gold und Silber kleiner als Eins wären, und aus Beobachtungen über die Absorption des Lichtes in Silberlamellen einen Werth der Brechungscoëfficienten zwischen 3 und 5 geschlossen. Dieser Schluss ist zwar unrichtig, denn er basirt darauf, dass, wenn bei normalem Durchgang durch eine Schicht die resultirende Amplitude proportional mit $e^{-\nu}$ ist, sie bei schiefem proportional mit $e^{-\nu/\cos r}$ wäre, wo r den Brechungswinkel bezeichnet, und dies ist eine durchaus willkürliche Annahme, aber jedenfalls ist die erwähnte Quincke'sche Beobachtung hinsichtlich ihrer Deutung noch bestritten, und es scheint an der Zeit, den Vorgang mit der Theorie zu verfolgen und womöglich aufzuklären.

Minder zweifelhaft ist ein anderer Punkt. Hr. Quincke hat an keilförmigen sehr dünnen Metalllamellen sowohl im reflectirten, als im durchgegangenen Lichte abwechselnde Maxima und Minima der Intensität beobachtet und erklärt sie für sogenannte Newton'sche Farbenstreifen.[4]) Gegen diese Erklärung nimmt aber schon die blosse Betrachtung der Messungen an diesen Streifen ein, aus welchen Hr. Quincke Brechungscoëfficienten des Silbers zwischen 6 und 12 ableitet; denn dieselbe Farbe zeigte sich an verschiedenen Präparaten bei durchaus verschiedenen Dicken der Schicht, die bei Silber für das dritte Minimum von 0,036 bis 0,061 mmm variirten. In der That hat später Hr. Wernicke[5]) beobachtet, dass bei den chemisch niedergeschlagenen keilförmigen Metallschichten dickere und dünnere Stellen miteinander abwechselnd auftreten, dass diese dickeren Stellen wegen ge-

---

1) Quincke, Pogg. Ann. **129.** p. 187. 1866.
2) Quincke, Pogg. Ann. **142.** p. 186. 1871.
3) Wernicke, Pogg. Ann. **155.** p. 94. 1875.
4) Quincke, Pogg. Ann. **129.** p. 185 u. f. 1866.
5) Wernicke, Fortschritte der Physik. **27.** p. 420. 1876.

ringerer Durchsichtigkeit mehr Licht reflectiren als die dünneren und demgemäss im reflectirten Licht die Maxima, im durchgelassenen die Minima hervorbringen. Was ich durch Hrn. Quincke's Güte von keilförmigen Silberschichten gesehen und untersucht habe, lässt mich dieser Auffassung beistimmen. Für die Theorie bliebe also in dieser Hinsicht nur die Frage zu beantworten, ob und warum die Metalle die Newton'schen Farben nicht zu zeigen vermögen.

Endlich erscheint es wünschenswerth, Gesetze abzuleiten, welche die Beobachtungen über die elliptische Polarisation des durchgegangenen Lichtes mit der Theorie zu vergleichen gestatten, soweit das bei der sehr unsicheren Bestimmung der Dicke der benutzten Metallschichten und dem Mangel an sicheren Constanten für die Substanzen durchführbar ist.

Die früher von mir entwickelte Theorie der Absorption des Lichtes in isotropen Medien[1]) hat u. a. die Resultate ergeben, dass eine ebene Welle mit durchweg gleicher Amplitude sich nach dem Gesetze für die Verrückung fortpflanzt:

$$(1_a) \qquad u = A\, e^{-\frac{\varkappa z}{\tau \omega_1}} \sin \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega_1} + \vartheta_z\right),$$

wo ω_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und $\varkappa$ der Absorptionsindex sich durch die Constanten A_1, M_1, b und c des Mediums ausdrücken gemäss den Gleichungen:[2])

$$(1_b) \qquad \begin{cases} M_1 \omega_1^2 = A_1 (1 - \varkappa^2) + 2 \varkappa c_1 \\ b_1 \omega_1^2 = 2 \varkappa A_1 - c_1 (1 - \varkappa^2). \end{cases}$$

worin $c_1 = c/\tau$, $b_1 = b\,.\,\tau$ und $2\pi\tau = T$, d. i. gleich der Schwingungsdauer ist.

Eine ebene Welle mit nicht constanter, sondern in gewisser Weise variirender Amplitude gibt die allgemeinere Lösung:

$$(2_a) \qquad u = A\, e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau \omega_1}} \sin \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} + \vartheta_x\right),$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 6. p. 137. 1884.
2) l. c. p. 141.

worin gilt:[1])

$$(2_b)\quad \begin{cases} 1 - \varkappa^2 = \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 \\ \varkappa = \beta_1 \gamma_1 . \end{cases}$$

Die Gesetze der Reflexion und Brechung, im Falle einem durchsichtigen Medium eine ebene Welle auf die e Grenze (gegeben durch $z = 0$) des absorbirenden auf drückten sich bei Einführung der Abkürzungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma_s = \dfrac{A_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1}{M \omega_1^2 \gamma_1} & \delta_s = \dfrac{c_1 \gamma_1 - A_1 \beta_1}{M \omega_1^2 \gamma_1} \\ \sigma_p = \dfrac{\gamma_1 (M_1 \gamma_1 + b_1 \beta_1)}{M(\gamma_1^2 + \beta_1^2)} & \delta_p = \dfrac{\gamma_1 (M_1 \beta_1 - b_1 \gamma_1)}{M(\gamma_1^2 + \beta_1^2)} \end{cases}$$

bequem durch die Hülfswinkel μ_s, ν_s, μ_p, ν_p aus, die de waren durch[2]):

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} \mu_s = \dfrac{\alpha_1 \gamma_1 \delta_s}{\alpha \gamma + \alpha_1 \gamma_1 \sigma_s} & \operatorname{tg} \nu_s = \dfrac{\alpha_1 \gamma_1 \delta_s}{\alpha \gamma - \alpha_1 \gamma_1 \sigma_s} \\ \operatorname{tg} \mu_p = \dfrac{\alpha_1 \gamma \delta_p}{\alpha \gamma_1 + \alpha_1 \gamma \sigma_p} & \operatorname{tg} \nu_p = \dfrac{\alpha_1 \gamma \delta_p}{\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma \sigma_p} . \end{cases}$$

Hierin ist α der Sinus, γ der Cosinus des Einfallswin α_1 daraus bestimmt durch $\alpha : \alpha_1 = \omega : \omega_1$, worin ω, die I pflanzungsgeschwindigkeit im durchsichtigen Medium, d dessen Constanten M und A gegeben ist:

$$M \omega^2 = A;$$

aus α_1 folgt dann nach (2_b) β_1 und γ_1. Für die reflect (R) und gebrochenen (D) Amplituden senkrecht (s) parallel (p) der Einfallsebene, welche als XZ-Ebene ged ist, folgten dann die Werthe:

$$(5)\quad \begin{cases} R_s' = \dfrac{\sin \mu_s \cos(\mu_s + \nu_s)}{\sin \nu_s} E_s, & R_s'' = - \dfrac{\sin \mu_s \sin(\mu_s + \nu_s)}{\sin \nu_s} \\ D_s' = \dfrac{\cos \mu_s \sin(\mu_s + \nu_s)}{\sin \nu_s} E_s, & D_s'' = - \dfrac{\sin \mu_s \sin(\mu_s + \nu_s)}{\sin \nu_s} \\ R_s^2 = R_s'^2 + R_s''^2 = E_s^2 \left(\dfrac{\sin \mu_s}{\sin \nu_s}\right)^2 \\ D_s^2 = D_s'^2 + D_s''^2 = E_s^2 \left(\dfrac{\sin(\mu_s + \nu_s)}{\sin \nu_s}\right)^2 , \end{cases}$$

1) l. c. p. 144

2) l. c. p. 147 u. 151.

wenn gesetzt ist die Verrückung für die einfallende Welle:

$$v_e = E_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right),$$

für die reflectirte und gebrochene:

$$v_r = R_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right)$$

$$v_1 = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left[D_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + D_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right];$$

ferner:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} R_p' = \dfrac{\sin\mu_p \cos(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p, \quad R_p'' = -\dfrac{\sin\mu_p \sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ D_p' = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}\cdot\dfrac{\cos\mu_p \sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p, \quad D_p'' = -\dfrac{\gamma}{\gamma_1}\cdot\dfrac{\sin\mu_p \sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ \qquad R_p^2 = R_p'^2 + R_p''^2 = E_p^2\left(\dfrac{\sin\mu_p}{\sin\nu_p}\right)^2 \\ \qquad D_p^2 = D_p'^2 + D_p''^2 = E_p^2\left(\dfrac{\gamma}{\gamma_1}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p}\right)^2, \end{array}\right.$$

wenn ähnlich, wie oben, gesetzt ist für die Componente parallel der X-Axe:

$$u_e = E_p\gamma \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right)$$

$$u_r = R_p'\gamma \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R_p''\gamma \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega_1}\right)$$

$$u_1 = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\gamma_1\left[D_p' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + D_p'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega}\right)\right]$$

und hieraus w_e, w_r, w_1 gemäss der Relation:

$$(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

bestimmt wird.

Diese Formeln sind behufs Vergleichung mit den für eine Schicht eines beliebigen absorbirenden isotropen Mediums gültigen vorangestellt, zu deren Ableitung wir nunmehr übergehen.

Das durchsichtige Medium (0), in welchem sich die einfallende Welle befindet (z. B. Luft) erstrecke sich von $z = -\infty$ bis $z = 0$; auf dasselbe beziehen sich die Buchstaben ohne

Index (z. B. α, γ, A, ω, u, v, w). Das zweite, absorbirende (1) erstrecke sich von $z = 0$ bis $z = l$; für dasselbe gelte der untere Index $_1$ (z. B. in α_1, γ_1, A_1, ω_1, u_1, v_1, w_1). Das dritte, wiederum durchsichtige (2) reiche von $z = l$ bis $z = \infty$, und die auf dasselbe bezüglichen Grössen seien durch den oberen Index $'$ ausgezeichnet (z. B. α', γ', A', ω', u', v', w').

I. Ich betrachte zuerst die Componenten normal zur Einfalls- d. h. der XZ-Ebene.

Im ersten Medium ist $v = v_e + v_r$,
im zweiten $v_1 = v_\delta + v_\varrho$,
im dritten $v' = v_d$, und zwar sei:

$$(8)\quad\begin{cases} v_e = E_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right) \\ v_r = R_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) \\ v_\delta = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left(\Delta_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + \Delta_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right) \\ v_\varrho = e^{+\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left(P_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + P_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right). \\ v_d = D_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\right) + D_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\right). \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen sind:

$$(9)\quad\begin{cases} \text{für } z = 0: \overline{v} = \overline{v_1}, & A\,\overline{\frac{\partial v}{\partial z}} = A_1 \overline{\frac{\partial v_1}{\partial z}} + c\,\overline{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z\,\partial t}}, \\ \text{für } z = l: \overline{v_1} = \overline{v'}, & A_1 \overline{\frac{\partial v_1}{\partial z}} + c\,\overline{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z\,\partial t}} = A'\,\overline{\frac{\partial v'}{\partial z}}. \end{cases}$$

Die sehr complicirten Resultate dieser Gleichungen schreibe ich unter Anwendung der früheren und einiger neuer Hülfsgrössen:

$$(10)\quad\begin{cases} \sigma_s = \frac{c_1\beta_1 + A_1\gamma_1}{\gamma_1 M \omega_1^2}, & \delta_s = \frac{c_1\gamma_1 - A_1\beta_1}{\gamma_1 M \omega_1^2}, \\ \operatorname{tg} \mu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1\sigma_s}, & \operatorname{tg} \nu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \\ \operatorname{tg} \mu_s' = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta}{\alpha'\gamma' + \alpha_1\gamma_1\sigma_s}, & \operatorname{tg} \nu_s' = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha'\gamma' - \alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \\ \frac{l\beta_1}{\tau\omega_1} = k, & \frac{l\gamma_1}{\tau\omega_1} = h. \end{cases}$$

Man erhält für die beobachtbaren Grössen R und D, deren Werthe ich allein mittheile:

$$R'_s = E_s\,[(\sin^2\nu'_s\,e^{+2k} + \sin^2\mu'_s\,e^{-2k})\sin\mu_s\sin\nu_s\cos(\mu_s+\nu_s)$$
$$-(\sin^2\nu_s + \sin^2\mu_s)\sin\mu'_s\sin\nu'_s\cos(h+\mu'_s+\nu'_s)],$$

$$R''_s = -E_s\,[(\sin^2\nu'_s\,e^{+2k} - \sin^2\mu'_s\,e^{-2k})\sin\mu_s\sin\nu_s\sin(\mu_s+\nu_s)$$
$$-(\sin^2\nu_s - \sin^2\mu_s)\sin\mu'_s\sin\nu'_s\sin(h+\mu'_s+\nu'_s)],$$

$$D'_s = -E_s\sin(\mu_s+\nu_s)\,[\sin\nu_s\sin\nu'_s(\sin\mu'_s\cos(h+\mu_s+\mu'_s+\nu'_s) - \sin\nu'_s\cos(h+\mu_s))\,e^{+k}$$
$$+\sin\mu_s\sin\mu'_s(\sin\nu'_s\cos(h+\nu_s+\mu'_s+\nu'_s) - \sin\mu'_s\cos(h+\nu_s))\,e^{-k}],$$

$$D''_s = +E_s\sin(\mu_s+\nu_s)\,[\sin\nu_s\sin\nu'_s(\sin\mu'_s\sin(h+\mu_s+\mu'_s+\nu'_s) - \sin\nu'_s\sin(h+\mu_s))\,e^{+k}$$
$$-\sin\mu_s\sin\mu'_s(\sin\nu'_s\sin(h+\nu_s+\mu'_s+\nu'_s) - \sin\mu'_s\sin(h+\nu_s))\,e^{-k}],$$

rin ist:

$$\ldots_s = \sin^2\nu_s\sin^2\nu'_s\,e^{+2k} + \sin^2\mu_s\sin^2\mu'_s\,e^{-2k}$$
$$-2\sin\mu_s\sin\nu_s\sin\mu'_s\sin\nu'_s\cos(2h+\mu_s+\nu_s+\mu'_s+\nu'_s)$$

II. Ebenso nun die Componenten parallel der Einfallsebene.

Es sei wiederum:

$$u = \gamma(r_e + r_r), \qquad w = -\alpha(r_e - r_r),$$

$$r_e = E_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right),$$

$$r_r = R'_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R''_p \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right),$$

$$u_1 = u_\delta + u_\varrho, \qquad w_1 = w_\delta + w_\varrho,$$

$$(12)\quad u_\delta = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\gamma_1\left(\Delta'_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + \Delta''_p \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right),$$

$$u_\varrho = e^{+\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\gamma_1\left(P'_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + P''_p \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right),$$

$$w_\delta = -e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2}\Bigg((\Delta'_p\gamma_1 - \Delta''_p\beta_1)\sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)$$
$$+(\Delta'_p\beta_1 + \Delta''_p\gamma_1)\cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\Bigg),$$

$$
(12)\begin{cases}
w_\varrho = e^{+\frac{\beta_1 z}{\tau \omega_1}} \dfrac{\alpha_1 \gamma_1}{\beta_1^2 + \gamma_1^2}\Big((P_p' \gamma_1 - P_p'' \beta_1)\sin\frac{1}{\tau}\Big(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\Big) \\
\qquad + (P_p' \beta_1 + P_p'' \gamma_1)\cos\frac{1}{\tau}\Big(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\Big), \\
u' = \gamma' r_d, \qquad w' = -\alpha' r_d, \\
r_d = D_p' \sin\frac{1}{\tau}\Big(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\Big) + D_p'' \cos\frac{1}{\tau}\Big(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\Big).
\end{cases}
$$

Die Grenzbedingungen sind:

$$
(13)\begin{cases}
\text{für } z = 0: \quad \bar u = \bar u_1, \quad M\bar w = M_1 \bar w_1 - b\tau^2 \dfrac{\overline{\partial w_1}}{\partial t}, \\
\text{für } z = l: \quad \bar u_1 = \bar u', \quad M_1 \bar w_1 - b\tau^2 \dfrac{\overline{\partial w_1}}{\partial t} = M' \bar w'.
\end{cases}
$$

Durch Einsetzen von $M = M_1 = M'$ und $b = 0$ gibt dies die gewöhnliche Neumann'sche Form, die bei der numerischen Berechnung unten vorausgesetzt ist.

Folgende Abkürzungen führe ich wiederum ein:

$$
(14)\begin{cases}
\dfrac{\gamma_1 (M_1 \gamma_1 + b_1 \beta_1)}{M(\gamma_1^2 + \beta_1^2)} = \sigma_p, & \dfrac{\gamma_1 (M_1 \beta_1 - b_1 \gamma_1)}{M(\gamma_1^2 + \beta_1^2)} = \delta_p, \\
\operatorname{tg} \mu_p = \dfrac{\alpha_1 \gamma \delta_p}{\alpha \gamma_1 + \alpha_1 \gamma \sigma_p}, & \operatorname{tg} \nu_p = \dfrac{\alpha_1 \gamma \delta_p}{\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma \sigma_p}, \\
\operatorname{tg} \mu_p' = \dfrac{\alpha_1 \gamma' \delta_p}{\alpha' \gamma_1 + \alpha_1 \gamma' \sigma_p}, & \operatorname{tg} \nu_p' = \dfrac{\alpha_1 \gamma' \delta_p}{\alpha' \gamma_1 - \alpha_1 \gamma' \sigma_p}, \\
\dfrac{l \beta_1}{\tau \omega_1} = k, & \dfrac{l \gamma_1}{\tau \omega_1} = h.
\end{cases}
$$

Dann schreiben sich die Resultate:

$$
(15)\begin{cases}
\Pi_p R_p' = E_p [(\sin^2 \nu_p' e^{+2k} + \sin^2 \mu_p' e^{-2k}) \sin \mu_p \sin \nu_p \cos(\mu_p + \nu_p) \\
\qquad - (\sin^2 \nu_p + \sin^2 \mu_p) \sin \mu_p' \sin \nu_p' \cos(2h + \mu_p' + \nu_p')] \\
\Pi_p R_p'' = -E_p [(\sin^2 \nu_p' e^{+2k} - \sin^2 \mu_p' e^{-2k}) \sin \mu_p \sin \nu_p \sin(\mu_p + \nu_p) \\
\qquad - (\sin^2 \nu_p - \sin^2 \mu_p) \sin \mu_p' \sin \nu_p' \sin(2h + \mu_p' + \nu_p')] \\
\Pi_p D_p' = -E_p \dfrac{\gamma}{\gamma'} \sin(\mu_p + \nu_p) [\sin \nu_p \sin \nu_p' (\sin \mu_p' \cos(h + \mu_p + \mu_p' + \nu_p') - \sin \nu_p' \cos(h + \mu_p)) e^{k} \\
\qquad + \sin \mu_p \sin \mu_p' (\sin \nu_p' \cos(h + \nu_p + \mu_p' + \nu_p') - \sin \mu_p' \cos(h + \nu_p)) e^{-k}] \\
\Pi_p D_p'' = E_p \dfrac{\gamma}{\gamma'} \sin(\mu_p + \nu_p) [\sin \nu_p \sin \nu_p' (\sin \mu_p' \sin(h + \mu_p + \mu_p' + \nu_p') - \sin \nu_p' \sin(h + \mu_p)) e^{k} \\
\qquad - \sin \mu_p \sin \mu_p' (\sin \nu_p' \sin(h + \nu_p + \mu_p' + \nu_p') - \sin \mu_p' \sin(h + \nu_p)) e^{-k}] \\
\Pi_p = \sin^2 \nu_p \sin^2 \nu_p' e^{+2k} + \sin^2 \mu_p \sin^2 \mu_p' e^{-2k} \\
\qquad - 2 \sin \mu_p \sin \nu_p \sin \mu_p' \sin \nu_p' \cos(2h + \mu_p + \nu_p + \mu_p' + \nu_p')
\end{cases}
$$

Die Formeln (11) und (15) enthalten die Lösung des gestellten Problems; sie gehen für verschwindende Absorption in die früher von mir für eine Schicht einer durchsichtigen Substanz aufgestellten über.[1])

III. Zur Vergleichung mit den an Metallschichten angestellten Beobachtungen bilden wir zunächst die Werthe der Intensitäten beider Componenten des reflectirten Lichtes; betrachtet man die einfallenden als durch E_s^2 und E_p^2 gegeben, so sind jene gemessen durch:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} R^2 &= R'^2 + R''^2 \\ &= E^2 \frac{(\sin\mu \sin\nu' e^{+k} - \sin\mu' \sin\nu\, e^{-k})^2 + 4\sin\mu \sin\nu \sin\mu' \sin\nu' \sin^2 \tfrac{1}{2}\big(2h + (\mu' + \nu') - (\mu + \nu)\big)}{(\sin\nu \sin\nu' e^{+k} - \sin\mu \sin\mu' e^{-k})^2 + 4\sin\mu \sin\nu \sin\mu' \sin\nu' \sin^2 \tfrac{1}{2}\big(2h + (\mu' + \nu') + (\mu + \nu)\big)}, \end{aligned} \right.$$

wo nun rechts und links, jenachdem es sich um Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt handelt, die Indices p oder s anzubringen sind.

Diese Formel zeigt — was an sich einleuchtend ist —, dass die an einer Metallschicht reflectirten Intensitäten in derselben Weise mit wachsender Dicke der Schicht abwechselnd Maxima und Minima erreichen, wie die an einer dünnen Schicht einer durchsichtigen Substanz reflectirten, dass also eine keilförmige Schicht eines Metalles das Newton'sche Phänomen zeigen müsste. Indessen ist nicht nothwendig, dass dasselbe stets in einer für die Beobachtung merklichen Intensität eintritt, denn das mit der Dicke der Schicht periodische Glied erhält in Zähler und Nenner den Factor e^{-2k}, wenn man den Ausdruck nach Potenzen dieser Grösse ordnet, wird also, da $k = 2\pi l \beta_1 / \lambda_1$ ist, mit wachsender Dicke schnell an Einfluss verlieren.

Die reflectirten Intensitäten durchlaufen nahezu eine volle Periode während h, d. h. $2\pi l \gamma_1 / \lambda_1$ um π, d. h. l um $\lambda_1 / 2\gamma_1$ wächst; ist also die Absorption der Substanz so stark, dass e^{-2k} unmerklich ist, noch bevor l um $\lambda_1 / 2\gamma_1$, d. h. $2k$ um $2\pi \beta_1 / \gamma_1$ gewachsen ist, so wird eine keilförmige Schicht von derselben keinen einzigen dunkeln oder hellen Inter-

1) W. Voigt, Wied. Ann. **22**, p. 226. 1884.

ferenzstreifen zeigen. Diese Voraussetzung ist aber bei den Metallen, die bis jetzt in dünnen Schichten beobachtet sind, nämlich Gold und Silber, in vollem Maasse erfüllt. Die Grösse β_1 fällt bei normalem Einfall mit dem Absorptionsindex $\varkappa$ zusammen und ist bei schiefem Einfall von derselben Ordnung, da γ_1 nicht sehr von 1 verschieden ist, $\varkappa$ aber hat nach den früher berechneten Quincke'schen Beobachtungen[1]) für Gold den Werth 8,8 für Silber 15,0 — $2\pi\beta_1/\gamma_1$ ist also resp. von der Ordnung 54 und 93, und daher eine keilförmige Schicht aus diesen Substanzen lange vor dem ersten Minimum als undurchsichtig zu betrachten. Dies ist in Uebereinstimmung mit den oben besprochenen Beobachtungen Wernicke's[2]) und den Folgerungen Jochmann's aus der Cauchy'schen Theorie der Metallreflexion.[3])

Um eine Vorstellung von dem Verlauf der durch (16) bestimmten Werthe zu geben, werde ich die reflectirten Amplituden für verschieden dicke Schichten von Silber, welches auf Glas niedergeschlagen ist, und für den Einfallswinkel 72° berechnen, weil Beobachtungen von Hrn. Quincke vorhanden sind, welche einen Theil der Resultate zu vergleichen gestatten. Da sich aus diesen Beobachtungen aber nicht die den betreffenden Silberplatten entsprechenden Constanten n und $\varkappa$ berechnen lassen, muss ich diejenigen Werthe derselben benutzen, die ich früher aus anderen Quincke'schen Beobachtungen abgeleitet habe[4]), nämlich:

$$\varkappa = 15{,}0\,, \qquad n = 0{,}23\,,$$

obgleich dadurch die Vergleichung an Sicherheit verliert. Den Brechungscoëfficienten der benutzten Glasplatten gibt Hr. Quincke selbst zu 1,538 an.[5])

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 6, p. 162 u. 168. 1884.

2) Wernicke, Fortschr. d. Phys. 27. p. 420. 1876.

3) Jochmann, Pogg. Ann. Ergb. 5. p. 620. 1871.

4) W. Voigt, l. c. p. 162.

5) Diese wie die folgenden Berechnungen sind sämmtlich mit dem vortrefflichen Mannheimer'schen Rechenschieber angestellt, also die Resultate der complicirten Operationen in der dritten Ziffer nicht mehr sicher. Diese Genauigkeit genügt indess für den vorliegenden Zweck durchaus.

Die in (10) und (14) definirten Hülfsgrössen σ, δ, μ und ν erhalten dadurch folgende Werthe:

$$\sigma_s = 0{,}00505, \quad \delta_s = 0{,}0710, \quad \sigma_p = 0{,}00384, \quad \delta_p = 0{,}0617,$$
$$\mu_s = 42^0\ 5', \quad \nu_s = 47^0\,50', \quad \mu_p = 4^0\,53', \quad \nu_p = 4^0\,56',$$
$$\mu_s' = 29\ \ 12, \quad \nu_s' = 31\ \ 18, \quad \mu_p' = 18\ \ 10, \quad \nu_p' = 18\ \ 53.$$

Nimmt man nun die Dicke l der Silberschicht in Tausendstelmillimetern successive gleich:

$$l = 0 \quad 0{,}014 \quad 0{,}024 \quad 0{,}040 \quad 0{,}047 \quad 0{,}055 \quad 0{,}067 \quad 0{,}075 \quad \infty,$$

so erhält man die reflectirten Intensitäten $\mathfrak{R}_s^2$ und $\mathfrak{R}_p^2$, welche der einfallenden Intensität Eins entsprechen:

$$\mathfrak{R}_s^2 = 0{,}060 \quad 0{,}224 \quad 0{,}433 \quad 0{,}667 \quad 0{,}730 \quad 0{,}768 \quad 0{,}796 \quad 0{,}805 \quad 0{,}818,$$
$$\mathfrak{R}_p^2 = 0{,}355 \quad 0{,}738 \quad 0{,}879 \quad 0{,}950 \quad 0{,}963 \quad 0{,}969 \quad 0{,}977 \quad 0{,}978 \quad 0{,}980.$$

Construirt man diese Werthe, so erhält man zwei stetig ansteigende Curven, die in ihrem ganzen Verlauf weder Maximum noch Minimum zeigen.

Ueber diese Werthe sind nun zwar keine Beobachtungsresultate vorhanden, aber das Verhältniss der Amplituden:

$$\varrho_r = \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \operatorname{tg} \psi_r$$

ist von Hrn. Quincke für die angegebenen Werthe der Schichtdicke bestimmt.[1])

Die obigen Zahlen geben:

$$\varrho_r = 0{,}412 \quad 0{,}551 \quad 0{,}702 \quad 0{,}838 \quad 0{,}870 \quad 0{,}890 \quad 0{,}903 \quad 0{,}908 \quad 0{,}914,$$
$$\psi_r = 22^0\,25' \quad 28^0\,50' \quad 35^0\,5' \quad 39^0\,58' \quad 41^0\,0' \quad 41^0\,40' \quad 42^0\,5' \quad 42^0\,10' \quad 42^0\,30'.$$

Hr. Quincke gibt als vollständigste Beobachtungsreihe (LIV):

$$\psi_r = \ - \quad 21^0\,1' \quad 33^0\,58' \quad 58^0\,32' \quad 42^0\,38' \quad 43^0\,57' \quad 42^0\,43' \quad 43^0\,18' \quad -$$

Der erste beobachtete Zahlenwerth ist besonders unsicher, andere unvollständigere Beobachtungsreihen haben statt seiner Werthe bis 32⁰ ergeben. Die mittleren Zahlen beziehen sich auf Einfallswinkel, die etwas grösser als 72⁰ sind und sind daher etwas zu klein berechnet. Die Uebereinstimmung ist also eine sehr bedeutende und kann als eine neue Bestätigung der Theorie gelten.

Sind, wie bisher, die einfallenden Intensitäten durch E_s^2 und E_p^2 gemessen, so sind wegen der Verschiedenheit

1) Quincke, Pogg. Ann. **129.** p. 214 u. 215. 1866.

des ersten und dritten Mediums die Intensitäten der durchgegangenen Wellen nicht durch $D_s^2 = D_s'^2 + D_s''^2$ und $D_p^2 = D_p'^2 + D_p''^2$ gemessen, sondern durch $\alpha'\gamma'/\alpha\gamma\, D_s^2 = (D_s)^2$ und $\alpha'\gamma'/\alpha\gamma\, D_p^2 = (D_p)^2$. Für diese erhält man nach einigen Reductionen die Form:

$$(17)\left\{(D)^2 = E^2 \frac{\sin(\mu+\nu)\sin(\mu'+\nu')\,[\sin(\nu-\mu)\sin(\nu'-\mu') + 4\sin\mu\sin\nu\sin\nu'\sin\mu']}{(\sin\nu\sin\nu' e^{+k} - \sin\mu\sin\mu' e^{-k})^2 + 4\sin\mu\sin\nu\sin\mu'\sin\nu'\sin^2\tfrac{1}{2}(2h+\mu'+\nu'+\mu+\nu)}\right..$$

Hierin ist, jenachdem es sich um Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt handelt, auf beiden Seiten der Index p oder s anzufügen.

Man erkennt aus der letzten Formel, dass die Schwächung durch die absorbirende Lamelle (die sowohl in Reflexion als Absorption begründet ist) genau die gleiche ist, ob das Licht die drei Medien in der Reihenfolge 0, 1, 2 oder 2, 1, 0 durchläuft.

Fragen wir nach den Umständen, welche das Unmerklichwerden von $(D_s)^2$ und $(D_p)^2$ bedingen, so können wir uns im Nenner auf das grösste Glied beschränken und schreiben:

$$(18)\left\{\begin{aligned}(D)^2 = E^2 \frac{\sin(\mu+\nu)\sin(\mu'+\nu')}{\sin^2\nu\sin^2\nu'}\,[&\sin(\nu-\mu)\sin(\nu'-\mu') \\ &+ 4\sin\nu\sin\mu\sin\nu'\sin\mu']\,e^{-2k}.\end{aligned}\right.$$

Die Grössenordnung dieses Ausdruckes hängt in erster Linie von der Exponentialgrösse ab; ihr Exponent $2k$ ist $= 4\pi l\beta_1/\lambda_1 = 4\pi l\varkappa/\lambda_1\gamma_1$, also für $(D_s)^2$ und $(D_p)^2$ gleich und von dem bei normalem Durchgang, d. h. von $4\pi l\varkappa/\lambda_1$, nur durch den Nenner γ_1 verschieden. Die Grösse γ_1 bestimmt sich aus (2_b), sie ist also keineswegs, wie Hr. Wernicke angenommen hat, mit dem Cosinus des Brechungswinkels, d. h. $\sqrt{1-\alpha^2/n^2}$ identisch; demgemäss sind alle Folgerungen, welche Hr. Wernicke aus seinen Absorptionsbeobachtungen bei normaler und schiefer Incidenz zieht, hinfällig.[1]) Dass diese Beobachtungen mit meiner Theorie übereinstimmen, habe ich schon früher gelegentlich dargethan.[2]) Vorstehen-

---

1) S. oben p. 96.

2) W. Voigt, l. c. p. 163.

der Formel bedarf es zu der Berechnung dieser Beobachtungen nicht, weil sie so angestellt sind, dass die Schwächung durch die Reflexion an den beiden Grenzen der Metallschicht, welche durch den complicirten Factor der Exponentialgrösse gegeben ist, auf die Resultate nicht influirt.

Dieser Factor bestimmt in zweiter Linie die Grösse von $(D_s)^2$ und $(D_p)^2$ und ist für senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisirtes Licht verschieden. Für die Beobachtung bietet sich besonders das Verhältniss der beiden Amplituden $(D_s)/(D_p) = \varrho_d$, welches man direct erhält, wenn man das von einfallendem lineärpolarisirten herrührende, elliptisch polarisirte durchgehende Licht mit Hülfe eines Compensators wieder lineär macht. Meist wählt man das Azimuth des einfallenden Lichtes $= 45^0$, also $E_s = E_p$ und hat dann, wenn man sich wiederum, wie in Formel (18) auf das höchste Glied beschränkt, für dies Verhältniss:

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho_d^2 = \left(\dfrac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p}\right)^2 = \left(\dfrac{\sin\nu_p \sin\nu_p'}{\sin\nu_s \sin\nu_s'}\right)^2 \dfrac{\sin(\mu_s+\nu_s)\sin(\mu_s'+\nu_s')}{\sin(\mu_p+\nu_p)\sin(\mu_p'+\nu_p')} \\ \cdot \dfrac{\sin(\nu_s-\mu_s)\sin(\nu_s'-\mu_s') + 4\sin\nu_s\sin\mu_s\sin\nu_s'\sin\mu_s'}{\sin(\nu_p-\mu_p)\sin(\nu_p'-\mu_p') + 4\sin\nu_p\sin\mu_p\sin\nu_p'\sin\mu_p'}. \end{cases}$$

Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass, weil man nicht im dritten Medium selbst beobachten kann, wenn dasselbe vom ersten (Luft) verschieden ist, rechts noch ein Factor wegen des Ueberganges durch die letzte Grenze hinzuzufügen ist.

Ist die Metallschicht beiderseits direct mit Luft in Berührung, so hat man einfacher:

$$(20)\quad \varrho_d = \frac{\sin^2\nu_p \sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin^2\nu_s \sin(\mu_p+\nu_p)} \sqrt{\frac{\sin^2(\nu_s-\mu_s) + 4\sin^2\nu_s\sin^2\mu_s}{\sin^2(\nu_p-\mu_p) + 4\sin^2\nu_p\sin^2\mu_p}}.$$

Nach dieser Formel wären z. B. die Quincke'schen Beobachtungen über die elliptische Polarisation des durch ein Goldblättchen gegangenen Lichtes zu berechnen, wenn man annehmen dürfte, dass letzteres so dick gewesen ist, dass die von uns gemachte Vernachlässigung zulässig ist; wäre sie es nicht, so müssten die berechneten Werthe grösser als die beobachteten ausfallen. Ich gebe im Folgenden einige

darauf bezügliche Zahlenwerthe an, muss aber freilich, da Hrn. Quincke's Beobachtungen die Constanten n und $\varkappa$ für das benutzte Goldblättchen nicht abzuleiten gestatten, die bei einem ganz anderen Präparat früher erhaltenen[1]) n, $\varkappa$ und μ, ν anwenden, wodurch natürlich die Sicherheit der Vergleichung leidet.

Hrn. Quincke's Beobachtungen[2]) geben für die Einfallswinkel:

$$\varphi = 0^0 \quad 25^0 \quad 45^0 \quad 65^0$$

durch Interpolation die Werthe:

$$\varrho_d = 1{,}017 \quad 1{,}137 \quad 1{,}580 \quad 2{,}268;$$

obige Formel hingegen ergibt:

$$\varrho_d = 1{,}000 \quad 1{,}159 \quad 1{,}640 \quad 2{,}951.$$

Die beobachteten Werthe laufen den berechneten parallel, sind aber kleiner, das Blättchen ist also so dünn gewesen, dass die gemachte Vernachlässigung nicht zulässig ist; indess ist eine Benutzung der strengen Formel unmöglich, da Hr. Quincke die Dicke des benutzten Blättchens nicht angibt. Ein ganz ähnliches Resultat erhält man, wenn man die Beobachtungen Hrn. Quincke's an Licht, welches durch eine auf Glas niedergeschlagene Silberschicht hindurchgegangen ist[3]) nach der angenäherten Formel (19) berechnet.

Die strenge Formel (17) für die durchgegangenen Amplituden habe ich wiederum nur für die oben (p. 105) schon erwähnten Quincke'schen Beobachtungen berechnet, welche sich auf den Durchgang des Lichtes durch ein System verschieden dicker auf Glas niedergeschlagener Silberschichten bezieht.

Für die in Tausendtheilen von Millimetern gegebenen Dicken:

$$l = 0 \quad 0{,}014 \quad 0{,}024 \quad 0{,}040 \quad 0{,}047 \quad 0{,}055 \quad 0{,}067 \quad 0{,}075 \quad \infty$$

erhält man aus den oben angegebenen Hülfsgrössen die Intensitäten nach dem Durchgang durch das Silber (also im Glas) für die einfallende Intensität Eins:

---

1) W. Voigt, l. c. p. 168.
2) Quincke, Pogg. Ann. **119.** p. 373. 1863.
3) l. c. p. 375.

$(\mathfrak{D}_s)^2 =$ 0,940	0,662	0,411	0,154	0,0891	0,0504	0,0213	0,0119	0
$(\mathfrak{D}_p)^2 =$ 0,645	0,214	0,0864	0,0235	0,0128	0,00695	0,00286	0,00158	0.

Indessen sind die Beobachtungen erst nach dem Austritt aus der Glasplatte angestellt und beziehen sich daher auf Amplituden $\mathfrak{D}'_s$ und $\mathfrak{D}'_p$, welche gegeben sind durch:

$$\mathfrak{D}_s'^2 = (\mathfrak{D}_s)^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')\cos^2(\varphi - \varphi')}$$

$$\mathfrak{D}_p'^2 = (\mathfrak{D}_p)^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')},$$

worin $\varphi = 72^0$ der Winkel des Strahles gegen das Einfallsloth in Luft, $\varphi' = 38^0$ derjenige im Glas ist. Diese Werthe sind:

$\mathfrak{D}_s'^2 =$ 0,883	0,622	0,386	0,145	0,0838	0,0473	0,0200	0,0112	0
$\mathfrak{D}_p'^2 =$ 0,417	0,138	0,0557	0,0152	0,00827	0,00448	0,00185	0,00102	0.

Hieraus folgt demnach $\varrho'_d = \mathfrak{D}'_s / \mathfrak{D}'_p = \operatorname{tg} \psi'_d$:

$\varrho'_d =$ $1{,}45_5$	2,12	2,63	3,09	3,18	3,25	3,29	3,31	3,32
$\psi'_d =$ 55° 30′	64° 40′	69° 10′	72° 4′	72° 33′	72° 54′	73° 6′	73° 11′	73° 15′.

Für diese Grösse gibt Hr. Quincke in der oben benutzten Reihe:

$\psi'_d =$ —	64° 35′	67° 14′	70° 20′	70° 51′	71° 34′	70° 9′	69° 15′	(?) —
								72° 27′.

Die letzte Zahl erscheint unsicher, eine andere unvollständigere Beobachtungsreihe gibt den daruntergestellten Werth, welcher wesentlich besser stimmt. Auch diese Beobachtungen bestätigen die Theorie, soweit bei den unsicheren Werthen n und $\varkappa$ zu erwarten.

IV. Die bei der Reflexion stattfindenden Verzögerungen ε_s und ε_p sind gegeben durch:

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_s}{\tau} = -\frac{R''_s}{R'_s}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_p}{\tau} = -\frac{R''_p}{R'_p};$$

sie erhalten dieselben Werthe, wie bei einer Metallmasse von unendlicher Dicke, sobald e^{-2k} neben 1 zu vernachlässigen ist, sie erhalten kleinere Werthe, wenn diese Vernachlässigung nicht statthaben darf.

Die Verzögerungen beim Durchgang durch die Schicht, η_s und η_p, d. h. die Phasendifferenz derselben Wellenebene in den beiden Lagen im ersten und dritten Medium,

welche durch die Schnittpunkte einer Normalen auf
Schicht mit deren beiden Begrenzungsflächen hindurchgeh
sind analog gegeben durch:

$$(22) \qquad \operatorname{tg} \frac{\eta_s}{\tau} = -\frac{D_s''}{D_s'}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\eta_p}{\tau} = -\frac{D_p''}{D_p'}.$$

Vernachlässigt man hierin e^{-2k} neben 1, d. h. nimmt
dass eine Schicht von doppelter Dicke der benutzten
nahe undurchsichtig angesehen werden könne, so erhält m

$$(23) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\eta_s}{\tau} = \frac{\sin \mu_s' \sin (h + \mu_s + \mu_s' + \nu_s') - \sin \nu_s' \sin (h + \mu_s)}{\sin \mu_s' \cos (h + \mu_s + \mu_s' + \nu_s') - \sin \nu_s' \cos (h + \mu_s)} \\ \operatorname{tg} \frac{\eta_p}{\tau} = \frac{\sin \mu_p' \sin (h + \mu_p + \mu_p' + \nu_p') - \sin \nu_p' \sin (h + \mu_p)}{\sin \mu_p' \cos (h + \mu_p + \mu_p' + \nu_p') - \sin \nu_p' \cos (h + \mu_p)}. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass, selbst wenn man, wie hierbei geschel
ist, von mehrfachen inneren Reflexionen absieht, die b
Durchgang durch die Metallschicht auftretende Verzöger
keineswegs nur von dem zurückgelegten Weg abhängt (
man gewöhnlich durch $\gamma_1 l$ gegeben aussieht), sondern du
die Vorgänge beim Eintritt und Austritt durch die Gren
der Schicht mit bedingt wird und demgemäss für die C
ponenten parallel und normal zur Einfallsebene versch
den ist.

Da über die absolute Verzögerung beim Durchga
durch ein beiderseits mit Luft in Berührung stehen
Goldblatt Beobachtungen von Hrn. Quincke vorliegen,
will ich einige Werthe für η unter Benutzung der frü
berechneten Constanten für Gold:

$$\varkappa = 8{,}8 \qquad n = 0{,}28$$

und der daraus folgenden Werthe μ und ν angeben; d
ist dabei nochmals daran zu erinnern, dass die verschiede
Goldplatten je nach der Herstellung sich wesentlich v
schieden verhalten, die Benutzung der an einer erhalte
Constanten zur Darstellung der von anderen gezeigten
scheinungen also im hohen Grade unsicher ist.

Nehmen wir zunächst normalen Durchgang durch
Blättchen, so ist in obigen Formeln $h = l / \tau \omega_1 = 2 \pi l$
zu setzen.

Wählt man successive:

$$l/\lambda_1 = 1/24 \quad 1/12 \quad 1/6 \quad 1/4$$
$$= 0{,}041 \quad 0{,}083 \quad 0{,}167 \quad 0{,}250$$

erhält man für die absolute Verzögerung im Blättchen in heilen von 2π, d. h. wegen $\tau = T/2\pi$ für:

$$\eta_0/T = -0{,}074 \quad -0{,}032 \quad +0{,}067 \quad +0{,}133$$ [1])

ährend zugleich die Verzögerung auf demselben Wege aber Luft wäre:

$$l/\lambda = 0{,}147 \quad 0{,}296 \quad 0{,}597 \quad 0{,}893.$$

s findet hiernach in sehr dünnen Metallschichten beim senkchten Durchgang eine Beschleunigung statt. Hrn. uincke's Beobachtungen mit dem Interferentialrefractor ben die Differenz der Verzögerungen in Luft und Metall, d es ist nach den vorstehenden Zahlen begreiflich, dass bei einer Metalldicke, die er auf 1—2 Zehntel Wellenge in Luft schätzte[2]), doch einen Gangunterschied von rösserem Werth als diesem erhalten hat.

Aus diesen Quincke'schen Beobachtungen ist also kein inwand gegen die Theorie zu entnehmen, sie enthalten ielmehr eine neue Bestätigung derselben.

Für schiefen Einfall benutzen wir ebenfalls die früher erechneten Werthe für die μ und ν und erhalten für ein lättchen von der Dicke $l = \lambda_1/12$, für Licht senkrecht zur infallsebene polarisirt und für die Einfallswinkel:

$$\varphi = 0^0 \quad 25^0 \quad 45^0 \quad 65^0 \quad 85^0$$

ie Verzögerung beim Durchgang durch das Metall:

$$\eta_s/T = -0{,}032 \quad -0{,}002 \quad +0{,}013 \quad +0{,}087 \quad +0{,}250,$$

erner die bei Zurücklegung des gleichen Weges in Luft:

$$l\gamma/\lambda = 0{,}296 \quad 0{,}268 \quad 0{,}209 \quad 0{,}125 \quad 0{,}026,$$

lso die mit dem Interferentialrefractor beobachtbare Differenz der Verzögerungen in Streifenbreiten:

$$\zeta_s/T = -0{,}328 \quad -0{,}270 \quad -0{,}196 \quad -0{,}038 \quad +0{,}224.$$

Der letztere Werth geht also durch Null hindurch in das Entgegengesetzte über. Für Licht parallel der Einfallsebene polarisirt folgt ebenso für:

1) Für die kleinsten Dicken sind die Werthe nur rohe Annäherungen.
2) Quincke, Pogg. Ann. **119.** p. 382. 1863; **142.** p. 186. 1871.

φ	=	0°	25°	45°	65°	85°
η_p / T	=	−0,032	−0,048	−0,080	−0,102	−0,157
$l\gamma / \lambda$	=	0,296	0,268	0,209	0,125	0,026.

Also die gegenseitige Verzögerung:

ζ_p / T	=	−0,328	−0,311	−0,289	−0,227	−0,183.

Hr. Quincke hat bei einem Goldblättchen diese Werthe leider nicht bestimmt, sondern nur für eine auf Glas niedergeschlagene Silberschicht[1]); auf diese Beobachtungen wird unten eingegangen werden.

Die gegenseitige Verzögerung der beiden durchgegangenen Componenten ist gegeben für:

durch:

φ	=	0°	25°	45°	65°	85°
$(\eta_s - \eta_p) / T$	=	0	0,041	0,093	0,189	0,407

sie wächst also mit dem Einfallswinkel und scheint bei streifendem Einfall den Werth 0,5 zu erreichen.

Diese gegenseitige Verzögerung ist durch Beobachtung der elliptischen Polarisation des durchgegangenen Lichtes ebenfalls direct zu bestimmen. Hr. Quincke[2]) hat eine so gewonnene Werthreihe mitgetheilt; da aber die Dicke des benutzten Goldblättchens nicht angegeben ist — sondern nur ein gelegentlich von Warren de la Rue und Faraday mitgetheilter Werth über seine Grössenordnung —, so ist eine numerische Vergleichung nicht möglich; Vorzeichen und Gang der Zahlen ist aber genau der oben vermerkte; man erhält nämlich durch Interpolation aus den beobachteten Zahlen unter der Einführung unserer Einheiten für:

φ	=	0°	25°	45°	65°	(75°)
$(\eta_s - \eta_p) / T$	=	0	0,015	0,070	0,165	(0,245).

Dass Hr. Quincke nie grössere Gangunterschiede als 0,25 beobachtet hat[3]), rührt daher, dass er in Luft keine grösseren Einfallswinkel als 75° angewandt hat; die Werthe wachsen nach unseren Formeln nahe 90° sehr schnell mit dem Einfallswinkel.

1) Quincke, Pogg. Ann. **120**. p. 602. 1863.
2) Quincke, Pogg. Ann. **119**. p. 373. 1863.
3) l. c. p. 370.

Endlich will ich noch nach der angenäherten Formel (23) die Verzögerungen berechnen, die beim Durchgang durch eine einerseits von Luft, andererseits von Glas vom Brechungscoëfficienten 1,54 begrenzte Silberschicht von der Dicke 0,00015 mm bei verschiedenen Einfallswinkeln eintreten, über welche Beobachtungen von Hrn. Quincke[1]) vorliegen. Ich benutze dazu die obigen Werthe der Constanten $n = 0{,}23$, $\varkappa = 1{,}50$ und solche Einfallswinkel, für welche die μ und ν schon früher bestimmt waren, sodass nur μ' und ν' neu zu berechnen sind.

Die aus (23) folgenden Werthe sind für die Einfallswinkel:

$\varphi =$	0°	25°	45°	65°	72°
$\eta_s/T =$	−0,074	−0,067	−0,048	−0,010	+0,015
$\eta_p/T =$	−0,074	−0,081	−0,095	−0,114	−0,121.

Die Beobachtungen beziehen sich auf die Differenz dieser Werthe und der Verzögerung auf dem gleichen Werthe in Luft $l\gamma/\lambda$, für welche man erhält:

$l\gamma/\lambda =$	0,250	0,227	0,177	0,106	0,077.

Nennt man die Differenzen wieder ζ_s/T und ζ_p/T, so erhält man:

$\zeta_s/T =$	−0,324	−0,294	−0,225	−0,116	−0,062
$\zeta_p/T =$	−0,324	−0,308	−0,292	−0,220	−0,198.

Diese Zahlen sind unmittelbar die Bruchtheile der Streifenbreiten, um welche bei Hrn. Quincke's Beobachtungen mit dem Interferentialrefractor durch die Wirkung der eingeschobenen Silberplatte das Interferenzbild verschoben wurde. Die Beobachtungen, welche nach Hrn. Quincke's Bemerkung nicht über 0,1 Streifenbreiten sicher waren, gaben für die Einfallswinkel:

$\varphi =$	0°	20°	30°	50°	60°	70°

im Mittel:

---

1) Quincke, Pogg. Ann. **120**. p. 602. 1863; Hr. Quincke gibt die Dicke der Silberschicht auf 0,000 122 bis 0,000 179 mm an, es bleibt da also eine beträchtliche Unsicherheit und ist denkbar, dass die verschiedenen Einfallswinkeln entsprechenden Beobachtungen an verschieden dicken Stellen angestellt sind.

[illegible] $T =$	−0.25	−0.30	−0.30	−0.23	−0.15	−0.10	−0.00
[illegible] $T =$	−0.25	−0.32	−0.35	−0.30	−0,25	−0,15	−0,10.

Die Differenz erreicht nie die Grösse der möglichen Beobachtungsfehler; die Uebereinstimmung ist also eine vollkommene.

Göttingen, November 1884.

VIII. *Notiz über einen empfindlichen Duplicator; von Julius Elster und Hans Geitel.*

(Hierzu Taf. I Fig. 8.)

Es ist eine bekannte Thatsache, dass sich auflösende Wasserstrahlen durch influenzirende Kräfte leicht electrisirt werden können. Man kann diesen Umstand benutzen, mit den einfachsten Mitteln einen Duplicator zu construiren, der gestattet, durch die Influenz der freien Spannung an den Polen eines Daniell'schen Elementes die Ladung eines kleinen Conductors bis zur Funkenerscheinung zu steigern.

In Fig. 8 ist derselbe in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse dargestellt. Zwei aus den Ausflussröhren S und S' austretende, feine Wasserstrahlen treffen die durch die Tischchen TT' isolirten Blechgefässe AA'. Der Metallring R' ist durch einen Messingbügel leitend mit dem Gefässe A verbunden, der Ring R isolirt und mit dem einen Pole, etwa dem positiven, eines Daniell'schen Elementes, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet ist, durch einen Kupferdraht in Verbindung gesetzt. Die positive Ladung des Ringes R wirkt influenzirend auf die Tropfen des aus S austretenden Strahles, und zwar derartig, dass dieselben, mit negativer Ladung behaftet, in das Gefäss A hinabfallen. Dadurch wird das Gefäss A schwach negativ geladen, aber bekanntlich zu einer bei weitem höheren Spannung, als der Ring R besitzt. Der mit A verbundene Ring R' wirkt nun influenzirend auf den aus S' austretenden Strahl, und zwar bereits so stark, dass ein mit A' verbundenes Goldblattelectroskop nach kurzer Zeit das Maximum der Divergenz zeigt und eine kleine Leydener Flasche bis auf eine geringe Schlagweite geladen werden kann.

Verbindet man R mit dem negativen Pole des Elementes und leitet den positiven zur Erde ab, so nimmt A' negative Electricität an. Das Gefäss A' besitzt daher stets die zum nichtabgeleiteten Pole gleichnamige Electricität.

Der Apparat functionirt mit grosser Regelmässigkeit, sobald man dafür sorgt, dass nicht zufällig irgend eine wenn auch noch so schwache Electricitätsquelle, z. B. mit der Hand berührte Kautschukschläuche, sich in der Nähe der Strahlen befindet.

Es sei noch bemerkt, dass eine wenn auch bedeutend geringere Divergenz der Goldblättchen auch bei Verwendung nur eines Strahles eintritt, und dass man bei Anwendung von drei oder mehreren Strahlen, die in analoger Weise combinirt sind, die Wirkung noch bedeutend verstärken kann. Doch wird der Natur der Sache nach eine Grenze sehr bald dadurch erreicht, dass bei zu starker Influenz der grösste Theil der Tropfen des letzten Strahles das unter der Ausflussöffnung stehende Gefäss nicht mehr erreicht. Die meisten fliegen vermöge ihrer gegenseitigen Abstossung über den Rand des Gefässes heraus und zerstören so die Isolationsfähigkeit der Tischchen.

Der hier mitgetheilte Apparat ist in seiner äusseren Erscheinung der Thomson'schen Wasserinfluenzmaschine sehr ähnlich. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass hier der influenzirende Ring R durch die Verbindung mit dem Daniell auf constantem Potential gehalten wird.

Wir glaubten diese einfache Anordnung hier mittheilen zu dürfen, weil das Princip, nach welchem die Duplication erreicht wird, ein sehr übersichtliches ist, und weil ferner der Apparat den Vortheil bietet, dass man mit seiner Hülfe an einem einfachen Goldblattelectroskop oder einem electrischen Pendel das Vorhandensein einer electrischen Spannung an den Polen eines galvanischen Elementes auch einem grossen Zuhörerkreise nachweisen kann. Es dürfte daher der hier beschriebene Apparat zu Unterrichtszwecken sich wohl empfehlen.

Wolfenbüttel, im Januar 1885.

IX. *Bemerkungen über den electrischen Vorgang in den Gewitterwolken;*

von Julius Elster und Hans Geitel.

Bei einer Untersuchung, mit der wir schon seit längerer Zeit beschäftigt sind, und welche die Electricitätserregung durch Reibung feinzerstäubter Flüssigkeiten an festen Körpern von verschiedener Temperatur zum Gegenstande hat, machte sich die ungemeine Empfindlichkeit der sich auflösenden Flüssigkeitsstrahlen, sowie überhaupt aller in einem Luftstrom suspendirter fester oder flüssiger Partikelchen gegen electrische Influenz in hohem Grade geltend. Diese Wirkung ist die hauptsächlichste Fehlerquelle, gegen die man bei derartigen Versuchen anzukämpfen hat, sie macht es, wie wir in einer späteren Mittheilung darzulegen gedenken, in hohem Grade schwierig, die Frage zu entscheiden, ob durch Reibung von Wasserstaub an kalten Körpern eine Electricitätserregung eintritt. Die Erscheinung ist übrigens für Flüssigkeitsstrahlen längst bekannt und hat schon eine praktische Anwendung in Thomson's Tropfensammler und Wasserinfluenzmaschine gefunden. Es lag nun nahe, Influenzwirkungen analoger Art auch bei den Vorgängen wirksam zu denken, wie sie sich innerhalb einer Gewitterwolke abspielen, d. h. die letztere geradezu als einen selbstthätig wirkenden Duplicator aufzufassen.

Das Princip dieser Auffassung wird sich am besten aus einem Versuch ersehen lassen, der mit den einfachsten Mitteln ausführbar ist.

Ein beiderseits offenes, cylindrisches Metallrohr *A* (von circa 50 cm Länge und 8 cm Durchmesser) ist an einem seitlich angebrachten, isolirenden Halter in verticaler Richtung freischwebend befestigt. In dasselbe kann von oben an einem isolirenden Handgriffe ein kleines ebenfalls cylindrisches Metallgefäss *B* von circa 15 cm Länge und 4 cm Durchmesser hineingeschoben werden. Letzteres ist unten verschlossen und mit einer nach unten gerichteten in eine enge Mündung auslaufenden Ausflussröhre versehen. Wird nun

der Röhre A eine kleine electrische Ladung $+E$ mitgetheilt, während gleichzeitig das mit Wasser gefüllte Gefäss B isolirt vertical darüber gehalten wird, so werden die von B ausgehenden Wassertropfen negativ electrisch, fallen aber, ohne mit der Röhre A in Berührung zu kommen, durch das Innere derselben hinab. Dadurch wird B selbst positiv erregt, und zwar in ausserordentlich kurzer Zeit zu einer Spannung, die bei nicht zu grosser Entfernung zwischen B und A der auf A nicht viel nachsteht. Senkt man nun an dem isolirenden Griff B schnell in A hinab und lässt B einen Augenblick die Innenwand von A berühren, so geht die Electricität von B nach bekannten electrostatischen Gesetzen nahezu vollständig auf A über. Zieht man B in seine ursprüngliche Lage zurück, so kann man dieselbe Operation wiederholen. Man bedenke nur, dass A jetzt eine grössere Ladung als vorher besitzt, sodass demgemäss auch B stärker influenzirt werden wird. Es ergibt sich demnach, dass bei Wiederholung der Operation eine Steigerung der Ladung von A in geometrischer Progression stattfindet. Praktisch ist die Maximalgrenze bald erreicht. Im übrigen lässt sich mit einem derartigen Duplicator leicht eine beträchtliche Verstärkung der Ladung von A sichtbar machen; man braucht nur A während des Versuches mit einem Goldblattelectroskop zu verbinden und die Bewegung von B einigermassen schnell auszuführen. Wir beobachteten fast immer eine Selbsterregung des Apparates, sodass nach 40maliger Oscillation des Gefässes B der Röhre A ein Funken entzogen werden konnte.

Man kann sich den Vorgang in einer Gewitterwolke analog vorstellen. Man denke sich der unteren Schicht derselben an einer Stelle eine gewisse Ladung $+E$ mitgetheilt. Solange die Wolke nicht regnet, wird diese Electricität nahezu an derselben Stelle verharren oder sich langsam mit abnehmender Spannung über die ganze Wolke verbreiten, je nach dem Grade der Leitungsfähigkeit der Dunstmasse. Anderes dagegen tritt ein, sobald die Wolke zu regnen beginnt, wobei wohl mit Recht vorauszusetzen ist, dass die Tropfenbildung in den kalten, d. h. höheren Schichten eintreten muss. Soweit die Wolke regnet, wird sie positive

Electricität annehmen, und zwar, wenn die Regenbildung in nicht zu grosser Höhe über der electrischen Schicht beginnt, von nicht viel geringerer Spannung, als die der letzteren beträgt. Die negativ electrisirten Tropfen fallen durch die untere influenzirende Schicht auf die Erde herab.

Nun aber muss, wie schon öfters (unseres Wissens zuerst von Hermann J. Klein) hervorgehoben worden ist, die mit der Regenbildung verbundene Oberflächencontraction eine Steigerung der Spannung hervorbringen. Indem die ganze vorher positiv influenzirte Wolkenmasse sich zusammenballt, und die einzelnen Dunsttheilchen zu grösseren Tröpfchen zusammenfliessen, wird die Electricität mit wachsender Spannung auf einen kleineren Raum beschränkt und muss auf die unterdessen neu entstandenen Wolkenmassen von neuem, aber kräftiger influenzirend wirken. Sobald auch in diesen die Regenbildung beginnt, wiederholt sich derselbe Vorgang; durch weiteres Zusammenballen der Wolken tritt eine neue Spannungserhöhung ein. Man kann sich sehr wohl vorstellen, dass auf diese Weise die electrische Spannung einer regnenden Wolke bis zur Blitzentladung gesteigert werden kann.

In dem vorher beschriebenen Versuche soll das Gefäss A die untere influenzirende Wolkenschicht, B die oberen regnenden Theile derselben darstellen. Die Oberflächencontraction wird, wenn auch dem Vorgange in der Gewitterwolke wenig entsprechend, durch das Hineinführen des Gefässes B in A wiedergegeben.

Die Frage, woher die ursprüngliche Eigenelectricität der unteren Wolkenschicht stammt, wird nicht so leicht zu entscheiden sein. Jedenfalls reicht schon eine sehr geringe Spannung hin, um bei hinreichend kräftigem Regenfall binnen kurzer Zeit bis zu dem grössten Betrage gesteigert zu werden. Vielleicht ist es die gewöhnliche Luftelectricität, die, auf die Wolken übergehend, an irgend einer Stelle eine locale grössere Ladung hervorbringt. Ohne von Regenfall unterstützt zu werden, würde aber auch die stärkste Ladung nicht von Dauer sein können. Die Condensation des Wasserdampfes an sich als Electricitätsquelle anzusehen, scheint uns misslich, da man nicht recht einsieht, in welcher Weise

die Scheidung der Electricitäten bei diesem Vorgange eintreten kann. Auch Reibungsvorgänge können wohl nur zur Erklärung der Anfangsladung herangezogen werden; um so ungeheure Electricitätsentwickelungen, wie sie in der Natur stattfinden, zu veranlassen, dürften sie doch nicht ausreichen. Uebrigens könnte man dabei wohl nur an eine Reibung feinen Wasserdunstes an grösseren Tropfen, resp. Eiskörnern denken. Dass der Unterschied der capillaren Oberflächenspannung dieser kleinsten und grössten Wassertropfen bei der Reibung eine Scheidung der Electricitäten zu Wege bringt, ist an sich nicht unwahrscheinlich, jedenfalls ist eine derartige Erregung mit Sicherheit noch nicht constatirt. Gesetzt aber auch, sie sei vorhanden, ist dann die bei dieser Reibung verlorene lebendige Kraft wohl hinreichend, das mechanische Aequivalent für die Entstehung auch nur eines Blitzes zu geben?

Man könnte gegen die hier entwickelte Ansicht einwenden, dass die Volumencontraction einer Wolke im wesentlichen in dem Zusammenfliessen der Dunsttheilchen zu grösseren Tröpfchen besteht, dass also auf den letzteren sich die Electricität anhäufen und schliesslich bei ihrem Herabfallen auch mit weggeführt werden muss. Dies ist auch unstreitig theilweise der Fall. Man bedenke aber, dass eine gewisse Zeit lang gerade die in der unteren Wolkenschicht sich bildenden Tropfen von dem aufsteigenden Luftstrom, dessen Intensität nach oben hin abnehmen muss, getragen werden, während die von der oberen kommenden Tropfen schon ohnehin mit grösserer Geschwindigkeit in die untere Wolkenschicht gelangen und infolgedessen leichter den Widerstand der aufsteigenden Luft überwinden. Ein Theil der Ladung geht auf diese Weise ohne Frage verloren, aber um so weniger, je kräftiger der aufsteigende Luftstrom ist. Ausserdem findet ja durch die unausgesetzte Verdichtung ein fortwährender Ersatz statt.

Bei feinem Staubregen, der sofort nach seiner Bildung zur Erde fällt, werden sehr starke Entladungen kaum zu erwarten sein. Jedenfalls kommt sehr viel auf die Schnelligkeit der Wolken- und Regenbildung an. Der einer Wolke

entfallende Regen muss also die entgegengesetzte Electricität der Wolke zeigen und kann natürlich auf eine zweite Wolke, die er durchsetzt, und die ebenfalls regnet, influenzirend einwirken.

Im übrigen wird nach jedem Blitzschlag der Rest der Wolkenelectricität bei genügendem Regenfall und der davon untrennbaren Volumencontraction bald wieder zum Maximum vermehrt.

Das Wesentliche der hier entwickelten Ansicht liegt demnach darin, dass sie die Gewitterelectricität als Influenzelectricität, die Gewitterwolke als einen selbstthätigen Duplicator auffasst. Der derselben entströmende Regen spielt die Rolle des Wasserstrahles beim Thomson'schen Tropfensammler, während die Steigerung der Spannung durch die immense Volumen- und Oberflächencontraction bedingt wird.

Diese Theorie dürfte vor den bislang aufgestellten folgende Vorzüge besitzen:

1. Sie gestattet, die Wolke aufzufassen als ein Aggregat discreter Wassertröpfchen. Eine derselben mitgetheilte electrische Ladung verbreitet sich daher nicht durch Leitung, sondern, sobald die Wolke zu regnen beginnt, von Punkt zu Punkt durch Influenz.

2. Sie bedarf nicht nothwendig der Electrisirung durch Reibung. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, dass Reibungsvorgänge die erste Erregung herbeiführen, diese werden aber im weiteren Verlaufe der Erscheinung bedeutungslos.

Sollte sich ferner, was nach einer grossen Zahl von uns angestellter Versuche noch nicht mit Sicherheit zu entscheiden ist, eine Electricitätserregung durch Reibung von Wasserstaub an Wasser oder Eis experimentell nicht nachweisen lassen, so genügt das Vorhandensein der Luftelectricität, um die Erscheinung einzuleiten.

3. Sie findet das Aequivalent für die zur Bildung der Potentialdifferenz verbrauchte Arbeit in der lebendigen Kraft der herabfallenden Wassertropfen.

Wolfenbüttel, December 1884.

X. *Ueber die Electricitätsentwickelung bei der Regenbildung;*
von Julius Elster und Hans Geitel.

In vorstehender Mittheilung haben wir die Möglichkeit der Entstehung einer kräftigen electrischen Spannung innerhalb einer regnenden Wolke darzulegen gesucht. Das Wesentliche unserer Ansicht ist, dass ihr zufolge eine jede Wolke, die sich zu Regentropfen verdichtet, zu einem selbstthätigen electrischen Duplicator wird, sobald der unteren Schicht derselben eine beliebige, theoretisch selbst minimale Ladung mitgetheilt wird. Es ist vielleicht von Interesse, diese Anschauungsweise eingehender zu begründen und ihre Folgerungen mit den über die Wolkenelectricität vorliegenden Beobachtungen in Vergleich zu setzen.

Es wird zunächst das Vorhandensein einer Anfangsladung der Wolke vorausgesetzt, die ihren Maximalwerth in den unteren Schichten derselben hat. Wie wir in der oben citirten Abhandlung schon andeuteten, empfiehlt es sich, um für die folgenden Schlüsse ein genügend sicheres Fundament zu behalten, zur Erklärung dieser Anfangsladung den Boden der zweifellos constatirten Thatsachen nicht zu verlassen. Wir gedenken deshalb in dem Folgenden die Möglichkeit einer Electricitätserregung durch Reibung des Wassergases, resp. der Luft an den fallenden Tropfen, sowie eine solche durch Contact der eigentlichen Regentropfen mit den feinsten Dunsttheilchen der Wolke nicht weiter zu berücksichtigen; obgleich wir dieselbe durchaus nicht für ausgegeschlossen erklären wollen. Diese Beschränkung scheint uns in der That möglich zu sein. Diejenige Quelle, die uns nämlich immer bleibt, und deren Existenz niemand leugnet, ist die gewöhnliche electrische Spannung der Atmosphäre. Man darf in der Heranziehung dieser Ursache keineswegs eine petitio principii erblicken. Bekanntlich tritt die atmosphärische Electricität bei heiterem Himmel mit völliger Regelmässigkeit auf, die Annahme liegt also sehr nahe, dass sie ihren Ursprung überhaupt nicht in der Electricität der

Regenwolken findet. Es ist vielmehr umgekehrt angezeigt, die letztere aus der ersteren herzuleiten; dabei bleibt ihr eigentlicher Ursprung vor der Hand unaufgeklärt.

Nach den Beobachtungen Palmieri's[1]) ist es wahrscheinlich, dass die electrische Ladung der Atmosphäre mit zunehmender Höhe geringer wird, sodass sich in der That eine stärkere Spannung in den tieferen Wolkenschichten von selbst einstellen würde. Wie gross diese Spannung ist, darauf kommt nichts an, da ja eine Verstärkung derselben durch den Regenfall eintritt.

Bedenkt man, wie leicht electrisch erregte Gase ihre Ladung an leitende Körper abgeben, so scheint die Annahme, dass die atmosphärische Electricität wirklich auf die Wassertheilchen der Wolke übergeht, wohl gerechtfertigt.

Hieraus würde unmittelbar folgen, dass die Wolkenelectricität mit der atmosphärischen im Zeichen übereinstimmen, also positiv sein müsste, vorausgesetzt, dass nicht störende Einflüsse auftreten. Wie Palmieri angibt, ist in der That die Luftelectricität bei bewölktem Himmel, sowie die des Nebels, sofern keine Regenbildung stattfindet, stets positiv, zuweilen sogar stärker, als bei unbewölktem Himmel.[2]) Diese Verstärkung hat man sich wohl durch eine beginnende Ballung der Wolken zu erklären, die noch nicht bis zur Bildung grösserer Tropfen fortgeschritten ist.

Sobald nun der Regenfall beginnt, muss die Wolke als electrischer Duplicator wirken.

Es ist für die ganze hier vertretene Ansicht von grösster Wichtigkeit, die Art des Zustandekommens der hierbei auftretenden Influenzwirkungen möglichst klarzustellen. Eine Vertheilung der Electricität der ganzen Wolke in dem gewöhnlichen Sinne, dass die dem influenzirenden Punkte zugewandte Seite die entgegengesetzte, die abgewandte die gleichnamige Spannung erhält, ist ausgeschlossen. Da nämlich die Wolke aus voneinander isolirten leitenden Partikel-

1) Die atmosphärische Electricität von Luigi Palmieri, übersetzt von H. Discher. p. 34. 1884.

2) Palmieri, l. c. p. 35.

chen besteht, so wird die Nachbarschaft eines influenzirenden Körpers zunächst nur auf die neutrale Electricität jedes einzelnen Dunsttheilchens scheidend wirken. Eine wesentliche Aenderung des electrischen Zustandes tritt aber sofort mit Beginn der Regenbildung ein. Bei der letzteren hat man 2 Factoren zu unterscheiden; es werden sich grössere Tropfen durch Zusammenfliessen der feinsten Dunstmassen bilden, und ferner, was für uns von untergeordneter Bedeutung ist, wird ein Anwachsen der einmal gebildeten Tropfen beim Herabsinken derselben in Luftschichten stattfinden, unter deren Thaupunkt sie abgekühlt sind. Nun zeigt der Versuch[1]), dass nicht in jedem Falle beim Zusammentreffen feinen Wasserstaubes mit grösseren Wasserflächen ein Zusammenfliessen stattfindet; es tritt vielmehr häufig ein Gleiten des ersteren an den letzteren ein. — Hierbei gerathen die zerstäubten Massen mit der Oberfläche wirklich in leitende Berührung; bei genügenden Vorsichtsmaassregeln lässt sich nämlich leicht zeigen, dass die Wasserfläche mit der von ihr reflectirten Dunstwolke nach Art eines Thomson'schen Tropfensammlers wirkt.

Man darf also annehmen, dass die fallenden Regentropfen mit den feinsten Dunstmassen wirklich in leitende Berührung kommen können, ohne jedesmal mit ihnen zusammenzufliessen. Um diesen Vorgang zu übersehen, wollen wir den Durchmesser der letzteren als sehr klein gegen den der ersteren voraussetzen. Man kann dann wohl, wenn man die Compression der Luft durch den Druck des fallenden Tropfens vernachlässigt, in erster Annäherung die Gesetze als gültig ansehen, die Kirchhoff[2]) für die Bewegung einer Kugel (hier des Regentropfens) in einer Flüssigkeit (hier der Luft) aufgestellt hat. Die Stromlinien, d. h. die Bahnen, auf denen sich die ausweichenden Lufttheilchen um den Mittelpunkt des Tropfens bewegen würden, sind in diesem Falle ebene Curven, die symmetrisch in Bezug auf die durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Horizontalebene verlaufen.

---

1) Beschreibung desselben folgt am Schluss der Mittheilung.

2) G. Kirchhoff, Vorl. üb. Math., Phys., Mech. **18.** Vorl. § 2. 1876.

Diese Stromlinien umschliessen einander; die innersten setzen sich zusammen aus Meridianen der Kugel, die vom tiefsten zum höchsten Punkte verlaufen, und aus den von diesen Punkten aus nach unten, resp. oben gezogenen Verticallinien.

Findet nun auch, wie an der citirten Stelle des Kirchhoff'schen Werkes nachgesehen werden kann, in diesen äussersten Grenzcurven eine Flüssigkeitsbewegung in endlicher Zeit nicht statt, so doch in den ihnen benachbarten, die sich ihrer Gestalt nach unendlich wenig von ihnen unterscheiden. Durch diese letzteren wird aber die Bahn eines Wasserstäubchens, das mit dem fallenden Tropfen an seiner unteren Hälfte in Berührung tritt, wesentlich bedingt sein; es muss ein Herumgleiten des ersteren an dem letzteren eintreten, durch welches das Stäubchen auf die obere Hälfte des Tropfens übergeführt wird.

Das Resultat dieser Ueberlegung ist demnach, soweit sich der Vorgang übersehen lässt, folgendes:

Findet ein Zusammentreffen eines fallenden grösseren Tropfens mit einem sehr feinen statt, und tritt kein Zusammenfliessen ein, so erfolgt die definitive Trennung stets in einem Punkte der oberen Halbkugelfläche des grösseren.

Hiernach ist es leicht, die Influenzwirkungen zu übersehen.

Befindet sich die influenzirende Schicht unterhalb der Wolke, so sind im Momente der Trennung die fallenden Tropfen derselben zugewandt; sie nehmen die entgegengesetzte Electricität an und lassen die Dunstmasse gleichnamig electrisch zurück. Es ist zu beachten, dass bei dem grossen Oberflächenunterschiede der sich trennenden Körper die Dichtigkeit der Electricität auf den fallenden Tropfen nach einem einmaligen Zusammentreffen noch verschwindend klein sein wird, sodass also ein und derselbe der Reihe nach eine grosse Anzahl der Wolkenpartikelchen treffen und in electrischen Zustand versetzen kann, bevor seine eigene Ladung einen merklichen Werth erreicht. Tritt bei einem Zusammentreffen eine Verschmelzung ein, so ändert sich der electrische Zustand des Tropfens nicht; abgesehen von der durch sein Wachsthum verminderten Spannung auf seiner Oberfläche-

Liegt die influenzirende Schicht oberhalb der regnenden Wolke, so muss die letztere, wie leicht zu ersehen, die entgegengesetzte Electricität annehmen.

Fassen wir die Resultate zusammen, so ergibt sich, sofern die vorher gehenden Schlüsse gültig sind, der einfache Satz:

Jede regnende Wolke nimmt oberhalb einer Electricitätsquelle die gleichnamige, unterhalb die entgegengesetzte Electricität an.

Von diesem Satze machen wir nun eine Anwendung auf den hier angenommenen Fall, dass eine Wolke beim Beginn der Regenbildung eine positive Ladung in ihrer unteren Schicht enthält. Sofort nach Eintritt des Regens wird sich diese über die Wolke verbreiten, soweit derselben überhaupt Tropfen entfallen. Diese letzteren führen die negative Electricität zur Erde, resp. neutralisiren zum Theil die Ladung der ursprünglich erregten Schicht. Mit dem Einsetzen der Tropfenbildung tritt aber sofort die Aspiration der umgebenden Luft nach dem Orte des stärksten Regenfalles auf. Hierhin strömen also die positiv geladenen Dunstmassen zusammen, durch ihr Zusammenballen und Zusammenfliessen tritt eine Erhöhung der electrischen Spannung auf, die nun ihrerseits wieder kräftiger influenzirend auf die indessen neugebildeten, regnenden Wolkenmassen wirkt.

Durch diese Vorgänge würde eine thatsächlich ins Unermessliche gesteigerte Spannung hervorgerufen werden, wenn nicht die positiv geladenen Wassertröpfchen nach ihrem Zusammenfliessen selbst als Regen herabfielen. Natürlich muss dieser im „Centrum" der Wolke niedergehende Regen, der durch Vereinigung der positiv geladenen Wolkenmassen entstanden ist, selbst positiv sein. Hierdurch wird der Zustand constant herbeigeführt, wie wir ihn anfangs voraussetzten; die stark positiv electrische Regengarbe, die aus dem Wolkencentrum herabhängt, wird das Maximum der Spannung stabil nach unten verlegen.

Anders dagegen verhält es sich mit den Tropfen, die aus den äusseren Schichten der Wolke entfallen. Diese entstehen aus Dunstmassen, die erst eben durch Conden-

sation von Wassergas gebildet und dann sofort der Influenz des Wolkencentrums ausgesetzt sind. Die feinen Wasserstäubchen, die mit der angesaugten Luft der Mitte zuströmen, werden positiv, die herabfallenden Tropfen negativ geladen; hier bleibt demnach der Zustand bestehen, wie er bei Beginn des Regenfalles für einen Moment in der ganzen Wolke herrschte.

Eine unterhalb einer regnenden Wolke gelegte Horizontalebene würde demnach in der Mitte eine positive Ladung erhalten, von einer negativen Zone umgeben.

Man denke sich nun an irgend einem freien Orte bei auch in weiterem Umkreise heiterem Himmel ein Electroskop aufgestellt. Dasselbe wird positive Electricität anzeigen. Es möge aus der Ferne eine Regenwolke heranziehen. Da die Cumuli derselben, die zunächst am Horizonte auftreten, positiv electrisch sind, so wird durch ihre Influenz zunächst die Ladung des Electroskopes verstärkt werden. Diese Zunahme wird bei grösserer Annäherung der Wolke noch andauern, dann aufhören, bis Abnahme eintritt, und für einen Augenblick die Wirkung gleich Null ist. Dann zeigt das Electroskop negative Electricität an, ein Zeichen, dass nun die Influenz des äusseren Regengürtels überwiegt. Bei weiterer Annäherung der Wolke muss auch diese Ladung erst anwachsen und dann an Intensität bis zu Null abnehmen. Ist nun die Wolke selbst über dem angenommenen Orte angelangt, so wird ihre positive Influenz die negative Ladung des ihrer Peripherie entströmenden Regens überwiegen, und schliesslich wird unterhalb des Centrums selber im stärksten Tropfenfalle das Maximum der positiven Ladung eintreten. Beim Vorüberziehen der Wolke wiederholen sich die Vorgänge in umgekehrter Reihenfolge, die Ladung nimmt ab bis zu Null, wird negativ, nimmt wieder ab, um nach nochmaligem Passiren der Null einen positiven Werth anzunehmen, der bei gänzlichem Verschwinden der atmosphärischen Störung auf den normalen Betrag sich reducirt.

Die hier gegebene Schilderung der Schwankungen des Electrometers vor, in und nach einem Regenfalle stimmt

nit den Beobachtungen Palmieri's[1]) gut überein. Natür-
ch wird sich der Verlauf der Ereignisse nicht in jedem
'alle mit völliger Reinheit zeigen; es wird dies besonders
ann zu erwarten sein, wenn eine aussergewöhnliche Dicke
er Wolkenschicht und sehr kräftige Niederschläge die
pannung der Electricität bis zur Blitzentladung steigern.
'ür diesen Fall lässt sich eine Abweichung mit grosser
Vahrscheinlichkeit voraussagen.

Da die Influenzwirkung vom Orte der stärksten Span-
ung aus von Punkt zu Punkt am kräftigsten in der Rich-
ıng der Verticallinie stattfindet, so wird man sich die
ärker geladenen Regen- und Wolkenmassen in einem
aume eingeschlossen denken können, dessen unterer Theil
n Cylinder ist, der die dem Centrum entströmenden Regen-
opfen einschliesst. An der Stelle, wo dieser Cylinder die
ntere Grenze der Wolke schneidet, setzt sich auf denselben
n sich nach oben erweiternder Rotationskörper auf. Inner-
alb desselben nimmt die Spannung mit zunehmender Höhe
ehr und mehr ab. Ist nun der verticale Durchmesser der
Volke beträchtlich im Vergleich mit ihrer Höhe über dem
rdboden, so kann man sich wohl vorstellen, dass die In-
uenz des oberen Theiles dieses körperlichen Raumes auf
en unteren Wolkenrand die Influenz durch den unteren
berwiegt. Die grössere Intensität der Spannung des letz-
eren wird dann aufgehoben, resp. übertroffen durch die
rössere Ausdehnung des ersteren. Es kommt noch hinzu,
ass auf die unteren Partien die bindende Kraft der Erde
m stärksten wirkt. Tritt dieser Zustand ein, so befindet
ich der untere Wolkensaum unterhalb des influenziren-
len Ortes, es muss also der erstere negativ, die herab-
allenden Tropfen positiv erregt werden. Damit tritt ein
Gegensatz zwischen Wolkencentrum und Rand hervor, es
werden Blitzentladungen vom ersteren zum letzteren statt-
finden können, bei denen eine Zerspaltung und Ausbreitung
des Funkens nach aussen erfolgen muss, da die negative
Ladung des Randes auf einen relativ grossen Raum ausge-
breitet ist.

[1]) Palmieri, l. c. p. 36.

Ferner ist wohl von vornherein nicht ausgeschlossen, dass bei einer Regenwolke von grosser Flächenausdehnung sich mehrere positive Centren herausbilden. Dass infolge einer Blitzentladung sprungweise Wechsel im Zeichen der Electricität auftreten, kann, wie Palmieri hervorhebt, nicht befremden. Eine Ableitung der positiven Spannung des Centrums muss sofort ein Hervortreten der negativen Ladung des Wolkenrandes, resp. der äusseren Regenzone herbeiführen.

Es möge noch des Falles gedacht werden, dass der Ort des stärksten Regenfalles einen abnorm kleinen Durchmesser zeigt, während zugleich die Höhenentwickelung der Wolke relativ gering ist. Der oben erwähnte Gegensatz zwischen Wolkenrand und Wolkencentrum wird sich nicht ausbilden können. Wie im Falle der normalen Regenwolke wird also der der Mitte entfallende Tropfenstrom positiv, seine Umgebung negativ geladen sein. Es liegt sehr nahe, eine electrische Anziehung der inneren Regensäule auf die äusseren entgegengesetzt electrischen Tropfenmassen anzunehmen, wobei die letzteren sich der ersteren nähern, und dieselbe in spiraligen Bahnen umkreisen werden, während sie gleichzeitig allmählich herabsinken.[1]) Unmöglich scheint es wohl nicht, dass Wettersäulen, die bei sonst windstiller Luft aus einer Gewitterwolke sich herabsenken, auf diese Weise entstehen können. Ihr Inneres müsste demnach eine stark positive Ladung zeigen. Es liegt uns natürlich fern, alle Wettersäulen auf diese Ursache zurückzuführen, wir haben besonders diejenigen im Auge, deren electrische Natur jedem unbefangenen Beobachter zweifellos erschienen ist.[2]) —

Die hier vorliegende Abhandlung verfolgt in erster Linie den Zweck, eine tiefere Begründung der in der vorigen Notiz angedeuteten Duplicatorwirkung einer Regenwolke zu geben. Die Annahme, dass die gewöhnliche atmosphärische Electricität diese Thätigkeit auslöst, legten

1) Der diesbezügliche Versuch ist am Schluss der Abhandlung mitgetheilt.

2) Reye, Die Wirbelstürme, Tornados u. Wettersäulen p. 24. 1872

wir nur deshalb zu Grunde, um uns von vor der Hand noch nicht genügend gesicherten Voraussetzungen unabhängig zu erhalten. Die Uebereinstimmung unserer Schlüsse mit den von Palmieri empirisch gefundenen Gesetzen darf befriedigend genannt werden. Ein Rückschluss auf die Richtigkeit jener Annahme ist aber nicht so zwingend, als es zunächst scheinen möchte. Auch bei Voraussetzung jeder anderen Ursache, sofern sie nur eine positive Anfangsladung der Wolke zur Folge hat, würde sich der im Vorigen entwickelte Verlauf der electrischen Erscheinungen ergeben. —

Eine besondere Bedeutung für die Prüfung der hier vertretenen Anschauung würde der Beobachtungen der electrischen Natur der Niederschläge zukommen. Electrometrische Bestimmungen der Luftelectricität sind weniger entscheidend, da sie die Resultante aus drei gesonderten schwer zu trennenden Einflüssen[1]) sind:

1. der augenblicklichen electrischen Ladung der Luft an der Stelle der Messung,
2. der Influenz entfernter Luftmassen und Wolken,
3. der Influenz der Niederschläge.

Es möge anhangsweise die Beschreibung zweier Versuche folgen, welche, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, im Vorhergehenden nur angedeutet worden sind.

Dass sehr feine Wassertröpfchen mit einer grösseren Wasserfläche in der That in leitende Berührung kommen können, ohne mit derselben zusammenzufliessen, wurde in folgender Weise experimentell bestätigt:

Die metallene Mündung eines Zerstäubers wurde schräg auf eine isolirte Wasserfläche gerichtet, die mit einem Thomson'schen Quadrantenelectrometer leitend verbunden war. Ein cylindrisches Metallrohr von $1\frac{1}{2}$ cm Weite und 2 cm Länge wurde so über die Mündung des Zerstäubers geschoben, dass sich dieselbe in der Mitte des Röhrchens befand. Letzteres war, wie auch der Zerstäuber selbst, zur Erde abgeleitet

1) Dufour. Arch. des Scienc. phys. (3) **10.** p. 310. 1883.

und verhinderte so, dass irgend welche störende electrische Einflüsse erheblich influenzirend auf die die Ausflussöffnung verlassenden Tröpfchen einwirkten. Bei dieser Anordnung wird ein grosser Theil des in schräger Richtung auf die Wasserfläche auftreffenden Wasserstaubes von derselben reflectirt. Oberhalb der sich bildenden Dunstwolke wurde eine isolirte Metallkugel von 2 cm Durchmesser aufgestellt, welche je nach Bedürfniss mit dem positiven oder negativen Pole einer Zamboni'schen Säule von 2000 Plattenpaaren leitend verbunden werden konnte. Es zeigte sich nun, dass, wenn der Zerstäuber in Thätigkeit war, das isolirte Gefäss, in welchem sich die reflectirende Wasserfläche befand, stets eine der Ladung der Metallkugel gleichnamige, mit Scala und Fernrohr nicht mehr zu messende Ladung annahm, während der reflectirte Wasserstaub entgegengesetzt electrisch wurde. Hieraus folgt, dass nicht etwa ein directer Uebergang der Electricität durch die Dunstwolke zur Flüssigkeit stattgefunden hat. Es verhielten sich mithin die von der Wasserfläche abprallenden Wasserkügelchen genau so, wie die Tropfen des Thomson'schen Tropfensammlers, und das Gefäss wie der Tropfensammler selbst. Dies ist aber nur möglich, wenn die abfliegenden Tröpfchen bei ihrem Aufprallen mit der Wasserfläche in leitende Berührung kommen. Es sei noch bemerkt, dass zum sicheren Gelingen des Versuches man darauf zu achten hat, dass die Mündung des Zerstäubers sich in dem electrischen Schatten der Kugel befindet. Anderenfalls kann die influenzirende Wirkung der letzteren auf die Ausflussöffnung grösser werden, als auf die Wasserfläche, was die Erscheinung umkehrt. Derselbe Versuch lässt sich übrigens bei genügenden Vorsichtsmaassregeln auch schon mit Hülfe eines gewöhnlichen Goldblattelectroskopes mit Erfolg anstellen.

Rotationen electrisirter Flüssigkeitströpfchen um electrisirte feste Körper, resp. electrische Wasserstrahlen konnten in folgender Weise sichtbar gemacht werden:

Ein verticaler, isolirt aufgestellter Holzstab von 2 cm Durchmesser und 1 m Länge wurde mit dem positiven Conductor einer kräftig wirkenden Holtz'schen Influenzmaschine

verbunden. In die Nähe seines oberen Endes wurde ein zur Erde abgeleitetes Wassergefäss mit feiner Ausflussöffnung angebracht. Der demselben entfliessende Strahl löste sich alsdann in eine Tropfengarbe auf, sobald die Maschine in Thätigkeit versetzt wurde. Jedes einzelne Tröpfchen besitzt vermöge der Influenz des positiv electrischen Stabes eine starke negative Ladung. Infolgedessen beschreiben die herabfallenden Tröpfchen Schraubenlinien, deren Axe der electrisirte Stab ist.

Ersetzte man den Holzstab durch einen kräftigen, abwärtsgerichteten verticalen Wasserstrahl, dessen continuirlicher Theil, trotz der starken Electrisirung immerhin etwa 50 cm betrug, so rotirte jetzt die Tropfengarbe um diesen continuirlichen Theil des Strahles.

Die hier mitgetheilte Anordnung des Versuches zeigt die Erscheinung in relativ grossem Maassstabe. Die von einer Thomson'schen Wasserinfluenzmaschine gelieferte Spannung genügt vollständig, um Rotationen von Wassertröpfchen um einen verticalen Draht von ca. 25 cm Länge hervorzubringen.

Wolfenbüttel, im Januar 1885.

XI. *Ueber Blitzphotographien; von Dr. H. Kayser.*

(Aus den Sitzungsber. d. königl. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin vom 27. Nov. 1884; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. I Fig. 9.)

Es ist, soviel mir bekannt, in diesem Jahre zum ersten mal versucht worden und gelungen, Blitze photographisch zu fixiren.[1]) Solche Aufnahmen lassen sich nur bei nächtlichen Gewittern machen, sind aber dann auch höchst einfach, indem man die vorher auf Unendlich eingestellte Camera gegen die Stelle des Himmels richtet, an der sich das Gewitter befindet. Man kann dann beliebig lange exponiren; jeder Blitz,

1) Wie ich seitdem erfahren, stammen die ersten Blitzphotographien von Haensel aus dem Jahre 1883.

der an der betreffenden Stelle des Himmels auftritt, markirt sich auf der Platte.

Im Juli dieses Jahres zogen über Berlin einige sehr stark electrische Abendgewitter, welche ich benutzt habe, um eine Reihe von Blitzaufnahmen zu machen. Die Platten zeigen, dass, abweichend von der früher verbreiteten Meinung, der Blitz nicht immer eine einfache Entladung zwischen zwei Punkten ist, sondern dass die Entladung sehr häufig zwar von einem Punkte ausgeht, aber in vielen Punkten endet. Es zweigen sich von einem Hauptstamm dünnere Seitenäste nach allen Richtungen ab, welche wieder Seitenzweige haben, sodass ein solcher Blitz wie die Karte eines Flusssystems aussieht, wo zahlreiche Bäche und Nebenflüsse zusammenströmen, um schliesslich einen Hauptstamm zu bilden, von welchem man wohl ein bestimmtes Ende, aber keinen solchen Anfang erkennt; nur durchläuft der Blitz den Weg umgekehrt, wie der Fluss. Mitunter ist auch ein deutliches Hauptende des Blitzes zu erkennen, indem ein starker Strahl 2 Punkte verbindet, und von ihm nur schwache, kurze Seitenäste abgehen. Endlich kommen viele schwächere unverzweigte Blitze vor.

Diese Erscheinung der verästelten Blitze war schon durch die ersten erschienen Photographien bekannt geworden; ich will daher hier nicht näher darauf eingehen, sondern eine höchst merkwürdige und zum Theil unaufgeklärte Erscheinung besprechen, welche einer von den fixirten Blitzen darbietet. Es war am 16. Juli gegen 10 Uhr abends, als der stärkste Blitz des Gewitters erfolgte, dem sehr schnell, etwa nach einer Secunde, ein gewaltiger Donnerschlag folgte. Etwa 5 Minuten vorher hatte ich eine Platte exponirt, auf welche ausser diesem Hauptblitz noch mehrere andere Entladungen gekommen sind. Der Hauptstrahl besteht nicht aus einer hellen Linie, sondern ist aus vier dicht neben einander liegenden Linien gebildet. Man sieht links den stärksten Strahl, an den sich nach rechts ein breiteres helles Band anschliesst, welches nachher noch näher zu besprechen sein wird. Dann folgen weiter nach rechts zwei dicht neben einander verlaufende Strahlen. Nach einem etwas grösseren

Abstande folgt endlich ein vierter Strahl. Alle vier laufen im wesentlichen parallel durch alle Zacken und Krümmungen fort und weichen nur in kleinen Details voneinander ab.

Es fragt sich nun, wie dieser vierfache Blitz zu erklären sei; es sind, soviel ich sehe, 4 Annahmen möglich. Man könnte nämlich erstens annehmen, dass die 4 Strahlen nicht zu einer und derselben Entladung gehören, sondern zufällig zu verschiedenen Zeiten an derselben Stelle des Himmels übergeschlagen sind; dem widerspricht aber die Parallelität der 4 Blitze, welche mit Sicherheit darauf hinweist, dass sie durch denselben Canal erhitzter Luft gegangen sind, also auch innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes stattgefunden haben und zusammengehören. — Eine zweite Annahme wäre, dass die 4 Entladungen gleichzeitig vorhanden waren, so wie bei reichlichem Electricitätszufluss zwischen den Conductoren einer Electrisirmaschine mehrere Funken gleichzeitig überspringen. Aber auch dieser Annahme widerspricht die Parallelität; denn wie bei der Electrisirmaschine, so müssten auch hier die gleichzeitigen Entladungen sich abstossen und divergirende Büschel bilden. — Man könnte drittens denken, dass die 4 Entladungen nicht gleichzeitig, sondern sehr rasch hinter einander von der Wolke zur Erde übergeschlagen seien; das setzte aber einen sehr leichten und reichlichen Electricitätszufluss zu der eben entladenen Stelle der Wolke voraus, um das Potential so schnell wieder auf die nöthige Höhe zu bringen. Ein so geringer Leitungswiderstand der Wolken scheint aber nicht wahrscheinlich.

Es bleibt endlich als vierte, und wohl zutreffende Erklärung, dass wir es hier mit einer oscillirenden Entladung zu thun haben, bei welcher in sehr kurzen Zwischenräumen Entladungen in entgegengesetzter Richtung verlaufen. Dann würde der erste Funke auf seinem Wege von der Wolke zur Erde einen Canal erhitzter Luft hinterlassen; der nächste von der Erde zur Wolke gehende Funke würde denselben Canal benutzen, der im wesentlichen noch besteht, nur durch den Wind etwas verschoben ist, u. s. w. So würde man von den 4 Entladungen vier neben einander liegende Bilder erhalten, wenn der Wind senkrecht zur Axe des photogra-

phischen Apparates gerichtet ist; das war er an jenem Abend, wo er von West nach Ost, im Bilde von links nach rechts wehte. Dass derartig oscillirende Entladungen bei Blitzen vorkommen, habe ich bei stärkeren Gewittern mehrfach beobachtet; man sieht dann den Blitz auf seinem Wege einige mal hin und her fahren; dazu müssen freilich die Oscillationen ziemlich langsame sein, sonst nimmt das Auge sie nicht einzeln wahr. — Durch derartige Entladungen wird sich vielleicht auch eine Beobachtung Dove's erklären lassen, aus der er schloss, die Blitze seien intermittirende Entladungen.[1])

Wenn diese Erklärung richtig ist, so lassen sich einige interessante Rechnungen ausführen. Die Entfernung des Blitzes kann angenähert zu 350 m angenommen werden, kann indessen auch weniger betragen haben, jedoch kaum unter 200 m. Die Brennweite des Objectivs beträgt 0,18 m; eine Länge von 1 mm auf der Platte entspricht daher einer Länge von etwa 2,817 m in der Natur. Danach betragen die Abstände zwischen den 4 Entladungen: 3,08 m; 0,35 m; 0,63 m. Diese Abstände sind durch Verschiebung des Canals in der Zeit zwischen je 2 Entladungen entstanden. Die Windgeschwindigkeit während des Blitzes betrug etwa 30 km pro Stunde oder 8,5 m pro Secunde; der Wind würde daher obige Verschiebungen hervorgebracht haben in 0,362 Sec.; 0,041 Sec.; 0,074 Sec.; und diese Zeiten würden den Zwischenraum zwischen den Oscillationen angeben. Die ganze Entladung würde nicht eine halbe Secunde gedauert haben. Es scheint mir, dass diese Grössenverhältnisse durchaus denkbare sind.

Die Blitze zusammen befinden sich in einem Canal, der deutlich viel heller ist, als die Umgebung, und dessen Ränder am hellsten sind. Wir haben es hier wohl mit einer Erscheinung zu thun, welche der Aureole entspricht. Der helle Rand entsteht durch die cylindrische Gestalt des leuchtenden Raumes. Von den 4 Theilen des Blitzes geht eine ganze Anzahl schwächerer Seitenentladungen aus, die sich

---

1) Dove, Pogg. Ann. 35. p. 379—380. 1835.

zum Theil noch weiter verzweigen. Diese Aeste, soweit sie auf der Platte sichtbar sind, und soweit sie zweifellos zum grossen Blitz gehören, endigen in etwa sechszig verschiedenen Punkten, was freilich nur auf dem Negativ selbst zu zählen ist, während im Abdruck viele feinste Aestchen verschwinden. Die ganze Länge des Blitzes beträgt etwa 300 m, die Breite der Aureole etwa 28 m.

Die interessanteste und räthselhafteste Erscheinung ist jedoch der helle Streif, welcher den ersten Blitzstrahl auf der rechten Seite begleitet. Unter der Lupe zeigt er eine ganz eigenthümliche Structur; um dieselbe sichtbar zu machen, ist ein Stück des Blitzes in Fig. 9 vergrössert reproducirt. Hier sieht man deutlich, dass das Band aus hellen horizontalen Schichten besteht, welche durch dunkle Zwischenräume getrennt sind.

Für diese Erscheinung fehlt mir jede sichere Erklärung. Die Idee, dass wir es mit Schichten zu thun haben, wie wir sie bei Entladung in luftverdünnten Räumen sehen, welche aber auch bei hohen Drucken auftreten, ist zu verwerfen, da alsdann der Blitzstrahl durch die Mitte der Schichten hindurchgehen müsste, nicht aber dieselben auf der einen Seite begrenzen. Letzterer Umstand macht es vielmehr wahrscheinlich, dass wir in den Schichten irgend welche leuchtende Materie haben, welche durch den Wind von der Blitzbahn aus fortgeweht ist. Da es während des Blitzes ziemlich stark regnete, liegt der Gedanke nahe, dass der Blitz die auf seinem Wege befindlichen Regentropfen in leuchtenden Dampf verwandelt, und jeder Tropfen eine Schicht geliefert habe. Dann würde es sich auch ungezwungen erklären lassen, warum nur der erste Blitz von Schichten begleitet ist: es würde bei den folgenden Entladungen der Canal noch von heissen Gasen, nicht aber von Wassertropfen erfüllt gewesen sein.

Gegen diese Erklärung sprechen indessen doch einzelne Umstände. Es scheint nicht recht wahrscheinlich, dass die Tropfen in so regelmässiger Weise auf dem Wege des Blitzes vertheilt gewesen sind, wie es die Schichten sind; auch ist kein Grund einzusehen, weshalb jeder Tropfen eine abgegrenzte

Schicht geliefert haben soll, und die Schichten sich nicht vermischt haben, sodass ein leuchtendes Band entsteht. Weiter spricht folgende Ueberlegung dagegen: Die Schichten haben eine Länge von etwa 1,7 m, eine Höhe von 0,35 m; nimmt man eine Tiefe von auch nur 0,35 m an, so ergibt sich das Volumen jeder Schicht zu etwa 0,2 cbm. Nimmt man ferner an, dass je 15 Tropfen 1 g wiegen — was schon recht grosse Tropfen voraussetzt —, so lässt sich leicht die Temperatur berechnen, welche geherrscht haben müsste, um jeden Tropfen durch Verdampfung und Dissociation in eine Schicht zu verwandeln. Man findet etwa 400 000° C. Diese Zahl kann vielleicht auf ein Viertel reducirt werden durch die Annahme, dass die Schicht im Bilde durch Fortbewegung einer kleineren leuchtenden Masse entstanden sei, aber immerhin bleibt die Temperatur unwahrscheinlich hoch.

Es muss daher die Frage nach der Entstehung der Schichten als eine noch offene angesehen werden. Ihre Lösung wird wohl gelingen, wenn häufiger Blitzphotographien hergestellt werden, als das bei den hiesigen Witterungsverhältnissen möglich ist. Es wäre sehr wünschenswerth, wenn in dieser Beziehung begünstigtere Beobachter recht zahlreiche Aufnahmen machen wollten; denn die wenigen bisher ans Licht getretenen Photographien haben schon eine Menge interessanter Erscheinungen bekannt gemacht.

XII. *Ueber die Abhandlung des Hrn. Kundt über die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel; von G. F. Fitzgerald.*

Hr. Kundt[1]) hat in seiner oben erwähnten Abhandlung meine theoretische Erklärung der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes bei der Reflexion von einem Magnetpol[2])

1) Kundt, Wied. Ann. **23.** p. 228. 1884.
2) Fitzgerald, Proc. Roy. of the Lond. Soc. **25.** p. 447. 1876.

gütigst erwähnt. Nach der Art, wie er meine Theorie als durch seine Versuche als widerlegt erachtet, dürfte ihm meine Abhandlung über die electromagnetische Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes[1]) entgangen sein, worin (p. 709) ich geschrieben habe: „Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Resultaten des Hrn. Kerr, so muss man beachten, wie ich vorher erwähnte, dass die Einführung einer Phasendifferenz zwischen den reflectirten Componenten eine Frage anderer Ordnung wie die hier behandelte ist und bis zu einem gewissen Grade wenigstens von dem Mangel an Plötzlichkeit beim Uebergang von einem Medium zum anderen abhängt. Meine Ausdrücke geben z. B. keine Aenderung der Polarisationsebene bei der normalen Reflexion des Lichtes von einem Magnetpol, sie werden aber erwarten lassen, dass die einzige Wirkung eine schwache elliptische Polarisation war, wobei die grössere Axe der Ellipse mit der ursprünglichen Polarisationsebene in der gleichen Ebene läge. Die Versuche von Kerr zeigen aber eine gewisse Rotation dieser Polarisationsebene bei der Reflexion, und eine Annahme, durch welche man schon vor langer Zeit die bekannte elliptische Polarisation bei der Metallreflexion zu erklären versucht hat, nämlich dass die wirklich reflectirende Oberfläche eine gewisse Kraft hat, führt, wie man leicht zeigen kann, zu Kerr's Resultat. Nach dieser Hypothe ist der reflectirte Strahl die Resultante der von einer dünnen Schicht an der Trennungsfläche der Medien reflectirten Strahlen; und bei normaler Reflexion von einem Magnetpol wurde die Polarisationsebene jeder dieser Componenten infolge ihres Durchganges durch eine sehr dünne Schicht einer sehr stark drehenden Substanz, eben jener Oberflächenschicht des Magnets, gedreht. Es ist klar, dass ihre Resultante nicht mehr in derselben Ebene, wie der einfallende Strahl polarisirt wäre. Ich gebe dies nur als ein Beispiel dafür, wie diese Frage nach der Phasendifferenz die Resultate beeinflusst, und wie die aufgestellten Hypothesen für dieselbe auch meine Resultate mit den Versuchen von Hrn. Kerr völlig in Einklang bringen.“

1) Fitzgerald, Phil. Trans. 1880. pt. 2. p. 691, vgl. auch Beiblätter 3. p. 819.

Aus diesen Worten ist zu ersehen, dass ich den Einwand des Hrn. Kundt anticipirt und angedeutet habe, auf welchem Wege man die Erklärung der noch fehlenden Erscheinungen zu suchen habe, auf deren eine er die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Selbst in meiner ersten, von Hrn. Kundt citirten Abhandlung erwähnte ich, dass man nothwendigerweise die Verwickelungen der Metalltheorie berücksichtigen müsste, um zu einer vollständigen Theorie zu gelangen. Ich kann Hrn. Kundt in der Ansicht nicht beistimmen, dass die von ihm jetzt und von mir im Jahre 1880 erwähnte Unvollständigkeit meine Theorie widerlegt. Fresnel's Reflexionstheorie kann nicht als widerlegt angesehen werden, weil sie die allmähliche Aenderung der Phase der Componenten nahe dem Polarisationswinkel unerklärt lasse. Um meine Theorie zu vervollständigen, fehlt nur ein Eingehen in complicirte mathematische Betrachtungen, zu welchem mir leider die Zeit mangelt.

Ich habe meine Formeln oberflächlich mit den Resultaten des Hrn. Kundt verglichen und finde die berechneten Drehungen von derselben Grössenordnung, wie die von ihm beobachteten. Da er nicht Versuche über die Drehungen bei der Reflexion und dem Durchgang unter genau gleichen Umständen mittheilt, muss meine Vergleichung nothwendigerweise nur eine annähernde bleiben.

XIII. *Ueber den japanischen magischen Spiegel*[1]; *von Hanichi Muraoka in Japan.*

Neben meiner Erklärung über die Entstehung der verschiedenen Convexität an der Oberfläche des japanischen magischen Spiegels[2]) wurde von einigen Seiten eine zweite Erklärung gegeben, nämlich die folgende:

„Beim Schleifen werden die hinten dickeren

1) Auszug aus einer japanischen Zeitschrift „Tokio Gakugeisassi".
2) Muraoka, Wied. Ann. 22. p. 246. 1884.

Stellen stärker gedrückt und daher mehr abgerieben, als die dünneren, wodurch jene tiefer werden, als diese.“ Für diese Erklärung liegt aber kein Beweis vor, und deshalb wird dadurch meine Erklärung keineswegs hinfällig. Trotzdem hielt ich es nicht für überflüssig, mich nach weiteren entscheidenden Thatsachen umzusehen. Ehe ich zur Beschreibung der Untersuchung übergehe, will ich der besseren Uebersichtlichkeit wegen meine Erklärung kurz dem Sinne nach wiedergeben: Von der Thatsache der „Mege“-Erscheinung ausgehend, wies ich nach, dass die Metalle die Eigenschaft haben, durch Schleifen nach der geschliffenen Seite convex zu werden. Die Convexität ist abhängig von der Dicke, und zwar ist die um so grösser, je dünner die Platte. Da der japanische Spiegel hinten erhabene Figuren trägt, also ungleiche Dicke an verschiedenen Stellen hat, und die Spiegelfläche durch Schleifen hergestellt wird, so müssen nothwendig die dünneren Stellen sich stärker krümmen, als die dickeren, wodurch die Verschiedenheit der Convexität entsteht. Mit anderen Worten, die Entstehung der verschiedenen Convexität liegt in der ungleichen Empfindlichkeit der Mege-Wirkung, welche durch die ungleiche Dicke der Spiegelplatte bedingt ist. — Diese Erklärung will ich nennen „die Erklärung durch Mege-Wirkung“ und die andere „die Erklärung durch Druck“. Ich stellte nun zwei Versuche an, die ich beschreiben will.

Versuch I: An eine Messingplatte löthete ich ein Metallkreuz und, um den Rand zu bekommen — der Rand ist besonders wichtig zum Gelingen des Versuches —, noch ein ausgeschnittenes Quadrat, sodass die Messingplatte eine ⊞-förmig erhabene Figur trägt. Um diese besonders stark zu drücken, klebte ich sie mit Siegellack an eine dicke Holzscheibe. Wurde so die Messingscheibe zum Spiegel geschliffen, so war dieselbe, wie erwartet, ein magischer Spiegel.

Nach der Erklärung durch Druck würde man sagen: weil der Druck verschieden ist. Nach der Erklärung der Mege-Wirkung dagegen: weil die Hebung nur an den von der Holzscheibe freien Stellen stattfinden kann.

Versuch II: Eine Messingplatte versah ich wie vorhin mit ⊞-förmigem Metall. Um den Druck überall gleich zu machen, überzog ich die ganze Figur mit Siegellack, sodass keine Hohlräume entstehen konnten, und klebte die Holzscheibe daran. Beim Rauhschleifen sprang die Platte jedesmal vom Lack ab durch das Bestreben derselben, convex zu werden. Da das oftmalige Ankleben und Schleifen vielleicht Einwendungen verursachen kann, so bediente ich mich eines anderen Mittels. In heissem Wasser nämlich liess ich Wood'sches Metall auf der Figur schmelzen und langsam abkühlen. An eine zolldicke Masse des Wood'schen Metalles haftete dann die Messingplatte so fest an, dass kein mechanisches Mittel sie voneinander abzutrennen vermochte. Wurde nun die Platte, nachdem sie unter Benutzung von vier verschieden feinen Schleifsteinen geschliffen war, polirt und amalgamirt, so war sie vollkommen eben, d. h. es liess sich keine Convexität erkennen, und in der Projection zeigte sich keine Spur vom Kreuz. Befreite ich die Platte in heissem Wasser vom Wood'schen Metall, so erfolgte eine kleine Krümmung, und in der Projection erschien das Kreuz sammt dem Randquadrat so schön und deutlich, wie man überhaupt wünschen konnte.

Durch Druck ist dieser Vorgang unmöglich zu erklären, weil die nöthige Druckdifferenz nicht vorhanden ist. Durch Mege-Wirkung lässt sich alles in ungezwungener Weise erklären, sodass es keiner weiteren Erläuterung bedarf.

XIV. *Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze; von Dr. Karl Exner.*

(Aus dem 91. Bde. d. Sitzungsber. d. kais. Acad. d. Wiss. II. Atbh. vom 5. Febr. 1885; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Durch ein sinnreiches Experiment hat Hr. A. Cornu darauf aufmerksam gemacht, dass in der Richtung der Axe des Quarzes das Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles senkrecht zur Axe.[1])

Dieses von Cornu erkannte Gesetz ist in einem allgemeineren Gesetze enthalten, welches sich aus einer von V. v. Lang theoretisch abgeleiteten und experimentell verificirten Formel herauslesen lässt[2]), ebenso wie aus der analogen, sich aus Cauchy's Theorie ergebenden Formel, welche ebenfalls von V. v. Lang experimentell verificirt ist.

Die Formel, wie sie Cauchy gegeben hat, ist:

$$(1)\quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\varrho \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 \sin^4\varrho + \frac{\cos^4\varrho}{\chi^4}}.$$

n Brechungsquotient einer ebenen Welle, ω ordentlicher Brechungsquotient, ε ausserordentlicher Brechungsquotient, ϱ Winkel der Wellennormale mit der Axe, χ Constante der Rotationspolarisation.

Ist der Krystall des Rotationsvermögens beraubt, oder setzt man $\chi = \infty$, so wird:

$$\frac{1}{n'^2} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\varrho \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\varrho,$$

also:

$$(2)\quad \frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{\omega^2}\cos^2\varrho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\varrho,$$

und es ergibt sich die Gleichung:

$$(3)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1'^2} + \frac{1}{n_2'^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\cos^2\varrho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\varrho\right).$$

---

1) A. Cornu, Compt. rend. **92.** 1882.

2) V. v. Lang, Wien. Ber. **60.** 1869; **75.** 1877.

n_1' und n_2' die der Richtung ϱ entsprechenden Brechungsquotienten des Krystalles ohne Rotationsvermögen.

Andererseits erhält man aus der Gleichung (1):

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\cos^2\varrho+\frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\varrho\right),$$

und man hat aus (3) und (4):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1'^2}+\frac{1}{n_2'^2}\right).$$

n_1 und n_2 die der Richtung ϱ entsprechenden Brechungsquotienten des Krystalles, oder:

$$\tfrac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)=\tfrac{1}{2}(v_1'^2+v_2'^2).$$

v_1 und v_2 Lichtgeschwindigkeiten in irgend einer Richtung v_1' und v_2' Lichtgeschwindigkeiten in derselben Richtung ohne Rotationspolarisation.

Das heisst: Das arithmetische Mittel der Quadrate der beiden, irgend einer Richtung entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich dem arithmetischen Mittel der Quadrate jener Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche dem Krystalle in derselben Richtung ohne Rotationspolarisation zukämen.

Nach einer Bemerkung des Hrn. Cornu muss nun dieser Satz, wenn er für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten gilt, auch für jede Function dieser Quadrate, und somit auch für die einfachen Lichtgeschwindigkeiten gelten. Es folgt dies aus der Kleinheit der Differenzen der Grössen v_1, v_2, v_1', v_2'. Es ist also auch:

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)=\tfrac{1}{2}(v_1'+v_2'),$$

und das heisst: **Für irgend eine Richtung ist das arithmetische Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich dem arithmetischen Mittel jener Geschwindigkeiten, welche derselben Richtung ohne Rotation entsprechen würden.**[1] Insbesondere ergibt sich für die Richtung der Axe:

$$(7) \qquad \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)=v,$$

---

1) Ein analoger Satz für die Lichtfortpflanzung im magnetischen Felde wurde von Cornu (l. c.) aufgestellt und begründet.

v ist die ordentliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und dies ist das Gesetz Cornu's.

Es ist nicht ohne Interesse, die Gleichung (6) mit den Messungsresultaten V. v. Lang's zu vergleichen. Dieser erhielt:

ϱ	n_1	n_2	n_2'	n_1'
0° 27,0′	1,544 188 7	1,544 260 5	1,54423	1,544 224 3
1 54,7	192 5	264 9	23	
2 48,4	194 2	276 6	25	
4 40,0	204 3	304 3	28	
5 4,8	208 8	300 9	29	

wo ich jedoch die Zahlen der vierten Verticalreihe nach Formel (2) hinzugerechnet habe. Beschränkt man sich auch bei den übrigen Zahlen auf 5 Decimalstellen und lässt bei sämmtlichen Zahlen die übereinstimmenden vier ersten Zahlen hinweg, so gelangt man zu der folgenden Tabelle:

ϱ	n_1	n_2	$\frac{1}{2}(n_1+n_2)$	$\frac{1}{2}(n_1'+n_2')$	n_2'	n_1'
0° 27,0′	19	26	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	23	22
1 54,7	19	26	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	23	22
2 48,4	19	28	$23\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	25	22
4 40,0	20	30	25	25	28	22
5 4,8	21	30	$25\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	29	22

Dieser Tabelle ist die Gleichung:

$$\frac{1}{2}(n_1 + n_2) = \frac{1}{2}(n_1' + n_2') \tag{8}$$

zu entnehmen, und diese Gleichung ist nach dem Satze Cornu's, dass an die Stelle der Geschwindigkeiten beliebige Functionen der Geschwindigkeiten gesetzt werden können, identisch mit (6).

Die folgende Tabelle V. v. Lang's enthält die nach Cauchy's Formel unter Benutzung der Messungsresultate berechneten Brechungsquotienten, und zwar auch für den Fall, dass $\chi = \infty$ gesetzt wird, wodurch das charakteristische der Circularpolarisation verschwindet.

ϱ	n_1	n_2	n_2	n_1'
0°	1,544 168 4	1,544 260 2	1,544 224 3	1,544 22
5	209 3	4 308 1	4 929 9	
10	220 0	4 500 9	4 496 5	
15	222 5	4 830 9	4 829 0	
20	223 4	5 281 6	5 280 6	
25	224 2	5 838 2	5 838 0	

Selbstverständlich müssen die Zahlen dieser Tabell Satze (5) entsprechen, sie können jedoch zur Prüfun Genauigkeit jenes anderen Satzes dienen, der gestattet Geschwindigkeiten mit irgend welchen Functionen de schwindigkeiten zu vertauschen. Man erhält in der unter Hinweglassung der übereinstimmenden drei e Ziffern:

ϱ	n_1	n_2	$\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$	$\frac{1}{2}(n_1' + n_2')$	n_2'
0°	41884	42602	42243	42243	42243
5	42093	43081	42587	42586	42929
10	42200	45009	43604	43604	44965
15	42225	48309	45267	45267	48290
20	42234	52816	47525	47525	52806
25	42242	58382	50312	50312	58380

in sehr vollkommener Uebereinstimmung mit Satz (8).

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1885. ANNALEN № 6.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXV.

I. *Ueber die Wärmeentwickelung bei der Quellung und Lösung der Colloide;*

von E. Wiedemann und Ch. Lüdeking.

Während die Vorstellungen über die Constitution von krystallwasserhaltigen Salzen und Lösungen derselben ziemlich entwickelt sind, ist dies bei den Colloiden nicht der Fall. Wir haben versucht, diesem Gegenstande dadurch etwas näher zu kommen, dass wir sowohl die Quellungswärme als auch die Lösungswärme der Colloide bestimmt haben. Die wasserfreien Colloide haben oft die Eigenschaft eine beträchtliche Menge Wassers aufzunehmen, ohne in den flüssigen Zustand überzugehen. Bei erhöhter Temperatur lösen sie sich dann zu einer klaren Flüssigkeit. Vereinzelte Versuche über die dabei auftretenden Wärmeprocesse lagen von Duvernoy[1]) vor, der indess nicht Quellung und Lösung voneinander getrennt hat. Zur Bestimmung der Lösungswärme liessen wir die Colloide erst durch längeres Liegen im Wasser vollkommen aufquellen.

Die Versuchsanordnung war die folgende.

Das Calorimeter bestand aus einem reagensglasähnlichen Gefässe aus dünnem Messing, von 18 ccm Capacität; in dieses wurde die zu untersuchende Substanz gebracht. An seinem oberen Ende wurde es durch eine ganz dünne durchbohrte Korkscheibe gehalten und an dieser mittelst Drähten frei in einem doppelwandigen Metallgefäss aufgehängt. Der doppelwandige Mantel desselben wurde mit Wasser von der Temperatur der umgebenden Luft gefüllt. Auf das Gefäss wurde ein Holzdeckel gelegt, der drei Durchbohrungen trug, durch welche drei Thermometer eingeführt waren. Ein Thermo-

1) Duvernoy, Chem. Centralbl. (3) 5. p. 428 u. 440. 1874.

meter tauchte in den Wassermantel, ein zweites in das Calorimeter, ein drittes endlich in das Aufquellungswasser, welches in einem Reagensglase enthalten war, das, ähnlich wie das Calorimeter und in dessen Nähe, im Wassermantelgefäss aufgehängt war. Der ganze Apparat wurde in dem Keller des hiesigen physikalisch-chemischen Laboratoriums aufgestellt, in dem die Temperaturschwankungen nur wenige Zehntelgrade während eines Tages betrugen. Die Temperatur des Wassers im Wassermantel blieb während der Dauer eines jeden Versuches ganz constant. Zu den Versuchen wurde das Colloid hierauf bis auf 5 mg genau in das Calorimeter eingewogen; meist wurden zwei Gramm benutzt, das Wasser wurde genau gemessen aus einer Bürette in das obenerwähnte Reagensglas eingefüllt. Der Apparat blieb stehen, bis die Thermometer gleiche Temperatur zeigten. Dann wurde der Deckel rasch gehoben, das Wasser aus dem Reagensglase in das Calorimeter gegossen, der Deckel schnell wieder aufgedeckt und das Ganze mittelst des Thermometers kräftig umgerührt. Das Uebergiessen des Wassers nahm nur vier bis fünf Secunden in Anspruch. Unmittelbar nach der Mischung wurde eine Secundenuhr in Bewegung gesetzt und von Minute zu Minute der Stand des Thermometers beobachtet. Zur Correction der beobachteten Temperatursteigerung wurde die Regnault'sche Methode angewandt.

Sollten die Versuche bei höheren Temperaturen ausgeführt werden, so wurde zunächst in ein Wasserbad, das auf der gewünschten Temperatur erhalten wurde, ein weites Messingrohr eingehängt und dann in diesem das Calorimeter befestigt; letzteres nahm nach kurzer Zeit fast die Temperatur des Wasserbades an. Die Auflösungsflüssigkeit wurde im Wasserbade selbst durch Einhängen eines damit gefüllten Reagensglases auf die gewünschte Temperatur gebracht und möglichst schnell in das Calorimeter eingegossen. Die Bestimmung der Auflösungswärme bei erhöhter Temperatur geschah auch in der Weise, dass die Substanz, in eine Glaskugel eingeschmolzen und in dem mit Wasser gefüllten Calorimeter erhitzt wurde und die Kugel bei der gewünschten Temperatur mittelst des Rührers zerdrückt und so die Reaction eingeleitet wurde.

Da es sich bei den obigen Versuchen wesentlich darum handelte, zu entscheiden, ob eine Wärmeentwickelung oder -Bindung stattfand, und ein ungefähres Urtheil über die Grösse derselben zu gewinnen, so sind die ermittelten Wärmemengen nur auf zwei Stellen angegeben; die dadurch gegebene Genauigkeit ist vollkommen genügend. Eine viel grössere dürfte sich auch kaum erreichen lassen. Einmal haben die Colloide meist nicht ganz constante Zusammensetzung, und ferner verläuft die Hydratation und Lösung äusserst langsam, wodurch alle Correctionen sehr gross werden.

Im Folgenden sind die numerischen Ergebnisse mitgetheilt. x ist die Menge des angewandten Colloides, y die Menge des benutzten Wassers in Gramm, t die beobachtete Temperaturerhöhung, C die einem Gramm Substanz entsprechende Wärmeentwickelung, berechnet unter Berücksichtigung der specifischen Wärme der Mischung.

Gelatine. — Es wurde Gelatine verwandt, wie sie in dünnen, farblosen Platten in den Handel kommt. Die Platten wurden zu den Versuchen in kleine Quadrate zerschnitten.

Die Versuche ergaben folgendes:

Temperatur 18,4°.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}9 \quad C = +6{,}2,$

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}8 \quad C = +5{,}3,$

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}9 \quad C = +5{,}6,$

Im Mittel 5,7.

Die specifische Wärme der resultirenden Gallerte war 0,92.

Es ist also, wenn man Gelatine bei gewöhnlicher Temperatur mit Wasser aufquellen lässt, die Quellung von einer Wärmeentwickelung begleitet, die etwas weniger als sechs Grammcalorien pro Gramm beträgt.

Dem entsprechend zeigt sich, dass, wenn man gewässerte Gelatine mit Kochsalzlösung übergiesst, die ihr einen Theil des Wassers entzieht, eine Wärmebindung eintritt.

Es wurde nun Gelatine verwandt, die bereits durch Aufquellen Wasser aufgenommen hatte. Sie wurde auf 34° erhitzt, also nicht geschmolzen [1]), und ihr dann Wasser zugesetzt, sie löste sich.

1) Der Schmelzpunkt lag bei 35°.

Es fanden sich:

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0,3 \quad C = -3,4,$$
$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0,4 \quad C = -4,1,$$
Im Mittel $-3,7$.

Die Lösung der aufgequollenen Gelatine ist also mit e
Wärmeabsorption verbunden. Die Gelatine verhält sich also g
analog, wie die sich hydratisirenden Salze, sie nimmt zunä
Wasser unter Wärmeentwickelung auf, sie hydratisirt s
Bei der Lösung des Hydrats wird dagegen Wärme verbrau
Zur weiteren Prüfung dieses Resultates wurde in der W
vorgegangen, dass Gelatine von verschiedenem Wasserge
mit Wasser übergossen wurde bei Temperaturen, die in je
Falle einer raschen Lösung angemessen waren, ohne
Schmelzung vorher eintreten durfte. Das totale Quan
Wasser war in jedem Experiment 10 g. Folgendes sind
Resultate:

Schmelzpunkt			Wasserzusatz	t	
42,5°	Gelatine 2 g		$+10$ g H_2O	$+0,5$	$C=+$
	„ 2 „	$+100\%\ H_2O$	$+8$ „ H_2O	$-0,2$	$C=-$
34,3	„ 2 „	$+200\%\ H_2O$	$+6$ „ H_2O	$-0,2$	$C=-$
25,0	„ 2 „	$+300\%\ H_2O$	$+4$ „ H_2O	0	$C=$

Das erste Experiment gibt uns die Differenz zwis
Aufquellungs- und Auflösungswärme. Im zweiten sowohl,
im dritten Experiment hat sich die Quellung schon a
spielt, und zeigt sich nur die Lösungswärme. Im vie
Experiment war das thermische Resultat gleich Null, was
Umstande zuzuschreiben ist, dass das Wasser des Colloids
immer mehr dem flüssigen Zustande nähert, je grösser
Procentgehalt an demselben ist. Die specifische Wärme
Endzustandes war so nahe gleich Eins, dass dieser W
auch kurzweg zur Berechnung der Calorien eingesetzt wu

Bei einer anderen Reihe von Experimenten wurde troc
Gelatine mit steigenden Mengen Wasser bei 48° C. übergos
Die Resultate sind in folgender Tabelle angegeben, t ist
Temperatursteigerung.

Gelatine	4	2	2	2	2 g
Wasser	2	2	4	6	8 „
$t =$	$+3,5$	$+3$	$+2,1$	$+1$	$+0,5^{0}$.

Man erkennt auch aus allen diesen Zahlen, dass beim Lösen der Gelatine sich unzweifelhaft zwei einander entgegengesetzte thermische Processe abspielen.

Anschliessend an obige Versuche bestimmten wir noch die Menge Wasser w, welche 1 g Gelatine bei verschiedenen Temperaturen t in gleichen Zeiten (einer Stunde) aufzunehmen vermag. Es war für:

t	1	3–4	9	20	30.
w	2,43	3,2	3,48	6,28	9,48.

Bei 35° fand vollkommene Lösung statt, und schmolz die Gelatine sehr rasch. Wir fanden übrigens, entgegengesetzt den Angaben der Lehrbücher, z. B. von Beilstein, dass sich Gelatine bei gewöhnlicher Temperatur in Wasser, wenn auch nur in sehr geringer Menge löst. Das von Gelatine, über der es längere Zeit gestanden hatte, abgegossene Wasser hinterliess beim Verdampfen einen deutlich verkohlenden Rückstand.

Versuche, die zur Bestimmung der latenten Schmelzwärme in der Weise angestellt wurden, dass man entweder die Erwärmungsgeschwindigkeit oder die Abkühlungsgeschwindigkeit ermittelte, wenn ein mit wasserhaltiger Gelatine gefülltes Gefäss in eine Umgebung von constanter höherer oder tieferer Temperatur gebracht wurde, ergaben keine sicheren Resultate. Die Gelatine geht durch einen plastischen Zustand hindurch.

Gummi arabicum. — Die Versuche wurden bei gewöhnlicher Temperatur angestellt. Das Gummi arabicum wurde als Pulver angewandt.

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1,4 \quad C = +9,0,$$
$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1,3 \quad C = +9,0.$$

Die specifische Wärme der Lösung war 0,93.

Zum Nachweise der negativen Lösungswärme wurde das Experiment so ausgeführt, dass der Hydratationsprocess durch mehrere empirische Versuche vom Lösungsprocess soviel als möglich gesondert wurde. Es stellte sich heraus, dass zur Hydra-

tation auf 2 g Gummi etwa 1 g Wasser zugesetzt werden musste, wobei sich Wärme entwickelte, und dass dann beim ferneren Zusatz von 4 g Wasser eine Temperaturerniedrigung von 2° stattfand oder $C = -0{,}6$ pro Gramm Gummi war. Die Auflösungswärme ist, wie ersichtlich, sehr gering im Vergleich zur Hydratationswärme.

Traganthgummi. — Er wurde als Pulver angewandt.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1{,}9 \quad C = +10{,}3,$
$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1{,}8 \quad C = +10{,}3.$

Specifische Wärme 0,93.

Da der Traganthgummi sich sowohl bei niederen wie bei höheren Temperaturen nur wenig löst, so war es nicht möglich, eine negative Lösungswärme zu constatiren. Jedenfalls vermindert dieselbe die positive Hydratationswärme.

Dextrin. — Das angewandte Dextrin enthielt Spuren von Stärke. Für die Hydratationswärme ergab sich:

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1{,}1 \quad C = 7{,}03,$
$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1{,}2 \quad C = 7{,}65.$

Im Mittel 7,34.

Specifische Wärme 0,91.

Die negative Lösungswärme wurde wie oben beim Gummi nachgewiesen. Auf 2 g Dextrin kam zur Hydratation weniger als 1 g Wasser, dabei entwickelte sich Wärme, und zeigte sich dann beim Zusatz von weiteren 4 g Wasser $t = -0{,}15°$ und $C = -1{,}8$.

Stärke.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}8 \quad C = 6{,}90,$
$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}7 \quad C = 6{,}19,$

Mittel $C = 6{,}55$.

Specifische Wärme 0,97.

Um die negative Lösungswärme nachzuweisen, verfuhren wir ganz wie beim Gummi arabicum. 1 g Stärke erforderte etwa 2 g Wasser zur Hydratation, und wurde dann auf Zusatz von weiteren 4 g Wasser $t = -0{,}2°$ beobachtet oder $C = -1{,}2$ pro Gramm Stärke.

Gerbsäure. — Duvernoy fand die Lösungswärme dieses Colloids positiv, wir dagegen negativ.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0{,}4 \quad C = -2{,}2.$

Specifische Wärme 0,95.

Gerstenzucker und Rohrzucker. — Gerstenzucker wird durch vorsichtiges Erhitzen und Schmelzen von raffinirtem Rohrzucker erhalten.

Gerstenzucker.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1{,}4 \quad C = +8{,}6,$

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1{,}4 \quad C = +8{,}6.$

Rohrzucker.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0{,}5 \quad C_1 = -2{,}8.$

Der Gerstenzucker stellt eine amorphe Modification des Rohrzuckers dar; in der Lösung sind beide in der krystallinischen Form enthalten. Die Wärmemenge $C + C_1 = 11{,}5$ ist demnach die Umwandlungswärme von amorphem in krystallinischen Zucker. Diese ist hier wie in allen analogen Fällen positiv. Die krystallinische Modification stellt ja auch die stabilere Anordnung der Molecüle dar. Sie ist auch die dichtere. Der Rohrzucker hat ein specifisches Gewicht 1,5984, der Gerstenzucker 1,5122.

Weinsäure. — a) Rechtsweinsäure.

$x = {}^1/_2 \quad y = 10 \quad t = -1{,}0^0 \quad C = -25{,}37$

b) Inactive Weinsäure wurde als amorphe Masse erhalten durch vorsichtiges Erhitzen der Rechtsweinsäure auf 170° C.

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}7 \quad C = +5{,}42,$

$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0{,}9 \quad C = +6{,}43.$

Im Mittel 5,92.

Auch hier gibt die amorphe Substanz eine positive, die krystallinische eine negative Wärmetönung. Die Umwandlungswärme beträgt ca. 32,2. Berthelot und Jungfleisch haben die vier Modificationen der krystallisirten Weinsäure untersucht und stets, wie wir, eine negative Wärmetönung bei der Lösung gefunden. Wie beim Rohrzucker ist auch hier die krystallisirte Weinsäure mit einem specifischen Gewicht 1,7617 dichter als die amorphe mit einem specifischen Gewicht 1,6321.

Kieselsäure. — Um zu bestimmen, ob die Coagulation der Kieselsäure unter Wärmeentwickelung vor sich geht oder nicht, wurde in folgender Weise verfahren. Wasserglas wurde verdünnt; die Verdünnungswärme war negativ. Hierauf wurde durch sorgfältige Neutralisation mittelst Salzsäure Kieselsäure freigemacht und durch Zusatz von einer

Spur Ammoniak plötzlich coagulirt. Das letztere Phänomen wurde thermisch bestimmt. Es ergab sich bei den Versuchen $C = +12,2$ und $+11,3$ Calorien.

Danach ist die Coagulation der Kieselsäure mit einer beträchtlichen Wärmeentwickelung verbunden. Diese Wärmeentwickelung lässt sich auch beobachten, wenn man eine Lösung von Natriumsilicat durch Chlorwasserstoffsäure neutralisirt und die Lösung so concentrirt nimmt, dass die Coagulation von selbst eintritt. Auch hierbei steigt bei der Coagulation die Temperatur. Hr. Thomsen[1]) konnte bei der Coagulation von Kieselsäurelösungen keine Temperaturerhöhung constatiren. Wir glauben dies dem Umstande zuschreiben zu müssen, dass er Lösungen untersuchte, die, im Vergleich mit den von uns benutzten, sehr verdünnt waren, und dass seine Versuche etwa 20—30 Minuten dauerten, während bei uns die Coagulation fast momentan vor sich ging. Die Kieselsäuregelatine, die wir erhielten, enthielt deshalb auch viel weniger Wasser als die seinige, was ein schwer wiegender Factor ist.

Fasst man die Coagulation als eine Abscheidung des gelösten Körpers aus der Lösung auf, so hätte die hydratisirte Kieselsäure eine negative Lösungswärme. Rührt dieselbe aber, wie Grimaux will, von Condensation zweier Molecüle zu einem unter Wasserabscheidung her, der also z. B. bei Kieselsäure dem Process $2\,Si(OH_2)_4 = Si_2(OH_2)_3 + H_2O$ entspräche, so stellt die Coagulationswärme die dem angedeuteten chemischen Process entsprechende Wärmeentwickelung dar.

Eiweiss. — Es wurden Versuche sowohl mit frischem Eiweiss aus Eiern, als auch mit festem, löslichem Eiweiss, wie es in den Handel kommt, angestellt.

a) Eiweiss frischer Eier. Das Eiweiss eines Eies wog 22 g; die beobachtete Temperaturerhöhung bei der Coagulation desselben durch Essigsäure betrug $0,5^0$ oder $C = +12,1$ Cal.

Das Eiweiss eines anderen Eies wog 24 g; die beobachtete Temperaturerhöhung bei der Coagulation betrug $0,55^0$ oder $C = +12,4$ Cal.

b) Festes Eiweiss von Trommsdorff:

1. $x = 2$ $y = 10$ $t = +0,4$ $C = +2,8$.

1) J. Thomsen, Thermochem. Untersuch. 1. p. 211. 1882.

Specifische Wärme 0,96.

Dieses Eiweiss wurde durch Zusatz von etwas Salpetersäure coagulirt, die Temperaturerhöhung betrug 0,4°, also pro Gramm Eiweiss die Hydratationswärme $C = +2{,}3$ Cal.

2. $x = 2$ $y = 10$ $t = +0{,}4$ $C = +2{,}8$ Cal.

Diese Lösung wurde coagulirt mit Salpetersäure, die Temperaturerhöhung betrug 0,4°, also pro Gramm Eiweiss 2,9 Calorien.

Löste man aufgequollenes Eiweiss in Wasser, so trat bei der Lösung eine Temperaturerniedrigung von ca. 0,20° ein.

Weichte man trocknes Eiweiss mit ganz wenig Wasser ein, sodass der Hydratationsprocess den Lösungsprocess weit überwog, so wurde eine Temperaturerhöhung von 3,0° erzielt.

Der Lösungsprocess des festen Eiweisses ist also nicht ein einfacher Vorgang, sondern er verläuft ähnlich demjenigen bei der Gelatine. Erst tritt eine Hydratation mit Wärmeentwickelung ein, der dann die eigentliche Lösung mit negativem Wärmeeffect folgt.

Diese Erscheinung dürfte physiologisch von Bedeutung sein.

Guthrie hat angegeben, dass die Tension des Wasserdampfes bei Lösungen von Colloiden gleich derjenigen des reinen Wassers ist. Für höhere Temperaturen würde schon aus seinen eigenen Versuchen folgen, dass dies nicht der Fall ist, indem der Siedepunkt von Gelatinelösung höher liegt als der von reinem Wasser. Für niedrige Temperaturen war die Richtigkeit der Guthrie'schen Angabe schon deshalb nicht wahrscheinlich, weil die Vereinigung von Wasser mit Gelatine z. B. mit einer Wärmeentwickelung verbunden ist. Directe vergleichende Versuche mit Lösungen von Gummi arabicum und Wasser ergaben in der That für die Gummilösungen eine kleinere Spannkraft als für das reine Wasser.

Fassen wir das Resultat der obigen Versuche zusammen, so ergibt sich:

Die Lösung des trocknen Colloids setzt sich aus zwei Processen zusammen, 1. der Hydratation, die mit Wärmeentwickelung, 2. der Lösung, die mit Wärmebindung verbunden ist.

Leipzig, im August 1884.

II. *Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme einiger Wasser-Aethylalkoholgemische von der Temperatur; von Ad. Blümcke.*

(Aus dem physikal. Laborat. der Techn. Hochschule zu München.)

(Hierzu Taf. II Fig. 1 u. 2.)

In einer früheren Arbeit: „Ueber den Einfluss des Concentrationsgrades auf die specifische Wärme wässeriger und alkoholischer Lösungen von Metallchloriden" bediente ich mich des Bunsen'schen Eiscalorimeters zur Ermittelung der specifischen Wärme der betreffenden Flüssigkeiten. — Auch bei der verliegenden Arbeit kam dieser Apparat zur Verwendung, und zwar fast genau in der früher bereits angegebenen Zusammenstellung. Die einzigen unwesentlichen Aenderungen, welche ich anbrachte, bestanden in der Art der Verbindung des Scalenrohres mit dem Calorimeter und der Einrichtung zur Zurückstellung des Quecksilberfadens in demselben nach jedem Versuch. Beide Vorkehrungen sind in Fig. 1a und b im Querschnitt gezeichnet. An dem senkrechten Ende des Scalenrohres ist mit Siegellack eine Büchse B angekittet, welche oben ein Schraubengewinde trägt, auf dem sich die Mutter M bewegt, während unten ein Ring R angeschraubt ist; ein zweiter Ring R_1 von ähnlicher Form wie R ist lose über den glatten Theil der Büchse verschiebbar. Zwischen beiden Ringen R und R_1 sitzt auf der Büchse der Kautschukring K, der durch Anziehen der Schraube M zusammengepresst werden kann. Die Dicke des Kautschukringes ist so zu bemessen, dass derselbe bei nicht angezogener Schraube bequem in den offenen Schenkel des Calorimeters einpasst und bei angezogener Schraube einen festen Abschluss ermöglicht. Diese im Princip keineswegs neue Vorrichtung gestattet ein schnelles und bequemes Einsetzen des Scalenrohres, ohne dass Gefahr vorhanden wäre, es könnten Luftblasen im Schenkel des Calorimeters zurückbleiben. Die Vorrichtung zur Zurückschiebung des Quecksilberfadens im Scalenrohr ist im unteren Theile genau die gleiche, nur hat die Büchse oben eine Erweiterung bei E,

in welche die innen mit einem Gewinde versehene zweite Büchse F eingeschraubt werden kann; in letzterer bewegt sich der oben mit einem Gewinde versehene Stift D, dessen glatter unterer Theil quecksilberdicht durch einen Lederring bei G gleitet. Es ist klar, dass durch Einschrauben des Stiftes D der Quecksilberfaden beliebig eingestellt werden kann. Ich brauche wohl kaum hinzuzufügen, dass alle letztgenannten Theile, weil sie mit Quecksilber in Berührung kommen, aus Stahl hergestellt sind.

Ueber das Verhalten der Eiscylinder (Eiskerne) des Calorimeters ist schon viel gesagt worden: nach den Beobachtungen Neesen's[1]) hat man es in der Hand, durch Aenderung des auf dieselben ausgeübten Druckes des Quecksilbers im engen Schenkel ein beliebiges Weiterfrieren oder Abschmelzen zu erzwingen; Verunreinigen des die Calorimeter umgebenden Wassers oder Schnees führen Weiterfrieren herbei. Nach Velten[2]) soll die Art und Weise des Entstehens insofern auf ihr späteres Verhalten von Einfluss sein, dass solche Cylinder, welche streng nach Bunsen's Vorschrift, also durch Einführen eines abgekühlten Alkoholstromes in das Proberöhrchen erhalten wurden, ein Weiterfrieren zeigten, während diejenigen, welche entstanden, indem die bereits durch Gebrauch abgenutzten durch den durchgeführten Alkoholstrom wieder ergänzt wurden, im Abschmelzen begriffen waren.

Ich erwähnte in meiner früheren Arbeit, dass sämmtliche von mir hergestellten Eiscylinder im Abschmelzen begriffen waren, welche mit Ausnahme der anfänglichen durch Ergänzen des abgenutzten in angegebener Weise erhalten wurden.

Die Bemerkung Velten's veranlasste mich, dem Verhalten des Eiscylinder etwas mehr Aufmerksamkeit zu schenken. Ich pflegte dieselben zu Anfang genau nach den Vorschriften Bunsen's zu erzeugen, später indem ich das Calorimeter mit einer Kältemischung aus zerstossenem Eis und Kochsalz umgab und zugleich einen Alkoholstrom durch

1) Neesen, Beibl. 7. p. 587. 1883.
2) Velten, Wied. Ann. 21. p. 52. 1884.

das Proberöhrchen führte, wodurch es mir leichter gelang, das Wasser zum Gefrieren zu bringen; die erste Eisbildung geschah bei allen meinen Versuchen ohne Ausnahme bei einer Temperatur von ungefähr — 7° C., und zwar erstarrte jedesmal die ganze Masse; eine sofortige Eisbildung rings um das Proberöhrchen herum beobachtete ich nie. War die erste Eisbildung eingetreten, so wurde die umgebende Kältemischung schnell entfernt und das Calorimeter mit Wasser rein abgewaschen und hierauf wieder ganz nach Bunsen verfahren, nur stellte ich das Instrument in einen kleinen Kasten, der mit Eisstücken umgeben war, um nicht das Gefrieren durch die Wärme der Umgebung zu beeinträchtigen. — Um das Verhalten der Eiscylinder genauer zu studiren, hatte ich zwei genau gleichmässig eingerichtete Calorimetergefässe; beim ersten stand das Instrument in destillirtem Wasser, hierbei zeigten alle Cylinder, mochten sie entstanden sein, wie sie wollten, ein geringes Abschmelzen; die Höhe des Quecksilbers im engen Schenkel des Calorimeters betrug ungefähr 25 cm. Im zweiten Gefäss hatte ich das Wasser durch Spuren von Kochsalz verunreinigt, die Folge davon war, dass sämmtliche Cylinder ohne alle Ausnahme ein allerdings kaum wahrnehmbares Weiterfrieren zeigten; nur durch Steigern des Druckes, indem ich an das Scalenrohr einen mit Quecksilber gefüllten Schlauch ansetzte, trat wieder Abschmelzen ein. Nach Vermehrung des Kochsalzzusatzes gelang es mir nicht mehr, durch den Druck einer Quecksilbersäule von ungefähr 50 cm das sehr merklich gewordene Weiterfrieren aufzuheben. Später, nachdem die Calorimeter einige Monate in Gebrauch waren, zeigten bei beiden Apparaten alle Eiscylinder infolge zufällig eingetretener Verunreinigung des Wassers ein so starkes Weiterfrieren, dass ich das Wasser einfach entfernte, sodass die Instrumente nur noch von Luft umgeben im inneren Gefäss standen. Dadurch hörte das Weiterfrieren auf; allerdings wurde der Scalengang etwas unregelmässiger, aber keineswegs in der Weise, um Beobachtungen unmöglich zu machen. Ich konnte also bei obigen Untersuchungen in keinem Falle die Beobachtung Velten's bestätigen; allerdings muss ich

gehen, dass ich den Druck auf die Eiscylinder nicht hinreichend genug veränderte, um mit aller Gewissheit über den Gegenstand entscheiden zu können.

Das im grösseren Gefäss nachzulegende Eis versuchte ich durch Schnee zu ersetzen, allein ich machte dabei die unangenehme Erfahrung, dass derselbe nicht eben sehr verunreinigt zu sein braucht, um die Rolle einer Kältemischung zu übernehmen, was zur Folge hatte, dass die Eiskruste im kleineren Gefäss beständig wuchs und täglich verkleinert werden musste, wollte ich nicht das Calorimeter der Gefahr des Anfrierens aussetzen, wodurch in der That einmal ein Zerbrechen desselben herbeigeführt wurde.

Die zu untersuchenden Körper wurden erwärmt einestheils in einem Heizgefäss mit Rückkühlung durch Flüssigkeitsdämpfe, wie Fig. 2 schematisch zeigt. Der im Kessel *F* entwickelte Dampf trat bei *A* in den inneren Mantel des den Körper enthaltenden Apparates, verliess denselben bei *B*, um durch das Rohr *H* gehend bei *C* in den äusseren Mantel zu treten, den es bei *D* verliess, um nach geschehener Verflüssigung durch die Kühler *G* wieder nach *F* zurückzukehren. Alle Theile, mit Ausnahme der zur Condensation dienenden, waren mit Filz überzogen.

Gehalten wurden die Körper durch den Schieber *E*, der von U-förmiger Gestalt war, um einen Wärmeverlust nach unten möglichst zu verhindern; er bewegte sich in passenden, die Mäntel des Apparates durchbrechenden Führungen. Das innere Rohr war oben durch einen Kork verschlossen, der mit einer Durchbohrung zur Aufnahme des Thermometers versehen war. Um die Körper in das Calorimeter zu bringen, wurde der ganze an einem zweckentsprechenden Gestell angebrachte Apparat an dasselbe herangebracht, sodass sich das innere Rohr des ersteren direct über dem Proberöhrchen befand, und dann der Schieber *E* einfach zurückgezogen. Zum Heizen dienten mir die Dämpfe von Wasser (97—98° C.), Schwefelkohlenstoff (44—45° C.) und Aether (30—32° C.).

Ich hatte alle Ursache, zufrieden zu sein, was die Constanz der Temperatur im Inneren des Heizgefässes anlangt,

dagegen wollte es mir nicht gelingen, ein passendes Materia zur Dichtung des Kesseldeckels beim Heizen mit Schwefel kohlenstoff und Aether zu finden; die beim Wasser seh brauchbare Pappe war für die beiden übrigen undicht, so dass immer geringe Mengen entwichen, was beim Schwefel kohlenstoff etwas unangenehm war. Beim Aether entzündeten sich einigemal die Dämpfe, weshalb ich denselben späte nicht mehr verwendete.

Ferner bediente ich mich zum Erwärmen der Körper eines durch eine sich automatisch regulirende Flamme au constanter Temperatur gehaltenen Wasserbades. Dabei befanden sich die Körper selbst in Wärmeflaschen ganz ähnlich den von Velten angewendeten.

In allen Fällen wurden die Temperaturen mit dem Thermometer bestimmt.

Wie bei meiner früheren Arbeit, wurden die Flüssigkeiten in Glashüllen eingeschlossen.

Was ich über die specifische Wärme des Glases zu sagen habe, ist keineswegs geeignet, demselben zur besonderen Empfehlung betreffs seiner Verwendbarkeit zu dienen.

Wie ich schon in meiner ersten Arbeit angab, fand ich die specifische Wärme des Glases schwankend, obschon alle von mir verwendeten Sorten von derselben Quelle bezogen und nach demselben Recept hergestellt waren. Ich fand später, dass Stücke von ein und demselben Rohr, wenn schon geringe, so doch merkliche Verschiedenheiten zeigten; ferner erhielt ich für das gleiche Stück bei aufeinanderfolgenden Versuchen verschiedene Werthe, und zwar meist abnehmende, z. B. erhielt ich für ein Stück: für ein zweites:

$C_{0-98} = 0{,}193,\ 0{,}190,\ 0{,}188.\qquad C_{0-98} = 0{,}206,\ 0{,}204,\ 0{,}203.$

Eine weitere Glassorte ergab zuerst:

$C_{0-54} = 0{,}183$, dann $C_{0-15} = 0{,}165$, dann wieder $C_{0-54} = 0{,}177$.

Diese Verschiedenheit konnte nicht von irgend welchen Unordnungen in den Calorimetern herrühren, denn für ein Stück Kupfer erhielt ich immer die gleiche specifische Wärme, natürlich abgesehen von den Beobachtungsfehlern.

Um zu sehen, von welchem Einfluss der Umstand ist,

ass die Glashüllen bei der Herstellung, sowie beim Zuchmelzen einige Zeit der Gebläseflamme ausgesetzt werden, ielt ich ein Stück, für welches:

$$C_{0-98} = 0{,}198$$

war, längere Zeit in die Flamme, ich bekam dann:

$$C_{0-98} = 0{,}201,$$

nachdem es so lange der Flamme ausgesetzt war, bis es matt wurde, ward:

$$C_{0-98} = 0{,}207.$$

Um diese Einflüsse möglichst zu verringern, verfuhr ich n der Weise, dass ich von jeder Reihe von Glashüllen, die us einem Rohr hergestellt wurden, drei entnahm und von eder die specifische Wärme bestimmte, das Mittel aus diesen urde dann für die übrigen angenommen. Wurden mit einer eihe von Glashüllen, welche Flüssigkeiten enthielten, die ersuche wiederholt, so geschah natürlich dasselbe mit den eren Glashüllen.

Die Ursache dieser Erscheinungen dürfte wohl dieselbe in, welche die Aenderungen der Fixpunkte der Thermoeter veranlasst, sie wäre also in molecularen Umlagerungen suchen, über die aber alle Anhaltspunkte fehlen.

Was die Abhängigkeit der specifischen Wärme des lases von der Temperatur anlangt, so konnte ich die bisrigen Beobachtungen darüber nur bestätigen, wonach sie allgemeinen mit der Temperatur zunimmt.

Um einen Begriff von der Genauigkeit und Brauchbareit der von mir erhaltenen Zahlen zu geben, wird es vieleicht passend sein, wenn ich die Resultate über die speifische Wärme des Wassers mittheile.

Tabelle I.

Gewicht des Wassers	Gewicht des Glases	Erhitzungs-Temperatur	Spec. Wärme des Wassers	
0,6673 g	1,5354 g	98,46 °C.	1,0129	
„ „	„ „	98,43 „	1,0122	
0,5461 „	1,4978 „	98,42 „	1,0143	
„ „	„ „	98,45 „	1,0130	Mittel 1,013

Gewicht des Wassers	Gewicht des Glases	Erhitzungs-Temperatur	Spec. Wärme des Wassers	
0,6342 g	1,2827 g	53,8 °C.	1,019	
" "	" "	53,7 "	1,005	
" "	" "	53,9 "	1,017	
0,4902 "	1,1805 "	53,8 "	1,006	
" "	" "	53,8 "	1,013	
" "	" "	54,0 "	1,008	Mittel 1,011
0,6789 g	1,4336 g	44,7 °C.	1,005	
" "	" "	44,8 "	1,015	
" "	" "	45,0 "	1,019	
" "	" "	44,8 "	1,004	
0,4339 "	1,6693 "	44,5 "	1,010	
" "	" "	44,4 "	1,006	
" "	" "	44,8 "	1,008	
" "	" "	44,7 "	1,005	Mittel 1,009
0,6342 g	1,2827 g	30,1 °C.	1,018	
" "	" "	30,1 "	1,007	
" "	" "	30,2 "	1,006	
" "	" "	30,1 "	1,014	
0,5334 "	1,1828 "	30,2 "	1,023	
" "	" "	30,1 "	1,008	
" "	" "	30,1 "	1,005	
" "	" "	30,2 "	1,013	Mittel 1,012
0,4902 g	1,1805 g	14,8 °C.	1,015	
" "	" "	14,8 "	1,028	
" "	" "	14,9 "	1,029	
0,6342 "	1,2827 "	14,5 "	1,018	
" "	" "	14,5 "	1,030	
" "	" "	14,5 "	1,024	
0,5334 "	1,1828 "	14,8 "	1,009	
" "	" "	14,9 "	1,014	
" "	" "	15,0 "	1,033	Mittel 1,022

Wie zu erwarten war, sind die Abweichungen um so grösser, je enger das Temperaturintervall ist; etwas grösser waren die Abweichungen bei den Mischungen, weil bei diesen wegen ihres geringeren specifischen Gewichts das Gewicht des Glases mehr überwog, als beim Wasser. Was die von mir erhaltenen Werthe für die specifische Wärme des Wassers anlangt, so widersprechen sie denjenigen Velten's keineswegs; es ist nach

meinen Beobachtungen:	nach Velten:
$\frac{C_{0-15}}{C_{0-98}} = 1{,}009$	$\frac{C_{0-14,59}}{C_{0-99,68}} = 1{,}011$
$\frac{C_{0-30}}{C_{0-98}} = 0{,}999$	$\frac{C_{0-27,67}}{C_{0-99,68}} = 1{,}007$

$$\frac{C_{0-45}}{C_{0-98}} = 0,996 \qquad \frac{C_{0-42,14}}{C_{0-99,68}} = 1,000$$

$$\frac{C_{0-54}}{C_{0-98}} = 0,998 \qquad \frac{C_{0-56,13}}{C_{0-99,68}} = 0,999$$

Es haben also die Verhältnisse der specifischen Wärme
mir ungefähr denselben Gang wie bei Velten; natürlich
lienen die Zahlen des letzteren grösseres Vertrauen, weil
grössere Substanzmengen anwandte, dann auch, weil er
Wasser nicht in Glas, sondern in Platin einschloss.

In folgender Tabelle sind die Mittelwerthe der einzelnen
suchsdaten angegeben; es bedeutet p den Procentgehalt
Mischung an Alkohol, n die Anzahl der Molecüle Wasser,
auf ein Molecül Alkohol kommen. Der Gang der Wärme-
acitäten ist innerhalb sämmtlicher Temperaturintervalle
grossen und ganzen derselbe: ein anfängliches Steigen
zu einem Maximum, welches bei $p = 15$ bis $p = 20$ ein-
t, dann wieder ein Sinken, also gerade so, wie es von
n übrigen Beobachtern[1]) auch gefunden wurde.

Tabelle II.

p	n	C_{0-15}	C_{0-30}	C_{0-45}	C_{0-54}	C_{0-98}
)	∞	1,022	1,012	1,009	1,011	1,013
,4	180	1,034	1,019	—	1,020	—
,5	43,9	1,066	1,037	—	1,042	—
,4	19,9	—	—	1,055	—	1,089
,9	14,6	1,116	1,069	—	1,071	—
,1	10,2	1,107	1,070	—	1,071	—
,8	9,7	—	—	1,065	—	1,102
,8	7,7	—	—	1,054	—	1,086
,8	6,5	—	—	1,038	—	1,072
,6	6,1	1,057	1,036	1,036	1,042	—
,5	2,9	0,940	0,922	0,920	0,954	0,964
,6	0,7	0,717	0,718	0,725	0,758	0,792
,3	0,0	0,569	0,579	0,595	0,630	0,683

Ein directes Vergleichen meiner Zahlen mit denen an-
er Beobachter ist wegen der Verschiedenheit der Tem-
aturgrenzen nicht möglich.

1) Dupré u. Page, Phil. Mag. (4) **38.** p. 158—162. 1869. Schüller,
guraldissertation. Bonn 1869. Pogg. Ann. Ergbd. **5.** p. 116—146
2—221. 1871.

Schüller macht auf den eigenthümlichen Gang des Verhältnisses der beobachteten zu den berechneten specifischen Wärmen der von ihm untersuchten Wasser-Alkoholgemische aufmerksam, welches mit zunehmender Concentration bis zu einem bei $p = 30$ liegenden Maximum steigt, um dann langsam zu fallen; folgende Tabelle zeigt, dass dies auch bei allen meinen Versuchsreihen der Fall ist, nur scheint das Maximum der specifischen Wärmen zwischen 0 und 98° näher an $p = 20$ zu liegen.

Tabelle III.

p	C_{0-15}	k_{0-15}	$\frac{C}{k}$	C_{0-30}	k_{0-30}	$\frac{C}{k}$	C_{0-45}	k_{0-45}	$\frac{C}{k}$
10	1,100	0,976	1,127	1,054	0,968	1,089	1,050	0,967	1,086
20	1,110	0,930	1,194	1,070	0,924	1,158	1,065	0,925	1,150
30	1,058	0,883	1,199	1,041	0,880	1,183	1,028	0,883	1,164
40	0,992	0,837	1,185	0,971	0,836	1,161	0,968	0,841	1,151
50	0,992	0,791	1,166	0,906	0,792	1,144	0,908	0,800	1,135
100	0,560	0,560	1,000	0,573	0,573	1,000	0,590	0,590	1,000

p	C_{0-54}	k_{0-54}	$\frac{C}{k}$	C_{0-98}	k_{0-98}	$\frac{C}{k}$
10	1,055	0,973	1,084	1,082	0,980	1,104
20	1,072	0,935	1,146	1,103	0,946	1,166
30	1,041	0,897	1,161	1,063	0,913	1,164
40	0,990	0,859	1,153	1,006	0,880	1,143
50	0,931	0,821	1,134	0,950	0,847	1,112
100	0,630	0,630	1,000	0,680	0,680	1,000

Auf der Figurentafel ist der Verlauf der specifischen Wärmen graphisch dargestellt; die Ordinaten sind die specifischen Wärmen, die Abscissen die Concentrationsgrade. Ein Blick auf diese Curven wird erklärlich finden lassen, dass es mir nicht gelang, eine Gesetzmässigkeit zwischen specifischer Wärme, Concentration und Temperatur der betreffenden Gemische aufzufinden.

Bis ungefähr $p = 20$ liegen die Curven übereinander, dann senkt sich C_{0-15}, um die übrigen zu schneiden; ebenso schneidet die anfänglich zwischen C_{0-54} und C_{0-45} verlaufende C_{0-30} die letztere.

J. Thomson[1]) benutzt die von Duprè und Page gefun-

1) J. Thomsen, Thermochemische Untersuchungen. **1.** p. 74. 1882.

denen specifischen Wärmen sowie die Mischungswärmen der Wasser-Alkoholgemische zur näherungsweisen Berechnung der Wärmetönung derselben bei ihren Siedepunkten und findet, dass dieselbe gleich Null ist. Ich behalte im Folgenden die Thomsen'sche Bezeichnung bei, es ist also:

φ die Aenderung der Wärmetönung,

q_a die Molecularwärme des Wassers,

q_b " " " Alkohols,

q_c das calorimetrische Aequivalent des Gemisches,

$P = 46.100/p$ das Gewicht der Mischung, das einem Molecül Alkohol entspricht,

s die specifische Wärme der Mischung,

ist ferner noch:

σ die specifische Wärme des Wassers,

σ_1 " " " " Alkohols,

dann ist:

$$\varphi = q_a + q_b + q_c = (P - 46) + 46\,\sigma_1 - s\,.\,P.$$

Folgende Tabellen enthalten die Thomsen'schen Werthe für φ und diejenigen, welche man erhält, wenn man in diese Gleichung die von mir gefundenen Werthe einmal $s = C_{0-54}$, dann $s = C_{0-98}$ einsetzt.

Tabelle IV.

p	P	s	q_c	φ	
100	46	0,6043	27,80	0,0	Thomsen
90	51,11	0,6576	33,61	− 0,7	Thomsen
40	115,00	0,9680	113,3	−14,5	Thomsen
30	153,33	1,0260	157,3	−22,5	Thomsen
20	230,00	1,0436	240,0	−28,2	Thomsen
10	460,00	1,0358	476,4	−34,6	Thomsen
100	46	0,630	28,98	0,0	
90	51,11	0,687	35,11	− 1,0	
40	115,00	0,990	113,9	−15,1	
30	153,33	1,041	159,6	−22,1	
20	230,00	1,072	246,6	−31,6	
10	460,00	1,055	485,3	− 37,8	
100	46	0,680	31,28	0	
90	51,11	0,730	37,31	− 0,9	
40	115,00	1,006	115,7	−14,5	
30	153,33	1,063	163,0	−21,0	
20	230,00	1,103	253,7	−36,0	
10	460,00	1,082	507,7	−47,0	

Es nimmt also φ mit der Temperatur zu; die geringe Unregelmässigkeiten für $p = 40$ und $p = 30$ können leich durch Beobachtungsfehler erklärt werden.

Thomsen berechnet ferner die Wärmeentwickelung R_T bei der Siedetemperatur T aus der von Dupré und Pag bei der Temperatur t beobachteten nach der Formel:

$$R_T = R_t + \varphi(T - t),$$

sowie nach der aus den Versuchsdaten dieser Beobachter ab geleiteten Formel:

$$R' = -68{,}2 \, . \, \varphi \, .$$

Die folgenden Tabellen enthalten die von Thomse erhaltenen Werthe sowie die sich ergebenden, wenn φ nac meinen Beobachtungen bestimmt wird.

Tabelle V.

p	T	t	$T-t$	φ	$\varphi(T-t)$	R_t	R_T	R'	$R_t - R'$	
90	78	18,1	59,9	− 0,7	− 42	79	+ 37	48	+ 31	Thomsen
40	82,5	17,4	65,1	−14,5	− 943	1032	+ 89	986	+ 46	
30	84	17,3	66,7	−22,5	−1481	1471	− 10	1514	− 43	
20	86,5	16,1	70,4	−28,2	−1985	2022	+ 37	1918	−104	
10	91	17,3	73,7	−34,6	−2550	2455	− 95	2353	−102	
90	78	18,1	89,9	− 1,0	− 60	79	+ 19	68	+ 11	
40	82,5	17,4	65,1	−15,1	− 983	1032	+ 49	1029	+ 3	
30	84	17,3	66,7	−22,1	−1474	1471	− 3	1507	− 36	
20	86,5	16,1	70,4	−31,6	−2225	2022	− 203	2155	−133	
10	91	17,3	73,7	−37,8	−2786	2455	− 331	2578	−123	
90	78	18,1	59,9	− 0,9	− 54	79	+ 25	61	+ 18	
40	82,5	17,4	65,1	−14,5	− 944	1032	+ 88	989	+ 43	
30	84	17,3	66,7	−21,0	−1401	1471	+ 70	1432	− 39	
20	86,5	16,1	70,4	−36,0	−2534	2022	− 512	2455	−433	
10	91	17,3	73,7	−47,0	−3464	2455	−1009	3205	−750	

Wie man sieht, sind bei Anwendung der von mir erhaltenen Werthe der specifischen Wärme zwischen 0 und 54° die Werthe für R_T weniger in Uebereinstimmung mit der Theorie als bei Thomsen, aber immer noch nicht geeignet, dessen Schlüsse umzustossen. Dagegen erhalte ich bei Anwendung der specifischen Wärme zwischen 0 und 98° für R_T bei $p = 20$ und $p = 10$ entschieden zu grosse Werthe. Im ersten Fall lassen sich die Unterschiede wohl noch durch Beobachtungsfehler erklären, dagegen entschieden nicht mehr

im zweiten, denn die Grenzen derselben sind bei der Versuchsreihe zwischen 0 und 98° dazu zu enge. Es ist aber eins nicht zu vergessen, nämlich dass die Gleichung:

$$R_T = R_t + \varphi(T - t)$$

nur eine angenäherte Gültigkeit hat, und es sehr fraglich ist, ob sie in dieser Form namentlich dann noch bestehen darf, wenn die Flüssigkeiten über ihre Siedepunkte erhitzt sind.

III. *Notiz über die Grösse der Maxwell'schen Molecularwirbel und über die Dichtigkeit des Lichtäthers; von L. Graetz.*

Die Maxwell'sche Theorie der Molecularwirbel in Verbindung mit der Beobachtung von Kundt über die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes beim Durchgang durch Eisen, gestattet die Berechnung einer oberen Grenze für die Dichtigkeit des Lichtäthers, die verhältnissmässig nicht weit abweicht von der unteren Grenze, welche sich aus einer Formel von Sir W. Thomson entnehmen lässt. Es ergibt sich aus beiden, gänzlich von einander unabhängigen Betrachtungen, dass die Dichtigkeit des freien Lichtäthers zwischen 10^{-16} und 10^{-18} von der des Wassers ist.

Die Theorie der Molecularwirbel ist bekanntlich von Maxwell zuerst in specieller, dann in allgemeinerer Form ausgeführt worden. Die allgemeine Behandlung[1]) setzt nur voraus, dass in einem magnetischen Feld eine Bewegung stattfindet (was Thomson als nothwendige Folgerung aus den Erfahrungsthatsachen hinstellt), dass diese Bewegung den Helmholtz'schen Wirbelgesetzen folgt, und dass magnetische und optische Verschiebungen eines Theilchens sich zusammensetzen können.

Die specielle Behandlung[2]) macht noch weitere Annahmen

1) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism **2.** § 822—829. 1882.

2) Maxwell, Phil. Mag. (4) **21.** p. 161, 281, 338. 1861; **23.** p. 12, 85. 1862.

über Form und Geschwindigkeit der Wirbel, über die Eigenschaften des Mediums, in welchem sie stattfinden u. s. w. Beide Behandlungen führen zu dem gleichen Ausdruck für die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Sie geben nämlich, wenn man von der Dispersion absieht und die Verdet'sche Constante mit ω bezeichnet, die Gleichung:

$$\omega = m \frac{i^3}{\Lambda^2}.$$

Darin ist i der Brechungsindex der Substanz und Λ die Wellenlänge des Lichtes im freien Aether. Dagegen ist m eine Constante, welche in der allgemeinen Theorie keine einfache physikalische Bedeutung hat, welche aber in der speciellen Theorie sich zusammengesetzt zeigt aus Grössen, die die Eigenschaften des Mediums und der Wirbel bedingen. Dass die Maxwell'sche Formel von den bisher über die magnetische Drehung der Polarisationsebene aufgestellten am besten mit der Erfahrung übereinstimmt, ist bekannt, wenn auch noch nicht unbedeutende Abweichungen übrig bleiben. Uebrigens ist auch die specielle Theorie der Drehung der Polarisationsebene gänzlich unabhängig von der künstlichen Hypothese der frictionsräderartig wirkenden Zwischenpartikelchen, steht und fällt also nicht mit diesen.

Das Medium, in welchem die angenommenen Wirbelbewegungen stattfinden, ist der Lichtäther, dessen Dichtigkeit in einer Substanz ϱ sei. Dies folgt aus der Gleichheit der elastischen Eigenschaften, die sich in der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit mit dem Verhältniss der beiden electrischen Einheiten (der kritischen Geschwindigkeit) zeigt. Nach der Fresnel'schen Anschauung, die Maxwell adoptirt, hängt ϱ mit der Dichtigkeit des freien Lichtäthers s zusammen durch die Gleichung:

$$\varrho = s i^2,$$

wo i der Brechungsindex der Substanz ist.

Von der Dichtigkeit ϱ hängt aber auch die magnetische Inductionsconstante μ der Substanz ab, und zwar ist[1]):

$$\mu = 4\pi C \varrho = 4\pi C s i^2,$$

1) Maxwell, l. c. **21.** p. 166. 1861.

worin C eine Constante ist, welche abhängt von der Vertheilung der Wirbel, ihrer Gestalt und der Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit ihrer Geschwindigkeit. Bei kreisförmigen Wirbeln von gleichförmiger Geschwindigkeit ist:

$$C = \tfrac{1}{4} \text{ also } \mu = \pi \varrho,$$

und dieser Werth von C muss für Luft angenommen werden[1]), weil nur dadurch die Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit mit dem Verhältniss der electrostatischen und electromagnetischen Einheit herauskommt. Da alle diamagnetischen und schwachmagnetischen Körper nahezu dieselbe magnetische Inductionsconstante haben, und auch ihre Brechungsexponenten verhältnissmässig wenig verschieden sind, so hat für sie auch C nahezu denselben Werth. Für Eisen, Nickel, Kobalt weicht aber der Werth von C erheblich von $\tfrac{1}{4}$ ab.

Die directe Formel nun, zu welcher Maxwell[2]) für die Drehung der Polarisationsebene gelangt, lautet in den obigen Bezeichnungen:

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} \frac{r \mu i}{s^{3/2} \Delta^2 V}, \tag{1}$$

worin r der Radius eines Wirbels, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether (oder in Luft) ist.

Durch Einsetzung des Werthes von μ wird:

$$\omega = m \frac{i^3}{\Delta^2},$$

und es hat m die Bedeutung:

$$m = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\pi}} C \frac{r}{s^{1/2}} \frac{1}{V}.$$

Aus der Formel (1) erkennt man zunächst, dass man ohne weiteres die relativen Werthe der Radien der Molecularwirbel in verschiedenen Substanzen berechnen kann, wenn man nur die relativen Werthe von ω, μ und i kennt. Nehmen wir Wasser als Einheit ($\omega_1 = 1$, $r_1 = 1$, $\mu_1 = 1$, $i_1 = 1$), so ist:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\omega}{\omega_1} \frac{\mu_1}{\mu} \frac{i_1}{i},$$

und es ist darin μ_1/μ für alle Substanzen $= 1$, ausser für Eisen, (Nickel und Kobalt).

1) Maxwell, l. c. **23.** p. 22. 1862.
2) Maxwell, l. c. **23.** p. 95. 1862.

Es zeigt sich nun, dass in allen festen und flüssigen Körpern die Grösse der Molecularwirbel nur verhältnissmässig wenig verschieden ist. Es ist z. B.[1]) für

Wasser	$r = 1$	Faraday's Glas . .	$r = 3{,}20$
Schwefelkohlenstoff	$r = 2{,}23$	Creosot	$r = 0{,}77$
Salpetersäure . .	$r = 0{,}60$		

Für die Gase unter Atmosphärendruck ist die relative Grösse der Wirbel eine viel kleinere, nämlich (nach Kundt und Röntgen) z. B. für

Wasserstoff $r = 0{,}00057$, Sauerstoff $r = 0{,}00047$, Kohlenoxyd $r = 0{,}00100$,

Dagegen ist für Eisen, Nickel und Kobalt der Radius der Molecularwirbel ein ausserordentlich viel grösserer. Für Eisen ist nach den Versuchen von Kundt[2]) die Drehung etwa 35000 mal so gross als bei Glas, also etwa 140 000 mal so gross als bei Wasser. Der Werth von μ ist nur angenähert bekannt. Aus Eisenvitriol electrolytisch niedergeschlagenes Eisen hat nach Claus[3]) bei gleichem Gewicht und gleichen magnetisirenden Kräften ein magnetisches Moment, das nur etwa gleich dem dreizehnten Theil von dem ganz weichen Eisens ist. Für ganz weiches Eisen ist $\varkappa = 32$, also für unser Eisen $\varkappa = 2{,}5$ und daher:

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa = 32 .$$

Ich setze also $\mu_1/\mu = {}^1/_{32}$.

Auch der Werth der Brechungsexponenten für eine durchsichtige Eisenschicht ist nicht bekannt. Angenähert wird man ihn ebenso gross setzen dürfen, wie für Stahl, den Voigt[4]) aus Jamin's Versuchen zu $i = 2$ berechnet.

Daraus ergibt sich der Radius der Molecularwirbel im Eisen:

$$r = 3000$$

den im Wasser gleich 1 gesetzt.

Für Kobalt fand Kundt etwa den gleichen Werth für ω, für Nickel nur etwa 56000 (Wasser = 1). μ kann man,

---

1) Die Werthe von ω sind aus der Zusammenstellung in Wiedemann's Electricität **3.** p. 922—933 entnommen.

2) Kundt, Wied. Ann. **23.** p. 237. 1884.

3) Claus, s. Wiedemann, Galvanismus **3.** p. 566. 1883.

4) Voigt, Wied. Ann. **23.** p. 128 u. 143. 1884.

aus Mangel an bekannten Werthen, für beide etwa ebenso gross setzen. i ist nach Voigt für Kobalt = 1,73, für Nickel = 1,6. Daraus ergibt sich für Kobalt $r = 3400$, für Nickel $r = 1510$.

Die hervorragenden magnetischen Eigenschaften des Eisens, Nickels und Kobalts sind also, unter consequenter Anwendung der Maxwell'schen Theorie, verbunden mit einer relativ sehr bedeutenden Grösse der Molecularwirbel. Im allgemeinen befindet sich in einem magnetischen Feld der Aether sowohl innerhalb der einzelnen Molecüle als in den Zwischenräumen in wirbelnder Bewegung. Die Grösse der einzelnen Wirbel ist im allgemeinen sehr klein gegen die Grösse eines Molecüls, wie Maxwell[1]) annimmt. Beim Eisen nun (und Kobalt und Nickel), dessen Wirbel eine verhältnissmässig so bedeutende Grösse haben, liegt es nahe, anzunehmen, dass der Aether der Eisenmolecüle als Ganzes wirbelt. Schon Maxwell[2]) machte eine ähnliche Annahme. Er kannte aber noch nicht das höchst merkwürdige und unerwartete Resultat von Kundt, dass das Eisen selbst positive Drehung zeigt, und glaubte daher, dass die Eisenmolecüle in entgegengesetzter Richtung wirbeln, wie der Aether. Jedenfalls erhält man durch die Annahme, dass im Eisen die Molecüle (resp. ihr Aether) als Ganzes wirbeln, eine obere Grenze für den Radius der Molecularwirbel.

Die Grösse eines Eisenmolecüls ist nicht direct bekannt. Aus dem Loschmidt'schen Condensationscoëfficienten in Verbindung mit dem Avogadro'schen Gesetz ergibt sich, dass sein Radius $< 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm ist, also nicht sehr abweicht von den Radien der anderen Molecüle. Für das einzige metallische Molecül, das Quecksilber, dessen Radius aus der molecularen Weglänge berechnet ist, fand Koch[3]) den Radius $< 0{,}95 \cdot 10^{-8}$ cm. Nehmen wir diesen Werth als auch angenähert für das Eisen gültig an, so wäre der Radius eines Molecularwirbels im Eisen $r \leqq 0{,}95 \cdot 10^{-8}$ cm und daher der Radius eines Molecularwirbels im Wasser:

$$r \leqq 3{,}1 \cdot 10^{-12} \text{ cm}.$$

1) Maxwell, l. c. **21.** p. 345. 1861.
2) Maxwell, l. c. **23.** p. 90. 1862.
3) Koch, Wied. Ann. **19.** p. 587. 1883.

Da nun für Wasser $C = 1/4i^2$ ist, so ist:

$$\omega = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\pi}} \frac{r}{s^{1/2}} \frac{i}{\Lambda^2 V},$$

und darin sind jetzt alle Grössen in absolutem Maasse bekannt, ausser s, der Dichtigkeit des Aethers im freien Raum. Es ist nämlich (für die D-Linie):

$$\omega = 0{,}3767 \,.\, 10^{-5}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{-1/2}\,\mathrm{sec}^{1)}, \quad \Lambda = 5{,}891 \,.\, 10^{-5}\,\mathrm{cm},$$
$$V = 3 \,.\, 10^{10}\,\mathrm{cm\,sec}^{-1}, \qquad i = 1{,}334\,.$$

Daraus ergibt sich die Dichtigkeit des Aethers (bezogen auf Wasser): $s < 9 \,.\, 10^{-16}$.

Es ist von Interesse, diesen oberen Werth für die Dichtigkeit des Aethers zu vergleichen mit dem unteren Grenzwerth, der sich aus einer Formel von Thomson[2]) berechnen lässt. Thomson zeigte aus Beobachtungen von Pouillet, dass die Dichtigkeit des Aethers bezogen auf Wasser grösser ist, als:

$$\frac{4}{n^2}\,10^{-26}.$$

Darin ist n das Verhältniss der grössten Geschwindigkeit eines Aethertheilchens zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Dieses Verhältniss schätzte Thomson höchstens auf $^1/_{50}$. Glan[3]) suchte n dadurch zu bestimmen, dass er annahm, der Aether zerreisse bei den Lichtschwingungen nicht, und es sei seine grösstmöglichste Dilatation höchstens so gross wie für Glas oder Wasser oder andere Flüssigkeiten, δ. Er setzte also:

$$\sqrt{1 + n^2} - 1 = \delta.$$

Für Glas berechnete er $\delta = {}^1/_{1443}$, für Wasser $\delta = {}^1/_{37.10^6}$. Doch zeigte E. Wiedemann[4]) dass auch für Wasser δ nur ungefähr $^1/_{1000}$ sei, und es würde sich daraus im Vergleich mit den verschiedenartigen Körper $n = {}^1/_{27}$ bis $^1/_{23}$ ergeben.

Indess ist diese Betrachtung von Glan nicht consequent. Denn das n in seiner Formel enthält die Amplitude von Sonnenlicht in der Nähe der Erdoberfläche, eine für

1) Arons, Wied. Ann. **24.** p. 180. 1885.
2) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. Edinb. **21.** p. 57. 1854.
3) Glan, Wied. Ann. **7.** p. 658. 1879.
4) E. Wiedemann, Wied. Ann. **17.** p. 986. 1882.

diese Betrachtung ganz willkürliche Grösse. Dieselbe Forderung, dass der Aether nicht zerreisst, muss aber auch für Sonnenstrahlen in ihrer grössten Intensität gelten, also in der Nähe der Sonnenoberfläche, wo die Intensität 46400 mal so gross ist, als an der Erde. Danach wäre also:

$$\sqrt{1 + 46400\,n^2} - 1 = \tfrac{1}{1000}$$

und daher $n^2 = 4{,}2 \,.\, 10^{-8}$. Also ergibt sich die untere Grenze für die Dichtigkeit des Aethers:

$$s > 1 \,.\, 10^{-18}.$$

Durch diese beiden ganz verschiedenen Betrachtungen ist die Dichtigkeit des Aethers in nicht zu weite Grenzen eingeschlossen. Es ist:

$$s < 90 \,.\, 10^{-17} \text{ aber } > 0{,}1 \,.\, 10^{-17}.$$

Man würde danach sagen können, dass die Dichtigkeit des freien Aethers höchstens hundertmal grösser oder kleiner ist, als der 10^{17}. Theil von der des Wassers, ein Werth, der wohl viel grösser ist, als man ihn unwillkürlich schätzt. Während die Luft der Atmosphäre über einem Quadratmeter mehr als 10000 kg wiegt, würde der in ihr enthaltene Aether, die Höhe der Atmosphäre zu 30 Meilen gerechnet, nur 0,0022 mg wiegen.

Nimmt man den Werth $s = 10^{-17}$ einmal als angenähert gültig an, so gestattet die Thomson'sche Formel noch einige interessante Folgerungen. Aus diesem Werth von s berechnet sich zunächst:

$$n \geqq 0{,}000\,067.$$

Bezeichnen wir also die grösste Geschwindigkeit eines schwingenden Aethertheilchens mit v, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes mit V, so ist:

$$v \geqq 0{,}000\,067\ V.$$

Die Verrückungen der Aethertheilchen in einem geradlinig polarisirten Lichtstrahl lassen sich ausdrücken durch:

$$u = A \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta\right) 2\pi,$$

mithin die Geschwindigkeit durch:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2\pi A}{T} \cos\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta\right) 2\pi.$$

Die grösste Geschwindigkeit eines Aethertheilchens (absolut genommen) ist also:

$$v = \frac{2\pi A}{T},$$

wo A die Amplitude der Lichtbewegung ist. Daher haben wir:

$$A = \frac{n T V}{2\pi} \geqq \frac{0{,}000\,067\,\lambda}{2\pi},$$

also $A \geqq 6 \,.\, 10^{-10}$ cm.

Danach ist die Amplitude von kräftigem Sonnenlicht an der Erdoberfläche grösser oder gleich $6 \,.\, 10^{-10}$ cm.

Da in festen und flüssigen Körpern der Abstand der Molecüle (und ihre Grösse) kleiner ist, als 10^{-8} cm, so sieht man, dass die Amplituden der Lichtschwingungen höchstens etwa hundertmal geringer sind, als diese Abstände. Mithin müssten Lichtstrahlen von höchstens der 2500fachen Intensität des Sonnenlichtes (an der Erdoberfläche) in festen und flüssigen Körpern schon wesentlich anderen Absorptionsverhältnissen unterliegen. Für sie wäre die Durchsichtigkeit vermuthlich eine relativ viel geringere. Andererseits ist auch daraus ersichtlich, dass bei den verhältnissmässig schwachen Intensitäten, mit denen wir es zu thun haben, die Absorptionsfähigkeit der Medien unabhängig von der Intensität des Lichtes ist.

Zum Schluss sei noch an die Bemerkung von W. Thomson erinnert, dass die Dichtigkeit der Luft, wenn sie immer dem Mariotte'schen Gesetz folgte und bei constanter Temperatur bliebe, schon in einer Höhe gleich dem Erdradius nur ungefähr 10^{-350} von der des Wassers wäre. Der Aether ist also ganz ausserordentlich viel dichter, als soweit verdünnte Luft. Unter dieser Voraussetzung würde schon in einer Höhe von 33 Meilen die Luft dieselbe Dichtigkeit haben, wie der freie Aether.

München, Ende Februar 1885.

IV. *Ueber spontane, durch innere Kräfte hervorgerufene Formänderungen krystallisirter fester Körper; von O. Lehmann.*

(Hierzu Taf. II Fig. 3 a—z.)

Zu vorliegender Mittheilung veranlassen mich einige Beobachtungen über freiwillige Structuränderungen fester Körper, welche von einer Aenderung der äusseren Form begleitet sind. Die Versuche sind ausgeführt mittelst des vereinfachten Krystallisationsmikroskops, welches ich in der Zeitschrift für Instrumentenkunde[1]) vor kurzem beschrieben habe.

I. Chinonhydrodicarbonsäureester.[2])

Aus heisser Lösung in Anilin, die zweckmässig durch Zusatz von etwas Colophonium verdickt wird, krystallisiren zunächst weisse (d. h. farblose) Blättchen, deren Begrenzung die Form eines Parallelogrammes von 44° Winkel hat (Fig. 3_a). Zuweilen tritt von den kürzeren Seiten noch eine weitere Krystallfläche unter dem stumpferen Winkel von 72° hinzu, oder es erscheint auch letztere allein.

Sobald nun die Temperatur bis zu einem gewissen Punkte, dessen nähere Bestimmung mir noch nicht gelungen ist, sich erniedrigt hat, beginnen die Krystalle ihre Form zu ändern, derart, dass die längere Diagonale erheblich kürzer, die kürzere länger wird, und die Winkel der Umgrenzung statt 44 und 72° nunmehr 60 und 82° betragen. Gleichzeitig ändert sich die Färbung, welche in ein blasses, aber sehr deutlich wahrnehmbares Grün übergeht.

Während der Verschiebung bleibt eine Richtung, welche sehr nahe mit der kurzen Seite des Parallelogrammes (von

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 4. p. 369—376. 1884.

2) Dargestellt von Dr. Herrmann in Würzburg, dem ich das Präparat verdanke.

44°) zusammenfällt, ungeändert. Dieselbe ist auch nahezu identisch mit einer der Hauptschwingungsrichtungen und Krystalle, welche zwischen gekreuzten Nicols in Dunkelstellung gebracht waren, erscheinen nach der Umwandlung wieder dunkel. Die Hauptschwingungsrichtungen werden somit durch die Umwandlung nicht geändert.

Die längeren Kanten der Krystalle drehen sich gegen die frühere Richtung um 15°, wie dies aus Fig. 3_b zu ersehen ist, welche einen zur Hälfte umgewandelten Krystall darstellt. Die umgeformte, grün gewordene Hälfte ist schraffirt und deren frühere Gestalt punktirt angedeutet.

Selten gelingt es, einen so einfachen Fall zu beobachten. Gewöhnlich beginnt die Umwandlung in der Mitte (Fig. 3_c) und oft an verschiedenen Stellen zugleich (Fig. 3_d), sodass man nebeneinander eine Reihe grüner Lamellen in den weissen Blättchen entstehen sieht. Die Enden der Krystalle verschieben sich dabei mit hinreichender Kraft um kleine Hindernisse oder auch den Krystall selbst in Bewegung setzen zu können. Fig. 3_e stellt einen völlig umgewandelten Krystall dar, dessen frühere Conturen punktirt angedeutet sind. Erwärmt man, so vollzieht sich die Verschiebung mit gleicher Präcision in entgegengesetztem Sinne, und zwar bei derselben Temperatur, bei welcher sie früher eingetreten war. Durch wiederholtes Erwärmen und Abkühlen über resp. unter die Umwandlungstemperatur kann man denselben Krystall beliebig oft diese Verschiebungen ausführen lassen. Man erhält dabei den Eindruck, als hätte man eine Art Nürnberger Scheere vor sich, die abwechselnd aufgezogen und wieder zusammengeschoben wird.

Wird die Lösung durch Zusatz von Colophonium stark verdickt, so tritt leicht Unterkühlung ein. Die Krystallbildung erfolgt erst bei niedriger Temperatur, und die Umwandlung findet dann nicht mehr oder sehr langsam statt. Haben sich also bereits mehrere grüne Lamellen in einer weissen Tafel gebildet, so werden dieselben mit fortschreitender Abkühlung an der weiteren Ausdehnung völlig gehindert.

Man sieht in solchem Falle bei länger fortgesetzter

Beobachtung die grünen Lamellen die weissen unter Vermittelung des Lösungsmittels allmählich aufzehren, wie Fig. 3_f zeigt, wobei die früheren Conturen des Krystalles punktirt angegeben sind. Erwärmt man bis in die Nähe der Verwandlungstemperatur, so erfolgt die Verwandlung wieder durch die feste Masse hindurch.

II. Protocatechusäure.[1])

Aus der heissen wässerigen (zweckmässig stark mit Phenol versetzten) Lösung scheiden sich beim Erkalten im einfachsten Falle prismatische (asymmetrische) Krystalle mit fast gerader Endfläche aus (Fig. 3_g). Während der Abkühlung sieht man plötzlich an den Enden oder auch an beliebigen Stellen in der Mitte Verschiebungen auftreten, derart, dass die kleine Endfläche und die Auslöschungsrichtungen für polarisirtes Licht ungeändert bleiben, der Körper aber eine solche Lage einnimmt, dass die Schiefe der Endfläche nunmehr 55° beträgt (Fig. 3_h). Die Verschiebung setzt sich rasch immer weiter fort, bis sich schliesslich das fast gerade (punktirt angedeutete) Prisma in ein sehr schiefes verwandelt hat (Fig. 3_i). Selten gelingt der Versuch in dieser einfachen Weise. Gewöhnlich ändert sich nach einiger Zeit die Richtung der Verschiebung in die entgegengesetzte (Fig. 3_k), ja es kann selbst eine häufige Wiederholung dieses Wechsels eintreten, bis zu solchem Grade, dass sich das Endprodukt von dem früheren scheinbar kaum anders, als durch eine feine Streifung der Oberfläche unterscheidet. Zuweilen spaltet sich der Krystall, und die eine Hälfte verschiebt sich nach rechts, die andere nach links (Fig. 3_l). Die Verschiebung erfolgt so rasch und leicht, dass man glauben könnte, eine flüssige Masse vor sich zu haben, durch welche sich momentan eine Erschütterung fortpflanzt. Die Kraft genügt, um die Krystalle in Bewegung zu setzen und kleine Hindernisse zu beseitigen. Ein bei reinen wässerigen Lösungen sehr oft zu beobachtender Fall ist ferner der, dass zunächst die schief-

1) Das Präparat wurde bezogen aus der chemischen Fabrik von Kahlbaum in Berlin.

prismatische Form auftritt, alsdann an einer Ecke ein geradprismatischer Auswuchs sich daran bildet (Fig. 3_m) und dieser nach einiger Zeit plötzlich umklappt, als wären die Molecüle um Charniere mit Anschlag drehbar. Das Gebilde erscheint dann so, wie es Fig. 3_n zeigt, stellt also dann einen einheitlichen Krystall dar.

III. Chlorammonium.

Aus heiss gesättigten, mit etwas Cadmiumchlorid verunreinigten Salmiaklösungen scheiden sich reguläre (aber schwach doppeltbrechende) Würfel aus, deren Seitenflächen stark gewölbt sind (Fig. 3_o). Man bemerkt ferner auf den Seitenflächen intensiv ausgeprägte diagonale Linien, welche die Grenzen von Ebenen bilden, die den Krystall in zwölf gleiche Sectoren eintheilen und andeuten, dass die Structur dieser Sectoren nicht ganz die gleiche ist. Nach Analogie anderer Fälle[1]) ist zu vermuthen, dass diese Störung der Structur darin begründet ist, dass sich in feinster Vertheilung eine kleine Quantität des monosymmetrischen, doppeltbrechenden Doppelsalzes Cadmiumchlorid-Chlorammonium eingelagert hat, und zwar in den verschiedenen Sectoren in verschiedener Weise.

Ueberlässt man nun einen solchen Krystall sich selbst, so erfolgt nach einiger Zeit plötzlich ein heftiges Zucken, ja häufig zerspringt derselbe in mehrere Theile, welche trotz des immerhin beträchtlichen Widerstandes der Flüssigkeit auf relativ weite Strecken fortgeschleudert werden.

In günstigen Fällen bleibt die äussere Form ziemlich gut erhalten, allein die Seiten sind nicht mehr ausgebogen wie zuvor, sondern eben oder geradezu eingebogen (Fig. 3_p). Meist erscheint nach der Umwandlung allerdings die Oberfläche nicht mehr glatt, sondern rauh und höckerig, und auch das Innere hat infolge von zahlreichen kleinen Sprüngen an Durchsichtigkeit beträchtlich eingebüsst und ist mehr oder minder trübe geworden. Ist selbst nach längerem Warten die Erscheinung nicht eingetreten, so lässt sie sich

1) Cf. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 8. p. 437 ff. 1883.

mit Sicherheit dadurch hervorrufen, dass man wieder etwas erwärmt.

Nach dem, was bereits hinsichtlich des Verhaltens von Salmiak bekannt ist[1]), darf wohl als sicher angenommen werden, dass hier nicht einfache Ausgleichung innerer Spannungen vorliegt, sondern allotrope Umwandlung, obschon sich nicht alle Kennzeichen einer solchen wirklich nachweisen lassen.

Theorien der allotropen Umwandlung.

Wie bereits eingangs erwähnt, sind die beschriebenen Fälle allotroper Umwandlung von anderen ähnlichen dadurch verschieden, dass die Aenderung der Structur nicht, wie gewöhnlich, unter Beibehaltung der früheren äusseren Form stattfindet, sondern mit einer deutlichen und im letzten Falle sogar sehr heftigen Verschiebung der Theilchen verbunden ist, welche die Gestalt des Krystalles ganz erheblich beeinflusst. Je nach der Theorie, welche wir zur Erklärung der Umwandlungserscheinung selbst zu Grunde legen, erhält diese Thatsache verschiedene Bedeutung, sodass es zweckmässig erscheint, die zur Zeit herrschenden Theorien hier kurz zusammenzustellen.[2])

A. Theorie der Allotropie.[3])

Diese Theorie fasst die beiden Zustände als chemisch isomere Körper auf, die sie nur deshalb mit besonderen Namen bezeichnet, weil die Umwandlung sehr leicht zu bewerkstelligen ist, während bei den eigentlich chemisch isomeren dieselbe überhaupt nicht oder nur mit grossen Schwierigkeiten oder auf indirectem Wege vorgenommen werden kann (ursprünglich wurde die Bezeichnung für chemische Isomerie bei Elementen gebraucht). Je nachdem man sich

1) Cf. O. Lehmann, Wied. Ann. **24.** p. 4. 1885.

2) Die Theorie Naquet's (De l'allotropie et de l'isomérie, Paris 1860), welche die Atome selbst wieder aus kleinen Theilen zusammengesetzt denkt, habe ich als von den heutigen Anschauungen zu sehr abweichend nicht berücksichtigt.

3) Die Benennung von Berzelius 1841, Rapp. ann. s. l. progr. d. l. chim. p. 7.

die Molecüle aus einer verschiedenen Anzahl von Atomen bestehend denkt, wie Fig. 3_q andeutet, oder aus gleicher Zahl aber in verschiedener Anordnung (Fig. 3_r), hätte man chemische Polymerie oder Metamerie.

B. Theorie des Polymorphismus.

Die äussere Form eines Krystalles ist wesentlich bedingt durch die innere Structur desselben. Insofern nun zwei Modificationen eines Körpers in verschiedenen Systemen krystallisiren, wäre nach dieser Theorie der Unterschied nicht wie bei der vorigen in einer Verschiedenheit der Molecüle, sondern in verschiedener Zusammenlagerung derselben zum Krystall zu suchen. Es könnte z. B. wie Fig. 3_s andeutet, in einem Falle die Anordnung in Form eines cubischen Raumgitters stattfinden, im anderen in Form eines hexagonalen. Soweit ich es zu beurtheilen vermag, ist diese Theorie — deren Urheber mir unbekannt ist — die heute verbreitetste, ja nicht selten wird geradezu als Axiom angenommen, dass allotrope Modificationen nur krystallographisch, nicht chemisch verschiedene Zustände sind.

C. Theorie der Zwillingsstructur.[1])

Manche in der Natur vorkommenden Krystalle erweisen sich als zusammengesetzt aus vielen kleinen Individuen, die gegenseitig in Zwillingsstellung stehen. Denkt man sich nun die einzelnen Individuen möglichst klein, d. h. als einzelne Molecüle, so gelangt man wieder zu regelmässigen Molecülsystemen, bei welchen weder die chemische Natur der Molecüle geändert ist, noch die Form des Raumgitters, zu welchem sie (d. h. ihre Schwerpunkte) sich zusammenlagern, sondern lediglich deren Orientirung gegen die früheren Axen des Krystalles, etwa so, wie es Fig. 3_t andeutet, die Molecüle als kleine Kegel gedacht. Insofern dabei alle Stellungen sich regelmässig wiederholen, betrachtet Mallard jede Periode als neues Molecül und dehnt seine Theorie in dieser Art auch auf die chemische Polymerisation aus.

---

1) Mallard, Ann. d. Min. (7) **10.** p. 60. 1876 u. Bull. d. l. soc. min. d. Fr. **7.** p. 357. 1884.

D. Theorie der physikalischen Isomerie.[1])

Dieselbe wurde bedingt durch die moderne chemische Structurtheorie, welche sich gezwungen sieht, falls das Gesetz der festen Werthigkeiten aufrecht erhalten bleiben soll, neben Atomverbindungen noch Molecülverbindungen zu unterscheiden, welche mit den vorigen das gemein haben, dass sie Verbindungen nach festen Verhältnissen, somit eigentliche chemische Verbindungen sind. (A. Naumann's Theorie weicht hiervon ab, insofern er dieselben auf gleiche Stufe stellt mit den Verbindungen nach veränderlichen Verhältnissen, welche gewöhnlich als physikalische bezeichnet werden.)[2])

Ebenso wie nun verschiedene Atomverbindungen zwischen gleichartigen Atomen möglich sind (chemisch isomere), müssen auch verschiedenartige Molecülverbindungen zwischen gleichartigen Molecülen möglich sein, d. h. physikalisch isomere (so genannt, weil die Aenderung in dem sogenannten physikalischen Molecül stattfindet, demjenigen kleinsten Theilchen, welches durch mechanische Theilung entstanden gedacht werden kann). Analog der chemischen Polymerie und Metamerie wären auch physikalische Polymerie (Fig. 3_u) und Metamerie (Fig. 3_v) zu unterscheiden.

Ich verzichte auf eine Discussion dieser verschiedenen Theorien und bemerke nur, dass mir aus einer Reihe von Gründen, zu welchen namentlich die Consequenzen derselben zählen, die letztere Theorie als die wahrscheinlichste erscheint.

Folgerungen aus der Theorie der physikalischen Isomerie.

Die eben erwähnten Consequenzen beziehen sich auf verschiedene Erscheinungen, die gewöhnlich als physikalische Vorgänge aufgefasst werden, nach dieser Theorie aber dem Gebiete der Chemie zuzuweisen sind, falls man überhaupt

1) Zincke, Lieb. Ann. **182.** p. 244. 1876 u. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. **1.** p. 97. 1877.

2) Cf. O. Lehmann, Ber. d. d. chem. Ges. **17.** p. 1733. 1884.

Bildung von Verbindungen nach festen Verhältnissen als chemische bezeichnet. Es sind:

I. Die drei Aggregatzustände eines Körpers.

Eis, Wasser, Dampf z. B. sind drei chemisch (aber nur hinsichtlich der Constitution der „physikalischen", nicht der „chemischen" Molecüle) verschiedene Körper. Dass es gerade drei sind, ist nicht allgemeine Regel. Salpetersaures Ammoniak hat z. B. vier feste und eine flüssige Modification, Schwefel drei feste, zwei (oder drei) flüssige und ein (oder zwei) gasförmige u. s. w.

Die gewöhnliche Definition der Begriffe gasförmig, flüssig und fest wird dadurch nicht geändert, nämlich:

a) gasförmige Körper sind solche, bei welchen die Expansivkraft (abstossende Kraft der Wärme, Wirkung der molecularen Stösse) die Molecularattraction überwiegt, welche also keinen negativen Druck (Zug) aushalten können. Stark verdichtete Kohlensäure z. B. ist hiernach über der kritischen Temperatur (Andrews) gasförmig, unter derselben flüssig.

b) flüssige Körper sind solche, bei welchen die Molecularattraction der Expansivkraft das Gleichgewicht halten kann und auch ohne Einwirkung äusserer Kräfte eine Verschiebung der Theile (Diffusion) möglich ist. Der negative Druck, welchen sie ertragen können, bildet ein Maass für ihre Cohäsion. Der Aggregatzustand einer Lösung von Harz in Terpentinöl z. B. ist hiernach je nach dem Mischungsverhältnisse so lange noch als flüssig zu bezeichnen, als sich noch eine Spur von Diffusion beobachten lässt, vorausgesetzt, dass das Harz wirklich unbeschränkt löslich ist und sich nicht etwa schliesslich gallertartig ausscheidet.

c) feste Körper sind solche, bei welchen die Molecularattraction der Expansivkraft das Gleichgewicht hält, aber ohne Einwirkung äusserer Kräfte Verschiebung der Theilchen (Diffusion) nicht möglich ist.[1]) Drehung der Theilchen muss zur Erklärung der Erscheinungen der elastischen Nach-

---

1) Maxwell's Definition (Theorie d. Wärme, übers. v. Auerbach p. 288) weicht hiervon durchaus ab.

wirkung und der Magnetisirung noch als möglich betrachtet werden. Gallerten sind physikalisch inhomogen.

Nach der Theorie der physikalischen Isomerie kann also chemisch ein- und derselbe Körper stets nur in einem Aggregatzustande auftreten. Continuirliche Uebergänge eines Körpers aus einem Aggregatzustand in einen anderen (van der Waals) sind unmöglich. Wo solche scheinbar doch auftreten, wird angenommen, dass eine Mischung zweier Modificationen vorliege, deren chemisches Gleichgewicht von Temperatur und Druck abhängig ist.

II. Anomalien des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes.[1])

Die Theorie der physikalischen Isomerie rechnet dieselben zu den Dissociationserscheinungen. Sie nimmt an, dass sich in der Nähe des Condensationspunktes bereits die flüssige Modification bildet, sich aber nicht ausscheidet, sondern im Gase gelöst bleibt. Je tiefer die Temperatur sinkt, oder je höher der Druck steigt, umsomehr wächst der Procentgehalt dieser Lösung an flüssiger Substanz, bis schliesslich beim Condensationspunkt eine weitere Steigerung unmöglich wird, insofern sich jeder Ueberschuss alsbald ausscheidet. Eine wesentliche Stütze erhält diese Ansicht durch die Beobachtung, dass sich Flüssigkeiten in fremden Gasen lösen können.[2])

1) Vgl. die Untersuchungen von Regnault, Cahours, Bineau Horstmann, A. Naumann, Schoop, Natterer, Amagat, Cailletet u. a. und die Theorien von: Horstmann, Lieb. Ann. Supplbd. **6.** p. 51. 1868; Recknagel, Pogg. Ann. Ergbd. **5.** p. 563. 1871; van der Waals, 1873. Ueber die Continuität etc., welche die Erscheinung auf Grund der Hypothese der Continuität erklären, und diejenigen von Playfair u. Wanklyn, Lieb. Ann. **122.** p. 247. 1862; A. Naumann, Lieb. Ann. **155.** p. 325. 1870; O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. **1.** p. 97. 1877; Ramsay, Proc. of the London Roy. Soc. **30.** p. 323. 1880, welche entweder chemische oder physikalische Isomerie annehmen, wobei Naumann's Theorie, insbesondere in ihrer neuen Form (Thermochemie, 1882) eine vermittelnde Stellung einnimmt, insofern sie die Molecularverbindungen nach festen Verhältnissen auf gleiche Stufe stellt mit den Mischungen nach veränderlichen Verhältnissen.

2) Cf. Andrews, Proc. Lond. Roy. Soc. **24.** p. 455. 1876; Cailletet, Compt. rend. **90.** p. 210. 1880; Dewar, Proc. Lond. Roy. Soc. **30.** p. 538.

III. Anomalien der Ausdehnung und Compressibilität der Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen und Drucken.[1]

Die Erklärung ist ganz analog der vorigen. Mit steigender Temperatur tritt Dissociation der Flüssigkeit ein, der entstehende Dampf gelangt indess nur theilweise zur Ausscheidung und bleibt grösstentheils in der Flüssigkeit gelöst. Es bilden sich somit ähnlich wie beim Vermischen mancher Flüssigkeiten zwei Gleichgewichtszustände aus, eine Lösung von wenig Dampf in viel Flüssigkeit und eine solche von wenig Flüssigkeit in viel Dampf. Die kritische Temperatur ist diejenige, für welche die Zusammensetzung beider Lösungen identisch wird. Eine Stütze findet die Anschauung darin, dass das specifische Volumen von Flüssigkeiten auch mit dem Gehalt an absorbirten fremden Gasen zunimmt.[2]

IV. Anomalien der Capillarität.

Die Oberflächenspannung wird durch Erhöhung der Temperatur vermindert und erreicht bei der kritischen Temperatur den Werth 0.[3]

Es erklärt sich dies durch die steigende Beimischung von Dampf, wie dann auch die gleiche Erscheinung beobachtet wird bei Zumischung eines fremden Gases.[4]

V. Dichtemaximum des Wassers.

Es wird angenommen, dass sich im Wasser bereits vor dem Gefrieren Eis bildet, welches aber zunächst nicht zur Ausscheidung gelangt, sondern erst bei 0°. Da das Eis geringere Dichte besitzt, als das Wasser, muss diese Beimischung die Concentration der Lösung beim Abkühlen vermindern, bis sie schliesslich gleich Null wird und in Ausdehnung übergeht. Diejenigen Umstände, welche den Gehalt an Eis vermindern können, d. h. Druck und Beimischung

1880; Kundt, Wied. Ann. **12.** p. 538. 1881; Strauss, Beibl. **4.** p. 282. 1880; Ansdell, Beibl. **7.** p. 257. 1882.

1) Cf. Cagniard de la Tour, Ann. de chim. et de phys. **21.** p. 127. 1822; Amagat, Compt. rend. **85.** p. 27 u. 139. 1876; Avenarius, Beibl. **2.** p. 211. 1877.

2) Cf. Nichols und Wheeler, Phil. Mag. (5) **11.** p. 113. 1881.

3) Cf. Hannay, Proc. Lond. Roy. Soc. **33.** p. 294. 1882.

4) Cf. Kundt, Wied. Ann. **12.** p. 538. 1881.

einer indifferenten Substanz, welche die Lösung verdünnt, müssen das Dichtemaximum erniedrigen, wie dies thatsächlich beobachtet wurde.[1])

VI. Specifische Wärme des Wassers.

Wenn beim Erwärmen von Wasser in der Nähe des Gefrierpunktes Dissociation des noch darin enthaltenen Eises stattfindet und in der Nähe des Siedepunktes Dissociation des Wassers in Dampf, d. h. Bildung einer geringen Menge Dampf, die nicht zur Ausscheidung gelangt, so muss die specifische Wärme des Wassers sowohl in der Nähe des Gefrierpunktes, wie in der Nähe des Siedepunktes zunehmen. Die Messungen von Velten[2]) bestätigen dies.

VII. Schmelzpunkt von Gemengen.

Insofern sich Schmelzflüsse in der Nähe des Erstarrungspunktes als Lösungen der festen Modification (oder auch mehrerer festen Modificationen) in der flüssigen auffassen lassen, müssen sich diese Lösungen, falls sie mischbar sind, gegenseitig verdünnen, der Krystallisations-, d. h. Erstarrungspunkt muss somit erniedrigt werden.[3])

VIII. Zunahme der Löslichkeit mit der Temperatur.

Körper, welche niedrigen Schmelzpunkt besitzen, werden bei höheren Temperaturen zum Theil in der festen, zum Theil in der flüssigen Modification sich in Lösung befinden, bis schliesslich (bei Temperaturen über dem Schmelzpunkt) die Lösung nur ein Gemisch der beiden Flüssigkeiten darstellt. Die Löslichkeit muss in solchen Fällen rasch anwachsen, wie dies auch die Erfahrung bestätigt.[4])

IX. Existenz mehrerer Schmelz- und Sättigungspunkte.

Körper, welche in mehreren festen Modificationen auftreten, besitzen entsprechend mehrere Schmelz- und Sättigungspunkte (festere natürlich nur dann, wenn es möglich ist, die Modification unverändert bis zum Schmelzen zu er-

1) Cf. Marshall, Smith u. Osmond, Proc. Edinb. Roy. Soc. **11.** p. 626 u. 809. 1882; Nichols u. Wheeler, Phil. Mag. (5) **11.** p. 113. 1881.
2) Velten, Wied. Ann. **21.** p. 31. 1884.
3) Cf. O. Lehmann, Wied. Ann. **24.** p. 1. 1884.
4) Cf. Tilden u. Shenstone, Proc. Lond. Roy. Soc. **35.** p. 345. 1883.

hitzen). Bei welchem dieser Punkte die Erstarrung erfolgt, ist insbesondere davon abhängig, wie stark der Schmelzfluss erhitzt war, und wie rasch die Abkühlung erfolgte. Durch die Annahme der Lösung der festen Modification in der flüssigen schliesst sich diese Erscheinung ganz den analogen Erscheinungen bei chemischer Dissociation an.

X. Analogien zwischen krystallwasserhaltigen Salzen und allotropen Modificationen.

Das Zerfallen bei der beim Erwärmen in gesättigter Lösung und die Rückbildung beim Erkalten, sowie auch das „Aufzehren" unter Vermittelung des Lösungsmittels sind so ähnliche Erscheinungen, dass bei Substanzen, welche wasserhaltig krystallisiren, die Entscheidung, ob Aufnahme (Abgabe) von Krystallwasser oder Umwandlung in eine allotrope Modification vorliegt, mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden ist.[1])

XI. Lösung fester Körper in Gasen und Sublimation.

Analog wie oben die Condensation eines Gases zu Flüssigkeitströpfchen ist die Sublimation zu erklären. Dass wirklich feste Körper in Gasen sich lösen können, ist dargethan durch die Versuche von Hannay und Hogarth[2])

XII. Wärmetönung beim Schmelzen und Sieden.

Die Schmelz- und Verdampfungswärmen sind hinsichtlich der Grössenordnung den Wärmetönungen bei Bildung von krystallwasserhaltigen Salzen und Doppelsalzen sehr ähnlich, wie dies nach der Theorie zu erwarten steht.

XIII. Lösung und Quellung.

Es ist zu unterscheiden zwischen wahrer und scheinbarer Löslichkeit. Erstere ist die Quantität des festen Körpers (in Proc.), welche wirklich in der Flüssigkeit (Gase) enthalten ist, letztere die Quantität, die sich darin aufgelöst hat. Nur letztere lässt sich experimentell bestimmen und hat praktischen Werth, erstere dagegen dient allein der theoretischen Betrachtung

1) Cf. auch van t'Hoff, Études de Dynamique chimique 1884.

2) Hannay u. Hogarth, Proc. Lond. Roy. Soc. **29.** p. 324. 1879. **30.** p. 178 u. 484. 1880.

und darf nicht mit den beiden anderen verwechselt werden. Dass eine Differenz zwischen beiden besteht, beruht auf der Möglichkeit, dass der aufgelöste Körper zum Theil (molecular) unverändert in Lösung übergeht, zum Theil zerfällt in Molecüle einer anderen festen oder flüssigen (gasförmigen) Modification, oder auch mit den Molecülen der Flüssigkeit neue Complexe bildet. Durch letzteren Umstand wären die Anomalien der Löslichkeit, Ausdehnung und specifische Wärme mancher Lösungen zu erklären. Bei der Umwandlungstemperatur zweier physikalisch isomerer Modificationen (oder anderer Molecularverbindungen) ist die scheinbare Löslichkeit für beide gleich, über oder unter derselben verschieden. Für Temperaturen über oder unter derselben existiren somit zwei verschiedene Sättigungsgrade, je nachdem man die Lösung der einen oder anderen Modification betrachtet. Bei Lösungen in Gasen macht sich die nämliche Erscheinung durch Verschiedenheit der Dampfspannungen bemerkbar. Für bestimmten Gehalt der Lösung existiren aus gleichem Grunde zwei verschiedene Sättigungstemperaturen. Man könnte dieselben als normale bezeichnen zum Unterschied von solchen in Bezug auf fremde (z. B. isomorphe) Substanzen, die ebenfalls im Stande sind, die Krystallisation einzuleiten. Quellung (z. B. von Krystalloiden)[1]) als Diffusion der Flüssigkeit in dem festen Körper aufgefasst, ist ebenfalls eine Art Lösung, bei welcher aber die Structur des festen Körpers bis zum sogenannten Schmelzpunkt erhalten bleibt. Dieses Schmelzen (z. B. von Gallerte) ist somit als eine von dem Schmelzen im gewöhnlichen Sinne (Umwandlung) wesentlich verschiedene Erscheinung zu betrachten.

XIV. Krystallisationskraft.

Auch hier ist zu unterscheiden zwischen wahrer und scheinbarer Krystallisationskraft. Erstere ist als die Resultante sämmtlicher auf ein in Anlagerung an den Krystall begriffenes Molecül wirkender Molecularkräfte, also auch der des Lösungsmittels und der darin enthaltenen Modificationen oder fremden Stoffe aufzufassen. Sie ist auf künstlich an-

1) Cf. Schimper, Zeitschr. f. Kryst. 5. p. 131. 1881.

geschliffenen Flächen grösser als auf den natürlichen, welche somit auch Flächen minimaler Krystallisationskraft genannt werden können, ferner auf den Flächen grösser als auf Kanten und Ecken. So wenigstens lässt sich bis jetzt allein die sogenannte „Ergänzung" verletzter Krystalle beim Weiterwachsen und das Auftreten eines bestimmten von Lösungsmittel, Temperatur etc. abhängigen Krystallhabitus erklären. Ihre Wirkung ist nicht allein eine attraktive, sondern auch richtende. Die letztere kann durch Anwesenheit von Hindernissen, z. B. von Verdickungsmitteln beeinträchtigt werden, derart, dass der wachsende Krystall sich mit Zwillingslamellen besetzt oder gar pinselartig zerfasert und sich schliesslich zu einem kugeligen Aggregat von strahliger Structur, einem sogenannten Sphärolithen ausbildet. Die scheinbare Krystallisationskraft ist diejenige, auf welche wir schliessen aus den Arbeitsleistungen, welche wachsende Krystalle auszuführen im Stande sind, z. B. Heben ihres eigenen Gewichts, Deformation plastischer Substanzen, Zersprengen spröder Körper u. dergl.[1])

Analogie zwischen elastischer Verschiebung und allotroper Umwandlung.

Allotrope Umwandlung gleicht äusserlich sehr dem Uebergang elastischer gespannter Körper aus einer Gleichgewichtslage in eine zweite (z. B. Auf- und Zuklappen eines Taschenmessers und ist ebenso wie diese von Kraftwirkungen begleitet, die erhebliche Arbeitsleistungen auszuführen im Stande sind. Sind nun aber, wie es die Theorie der physikalischen Isomerie annimmt, die Molecüle zweier Modificationen chemisch voneinander verschieden, so wären diese Kräfte in bemerkenswerther Weise verschieden von denjenigen, welche die gewöhnlichen elastischen Verschiebungen bedingen, insofern sie wenigstens theilweise chemischer Natur sind.

Unter Elasticität versteht man zwei verschiedene Erscheinungen:

1. Volumenelasticität. — Jeder homogene Körper, dessen Volumen verkleinert (vergrössert) worden ist, sucht mit einer gewissen Kraft sein normales Volumen wieder zu erreichen.

1) Cf. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 487. 1877.

II. Verschiebungselasticität. — Eine Aenderung der Structur ohne Volumenänderung (z. B. die Dehnung eines Quadrats zu einem inhaltsgleichen Rechteck oder Rhombus, oder eine Torsion wie sie Fig. 3, andeutet) weckt eine Kraft, die die Aenderung wieder rückgängig zu machen sucht, wenigstens bis zu der sogenannten Elasticitätgrenze.

Ganz analog zum Falle I sucht eine durch Aenderung des Druckes bei constantem Volumen bewirkte allotrope Verwandlung (z. B. bei Schwefel[1]), Jodsilber[2]) mit einer bestimmten Kraft wieder rückgängig zu werden, und zwar ist diese Kraft von der Temperatur abhängig, entweder positv oder negativ speciell bei der Verwandlungstemperatur = 0.

Die Analogie zum Falle II bildet die drehende Wirkung, welche (z. B. bei Protocatechusäure, Chinonhydrodicarbonsäureester) die Molecüle der einen Modification an der Grenzfläche auf diejenige der anderen ausüben. Schon eine geringe entgegenwirkende äussere Kraft genügt, um sie zu compensiren, verstärkt man aber die Wirkung durch geeignete Aenderung der Temperatur, so tritt Gleiten der Molecüle ein, d. h. bleibende Deformation[3]) ganz ähnlich wie im Falle zu starker elastischer Verschiebung. Wird eine Substanz, z. B. Pech, Siegellack langsam deformirt, so bleibt der Zusammenhang erhalten, erfolgt die Deformation dagegen rasch, so erfolgt Bruch, der Körper zersplittert. Als Analogie hierzu liesse sich vielleicht die bei Salmiak besprochene Erscheinung auffassen, in welchem Falle die Krystalle durch die Umwandlung zertrümmert werden.

Trichitenbildung und Oberflächenspannung fester Körper.

Ist die Anschauung, welche man sich über die Entstehung der Oberflächenspannung bei Flüssigkeiten bildet, richtig, so

---

1) van t'Hoff, Étud. de dynamique chimique. p. 152. 1884.

2) Mallard u. Le Chatelier, Comp. rend, **99**. p. 157. 1884.

3) Dass auch bei homogenen Krystallen selbst beträchtliche bleibende Deformationen ohne Störungen des Zusammenhanges möglich sind, zeigen die Beobachtungen über das Auftreten von Gleitflächen (cf. Reusch, Pogg. Ann. **132**. p. 441. 1867, und über die künstliche Zwillingsbildung bei Kalkspath, wobei die Molecüle sich sogar um einen beträchtlichen Winkel drehen, ohne ihren Zusammenhang zu verlieren. (cf. Reusch, l. c.)

muss eine solche Kraft auch an der Oberfläche fester, selbst krystallisirter Körper vorhanden sein, wenn schon ihre Wirkungen infolge der Starrheit der Masse ganz verschwindende sind. Es gibt nun eine Reihe von Substanzen, welche in Form äusserst feiner mikroskopisch kleiner Haare oder sehr dünner Blättchen (Trichiten)[1]) krystallisiren, die so ungemein biegsam sind, dass schon Flüssigkeitsströmungen Krümmungen hervorrufen können, ja, dass man, ohne einen Bruch befürchten zu müssen, ein solches Blättchen wie ein dünnes Papier zur Spirale zusammenrollen kann (durch Verschiebung des Deckglases auf dem Objectträger, z. B. bei Zimmtsäure.) Man könnte vermuthen, dass sich vielleicht bei solchen Trichiten Wirkungen der Oberflächenspannungen nachweisen liessen, etwa Verbiegungen herrührend von der Differenz der Spannungen an verschieden scharfen Ecken, da ja mit der Schärfe derselben sich entsprechend auch die nach innen gerichtete Resultante der Molecularkräfte ändert.

Thatsache ist, dass sich Trichiten bei ihrer Entstehung in der Regel (falls sie nur hinreichend fein sind) ohne erkennbare äussere Ursache beträchtlich krümmen und verdrehen, bei der allmählichen Verdickung aber mit Vehemenz gerade strecken und nicht selten dabei zerspringen. Tritt eine solche Streckung nicht ein, so wächst auch der gebogene Krystall gleichmässig weiter, und die optischen Eigenschaften desselben ändern sich von Stelle zu Stelle ganz stetig, durchaus der krystallographischen Orientirung entsprechend. Beispiele zeigen die Figuren 3_{2-5}. Ob nun diese Erscheinungen wirklich durch Oberflächenspannung bedingt sind oder durch andere Ursachen hervorgerufen werden, liess sich bis jetzt nicht entscheiden. Jedenfalls muss eine Theorie des festen Aggregatzustandes im Stande sein, auch diese eigenthümliche Erscheinung zu erklären.

Aachen, im März 1885.

---

1) cf. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 484. 1877.

V. *Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper;* *von Victor Hausmaninger in Graz.*

(Aus den Sitzungsber. der königl. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin, vom 29. Jan. 1885; mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Eine von der gewöhnlichen Newton'schen abweichende Theorie des elastischen Stosses cylindrischer Stäbe wurde bekanntlich zuerst von Cauchy[1]) und St. Venant[2]) entwickelt. Aus Versuchen von Hrn. Boltzmann[3]), Hrn. Voigt[4]), und mir[5]) geht zweifellos hervor, dass in der That der Erfolg des Stosses zweier cylindrischer Stäbe ausser von den Massen auch von der Zeit der Rückkehr der Longitudinalwelle bedingt ist, die in jedem Stab entsteht und an dessen freiem Ende reflectirt wird, und dass demnach immer Abweichungen von der alten Stosstheorie im Sinne der St. Venant'schen auftreten.

Diese Abweichungen sind jedoch niemals ganz so gross, meist sogar bedeutend kleiner, als sie die St. Venant'sche Theorie erfordert. Eine Vermittelung dieser letzteren und der alten Theorie schien daher sehr wünschenswerth. Eine solche wurde bisher meines Wissens nur von den Herren W. Voigt und H. Hertz versucht. Hr. Voigt sieht die Ursache der Abweichung zwischen der Theorie St. Venant's und der Erfahrung in der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahme, wonach beide Stäbe von dem Momente an, wo überhaupt eine merkliche Wechselwirkung beginnt, sich sofort in ihren gesammten Endflächen direct berühren und genau wie zwei vollkommen fest verbundene Körper aufeinander wirken. In diesem Falle können aber die Stäbe nach Hrn. Voigt's Ansicht nicht durch eine beliebig kleine Dilatation getrennt werden, und wenn dieselbe gross genug wäre, um die Cohäsion eines Stabes selbst zu überwinden, so

1) Cauchy, Bull. de Sc. d. l. Soc. Phil. p. 180. 1826.
2) St. Venant, Liouville's Journ. **12.** p. 237. 1867.
3) L. Boltzmann, Wien. Ber. **84.** p. 1225. 1881.
4) W. Voigt, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1882. p. 683.
5) V. Hausmaninger, Wien. Ber. **88.** p. 162. 1883.

würde — bei gleicher Beschaffenheit der Stäbe — eine Trennung des ganzen Systems nicht gerade an der Berührungsstelle, sondern dort erfolgen, wo die Dilatation zuerst auftritt. Da nun bei dem Phänomen, das man gemeiniglich als „Stoss" bezeichnet, die Trennung immer an der Berührungsstelle erfolgt, so schliesst Hr. Voigt, dass die beiden Stäbe während ihrer Berührung nicht als Ganzes anzusehen sind, sondern dass vielmehr infolge verschiedener Ursachen (Krümmung, Unebenheiten und namentlich condensirte Gasschichten an den stossenden Endflächen) ein von zwei der Berührungsstelle unendlich nahen Querschnitten begrenztes Element, die sogenannte „Zwischenschicht", ganz andere Eigenschaften besitzt, als ein Element im Inneren der Stäbe. Den Einfluss dieser Zwischenschicht zieht nun Hr. Voigt durch Einführung einer gewissen Constanten c in Rechnung, deren Abhängigkeit von der Natur der Zwischensicht durch die Beziehung:

$$c = \frac{e \cdot q}{\delta}$$

bestimmt ist. Darin ist q der Querschnitt, δ die Dicke und e der während des Stosses als constant vorausgesetzte und darum als der „mittlere" bezeichnete Elasticitätscoëfficient der Zwischenschicht. Für $c = \infty$ geht die Voigt'sche Theorie in die St. Venant'sche, für $c = 0$ in die alte Stosstheorie über. Eine Wechselwirkung zwischen beiden Stäben findet so lange statt, als an ihrer Berührungsstelle eine Compression vorhanden; den Moment, wo die Dilatation sich zu bilden beginnt, bezeichnet Hr. Voigt als das Ende des Stosses.

Nach Hrn. Hertz[1]) findet infolge der Krümmung der Endflächen die Berührung im ersten Momente nur in einem Punkte und im Verlaufe des ganzen Stosses immer nur in einem Kreise statt, dessen Flächeninhalt kleiner als jede der Endflächen ist.

Die beiden genannten Herren haben jedoch ihre Theorien nur soweit entwickelt, dass sie zeigten, dass dieselben

---

1) H. Hertz, Borchardt's Journ. **92.** p. 156. 1882.

mit der alten Newton'schen Theorie übereinstimmen, wenn die erzeugte Longitudinalwelle die beiden Stäbe während der Dauer ihrer Wechselwirkung sehr oft durchläuft. Dagegen haben sie gar keine Rechnungen zur Bestimmung der Abweichungen ihrer Theorien von der alten Newton'schen versucht. Eine Annäherungsformel für diese Abweichungen wurde von Hrn. Boltzmann aus der Voigt'schen Theorie entwickelt und von mir in meiner citirten Abhandlung mitgetheilt. Doch auch diese bezieht sich nur auf den Fall, dass der von der Welle während der Stossdauer zurückgelegte Weg λ gross ist gegenüber der Länge der Stäbe. Da nun sowohl meine Messungen der Stossdauer, als auch die Grösse der experimentell gefundenen Abweichungen von den alten Stossformeln es mir wahrscheinlich machten, dass obige Bedingung nur in geringem Grade erfüllt ist, so hielt ich es nicht für überflüssig, zunächst die Voigt'sche Theorie gerade im entgegengesetzten Falle, wo λ nicht viel grösser ist, als die doppelte Länge des längeren Stabes, für ein Paar Specialfälle zu entwickeln. Denn eine Vergleichung mit der Erfahrung ist nur durch eine quantitative Berechnung der Abweichungen zwischen der alten und den neuen Theorien möglich. Eine analoge Behandlung der Hertz'schen Hypothese behalte ich mir für später vor. (Ein vorläufiger Vergleich der von mir beobachteten mit der nach den Hertz'schen Formeln berechneten Stossdauer zeigte eine ganz gute Uebereinstimmung.)

Ich lege mit Hrn. Voigt die Z-Axe in die Mittellinie der beiden Stäbe von ihrer Berührungsstelle aus, bezeichne mit w, E_1, d_1, m_1, q_1, l_1 Verschiebung, Elasticitätscoëfficient, Dichte, Masse, Querschnitt und Länge des ersten, mit w_2, E_2, d_2, m_2, q_2 und l_2 die analogen Grössen des zweiten Stabes und setze zur Abkürzung:

$$\frac{E_1}{d_1} = a_1^2; \quad E_1 q_1 = b_1, \qquad \frac{E_2}{d_2} = a_2^2; \quad E_2 q_2 = b_2,$$

dann ist die Hypothese des Hrn. Voigt in folgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$(1) \qquad \frac{d^2 w_1}{d t^2} = a_1^2 \frac{d^2 w_1}{d z^2}, \qquad \frac{d^2 w_2}{d t^2} = a_2^2 \frac{d^2 w_2}{d z^2}.$$

(2) $\frac{dw_1}{dz} = 0$ für $z = -l_1$, $\frac{dw_2}{dz} = 0$ für $z = l_2$.

(3) $$b_1 \frac{dw_1}{dz} = b_2 \frac{dw_2}{dz} = c(w_2 - w_1) \text{ für } z = 0.$$

(4) $$\left.\begin{matrix} w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ für } t = 0 \begin{matrix} -l_1 < z < 0 \\ 0 < z < l_2. \end{matrix}$$

(5) $$\left\{\begin{matrix} \frac{dw_1}{dt} = V_1^0 \\ \frac{dw_2}{dt} = V_2^0 \end{matrix}\right\} t = 0 \begin{matrix} -l_1 < z < 0 \\ 0 < z < l_2. \end{matrix}$$

Für meine Zwecke scheint mir die Integration obiger Gleichungen durch willkürliche Functionen auf übersichtlicherem Wege zum Ziele zu führen, als dies mit Hülfe periodischer Reihen möglich ist. Ich setze deshalb:

$$w_1 = f(z + a_1 t) + g(z - a_1 t)$$
$$w_2 = \varphi(z + a_2 t) + \gamma(z - a_2 t).$$

Gemäss der Bedingung (2) muss für die freien Stabenden:

$$f'(-l_1 + a_1 t) + g'(-l_1 - a_1 t) = 0,$$
$$\varphi'(l_2 + a_2 t) + \gamma'(l_2 - a_2 t) = 0$$

und zwar zu allen Zeiten sein; ich führe daher statt $a_1 t$ und $a_2 t$ die willkürliche Variable u ein, sodass:

$$f'(-l_1 + u) + g'(-l_1 - u) = 0$$
$$\varphi'(l_2 + u) + \gamma(l_2 - u) = 0$$

wird. Daraus folgt:

(6) $$g'(-u) = -f'(u - 2l_1), \quad \varphi'(u) = -\gamma'(-u + 2l_2).$$

Ich beschränke meine Rechnungen auf den wichtigsten Fall, dass das Material beider Stäbe dasselbe ist. Dann ist $a_1 = a_2$, und aus Gleichung (3) folgt:

$$b_1 f'(u) + b_1 g'(-u) = b_2 \varphi'(u) + b_2 \gamma'(-u)$$
$$b_1 f'(u) + b_1 g'(-u) = c\varphi(u) + c\gamma(-u) - cf(u) - cg(-u),$$

woraus man findet:

(7) $$\gamma'(-u) = \frac{b_1}{b_2} f'(u) + \frac{b_1}{b_2} g'(-u) - \varphi'(u)$$

und:

(8) $$f''(u) + \frac{c(b_1 + b_2)}{b_1 b_2} f'(u) = \frac{c(b_2 - b_1)}{b_1 b_2} g'(-u) + \frac{2c}{b_1} \varphi'(u) + g''(-u).$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) gelten für alle u. Gemäss der Bedingung (4) ist, wenn ich für z gleichfalls u schreibe:

$$(9) \quad \begin{aligned} f(u) + g(u) &= 0 \quad \text{für} \quad -l_1 < u < 0 \\ \varphi(u) + \gamma(u) &= 0 \quad \text{,,} \quad 0 < u < l_2 \end{aligned}$$

und nach (5), wenn ich zur Abkürzung:

$$(10) \quad \frac{V_1^0}{2a_1} = s, \qquad \frac{V_2^0}{2a_1} = \sigma$$

setze:

$$(11) \quad \begin{aligned} f'(u) - g'(u) &= 2s \quad \text{für} \quad -l_1 < u < 0 \\ \varphi'(u) - \gamma'(u) &= 2\sigma \quad \text{,,} \quad 0 < u < l_2. \end{aligned}$$

Durch Ableitungen der Gleichungen (9) folgt in Verbindung mit (11):

$$(12) \quad \left.\begin{aligned} f'(u) &= s \\ g'(u) &= -s \end{aligned}\right\} \text{für } u = -l_1 \text{ bis } u = 0$$

$$(13) \quad \left.\begin{aligned} \varphi'(u) &= \sigma \\ \gamma'(u) &= -\sigma \end{aligned}\right\} \text{von } u = 0 \text{ bis } u = l_2.$$

Das Problem liesse sich allerdings noch weiter in voller Allgemeinheit behandeln, die Rechnung wird jedoch bald so complicirt, dass sich schon jetzt eine Specialisirung empfiehlt, um so mehr, als man es in der Praxis ja doch nur mit gewissen Specialfällen zu thun hat, in denen die Längen- und Querschnitte der Stäbe in einem bestimmten, einfachen rationalen Verhältnisse stehen. Ich werde erstens Stäbe von gleicher Länge und gleichem Querschnitt, zweitens Stäbe von gleichem Querschnitt, von denen der eine Stab doppelt so lang als der andere, drittens Stäbe, von denen der eine die doppelte Länge oder den halben Querschnitt des anderen besitzt, betrachten.

I. Fall.

$$l_1 = l_2 = l; \quad b_1 = b_2 = b.$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) gehen für diesen Fall über in:

$$(14) \quad g'(-u) = -f'(u - 2l),$$

$$(15) \quad \varphi'(u) = -\gamma'(-u + 2l),$$

$$(16) \quad \gamma'(-u) = f'(u) + g'(-u) - \varphi'(u),$$

$$f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) = \frac{2c}{b} \varphi'(u) + g'(-u). \tag{17}$$

Nun folgt aus (12) und (14):

$$g'(-u) = -s \text{ von } 0 \text{ bis } 2l,$$

ebenso aus (13) und (15):

$$\varphi'(u) = \sigma \text{ von } 0 \text{ bis } 2l.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (16) und (17), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \gamma'(-u) &= f'(u) - s - \sigma \\ f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) &= \frac{2c\sigma}{b} \end{aligned}\right\} \text{ 0 bis 2l.}$$

Die Integration der letzten Gleichung liefert, wenn ich zur Abkürzung:

$$\frac{2c}{b} = \alpha \qquad \text{setze:}$$

sodass:

$$\left.\begin{aligned} f'(u) &= (s-\sigma)\, e^{-\alpha u} + \sigma = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_1'(u) - (s+\sigma) \end{aligned}\right\} \text{ 0 bis } 2l.$$

Weiter folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (15):

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -(s-\sigma)\, e^{-\alpha(u-2l)} - \sigma \\ \varphi'(u) &= -(s-\sigma)\, e^{-\alpha(u-2l)} + s \end{aligned}\right\} 2l \text{ bis } 4l.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (17) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} f'(u) &= (s-\sigma)\, e^{-\alpha u}\{e^{2\alpha l}[-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1\} + s = f_2'(u) \\ \text{und:} \quad \gamma'(-u) &= f_2'(u) - (s+\sigma) \end{aligned}\right\} \text{von } 2l \text{ bis } 4l.$$

Analog findet man:

$$\left.\begin{aligned} & g'(-u) = -f_2'(u-2l) \\ & \varphi'(u) = -f_2'(u-2l) + (s+\sigma) \\ & f'(u) = (s-\sigma)\, e^{-\alpha u}\{e^{4\alpha l}[2\alpha^2 u^2 - 16\alpha^2 l u + 32\alpha^2 l^2 + 1] + \\ & \qquad + e^{2\alpha l}[-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1\} + \sigma = f_3'(u) \\ & \gamma'(-u) = f_3'(u) - (s+\sigma) \qquad \text{und:} \end{aligned}\right\} \text{von } 4l \text{ bis } 6l.$$

$$\left.\begin{aligned} & g'(-u) = -f_3'(u-2l) \\ & \varphi'(u) = -f_3'(u-2l) + (s+\sigma) \\ & f'(u) = (s-\sigma)\, e^{-\alpha u}\{e^{6\alpha l}[-\tfrac{4}{3}\alpha^3 u^3 + (24\alpha^3 l + 2\alpha^2) u^2 \\ & \quad - (144\alpha^3 l^2 + 24\alpha^2 l + 2\alpha) u + 288\alpha^3 l^3 + 72\alpha^2 l^2 + 12\alpha l - 1] \\ & \quad + e^{4\alpha l}[2\alpha^2 u^2 - 16\alpha^2 l u + 32\alpha^2 l^2 + 1] + e^{2\alpha l}[-2\alpha u \\ & \quad + 4\alpha l - 1] + 1\} + s = f_4'(u) \\ & \gamma'(-u) = f_4'(u) - (s+\sigma). \end{aligned}\right\} \text{von } 6l \text{ bis } 8l$$

Ich sah von einer Ableitung des allgemeinen Bildungsgesetzes der Functionen f', g', φ und γ' vorläufig ab und schlug folgenden, für meine Zwecke auch vollkommen genügenden Weg ein. Ich fragte mich, wie gross c, resp. α gewählt werden muss, damit der Stoss zu Ende ist, wenn die Welle ein bestimmtes, willkürlich angenommenes Wegstück λ durchlaufen hat, und berechnete hernach die dazu gehörigen Schwerpunktsgeschwindigkeiten. Der St. Venant'schen Theorie zufolge kann der Stoss erst für $\lambda = 2l$ zu Ende sein. Für diesen Fall wird nach der Hypothese des Hrn. Voigt c und somit auch die von mir mit α bezeichnete Grösse unendlich. Da nun derselben Theorie gemäss das α einen endlichen Werth besitzen soll, so mus $\lambda > 2l$ sein. Ich setze zunächst:

$$u = \lambda = 2l + \varepsilon l,$$

worin:

$$0 < \varepsilon \leqq 2.$$

Als Bedingung für das Ende des Stosses bilde ich:

$$\left(\frac{d w_1}{d z}\right)_{\substack{z=0\\u=2l+\varepsilon l}} = (s-\sigma)\, e^{-\alpha(2l+\varepsilon l)}\{e^{2\alpha l}[-2\alpha(2l+\varepsilon l)+4\alpha l-2]+1\}+s-\sigma=0,$$

oder:

$$e^{-2\alpha l} - 2\alpha\varepsilon l + e^{\alpha\varepsilon l} - 2 = 0. \tag{18}$$

Behufs bequemerer Rechnung bezeichne ich die reelle, positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$e^{x} = 2x + 2$$

mit ξ, sodass $\xi = 1{,}67835$ ist, und setze $\alpha\varepsilon l = \xi - \eta$. Dann geht Gleichung (18) über in:

$$e^{-2\alpha l} = 2(\xi + 1)(1 - e^{-\eta}) - 2\eta. \tag{19}$$

Für Berechnung einer Tabelle ist es am bequemsten, dem η willkürlich gewählte Werthe zu ertheilen und die zugehörigen Werthe von αl aus Gleichung (19) zu bestimmen, wobei es von Vortheil ist, die Exponentielle durch ihre Reihe zu ersetzen. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist:

$$v_1 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\left(\frac{d w_1}{d t}\right) dz, \text{ d. i.}$$

$$(20)\qquad v_1 = \frac{a}{l}\int_{-l}^{0} f'(z+\lambda)\,dz - \frac{a}{l}\int_{-l}^{0} g'(z-\lambda)\,dz.$$

Die Substitution der entsprechenden Functionswerthe liefert mit Berücksichtigung der Gleichung (18) für:

$$0 < \varepsilon \leqq 2$$

$$(21)\qquad \beta = \frac{1}{2\alpha l}\{2e^{-\alpha\varepsilon l} + \alpha\varepsilon l - 2\},$$

wenn $v_1 = \beta V_1^0 + (1-\beta)V_2^0$ gesetzt wird, und nach Einführung von η folgende Reihenentwickelung:

$$(22)\quad \beta = \frac{1}{2\alpha l}[0{,}051\,714\,198 - \eta + 0{,}373\,364\,198]\left(\eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} + \cdots\right),$$

welche, da selbst für grosse ε der Werth des η klein ist, auch noch bis $\varepsilon = 2$ ausserordentlich bequem ist.

Mit Hülfe der Formeln (19) und (22) habe ich nun unter Annahme verschiedener η die in der folgenden Tab. I zusammengestellten Werthe berechnet. Es zeigte sich dabei, dass der Verlust an lebendiger Kraft ein Maximum erreicht, wenn λ zwischen $3l$ und $4l$ liegt. Zur genaueren Bestimmung desselben ist nach (21) die Function:

$$\frac{\alpha\varepsilon l + 2e^{-\alpha\varepsilon l} - 2}{2\alpha l}$$

unter der Bedingung:

$$e^{-2\varepsilon l} + e^{2\alpha\varepsilon l} - 2\alpha\varepsilon l - 2 = 0$$

zu einem Maximum zu machen. Nach bekannten Regeln findet sich für das Maximum:

$$\alpha\varepsilon l = 1{,}655\,320\,9 \qquad 2\alpha l = 2{,}578\,448\,24$$
$$\eta = 0{,}023\,029\,1 \qquad \beta = 0{,}014\,498\,318\,3.$$

Schliesslich berechnete ich die Schwerpunktsgeschwindigkeit noch für die Fälle, dass der Stoss zu Ende ist, wenn die Welle einen Stab erstens sechsmal, zweitens achtmal durchlaufen hat. Im ersteren Falle hat man:

$$(23)\quad \left(\frac{dw}{dz}\right)_{\substack{z=0\\u=6l}} = (s-\sigma)\{e^{-6\alpha l}[e^{4\alpha l}(8\alpha^2 l^2 + 4\alpha l + 2) - e^{2\alpha l}(8\alpha l + 2)] + 1\} - (s-\sigma) = 0,$$

oder, $e^{2\alpha l} = x$ gesetzt:

$$-x^3 + 2x^2[(\log x)^2 + \log x + 1] - 2x[2\log x + 1] + 1 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die reellen positiven Wurzeln 1 und 1,83508, von denen die erstere unbrauchbar ist. Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit liefert die Formel (20) nach Substitution der betreffenden Functionswerthe:

$$v_1 = \frac{a}{l}\int_{-2l}^{0} f_3{}^1(z+6l)\,dz,$$

d. i. mit Zuziehung der Gleichung (23):

$$\beta = \frac{1}{2\alpha l}\{2e^{-2\alpha l}[e^{-2\alpha l} - 4\alpha l - 3] + 4\}.$$

Die numerische Auswerthung ergibt:

$$\beta = 0{,}001\,653\,73.$$

Tabelle I.

η	αl	$\lambda : l$	β
—	0,162 853	8	0,000 517 9
—	0,303 544	6	0,001 653 7
0,062 216	0,808 067	4	0,008 330 5
0,06	0,826 268	3,958 626	0,008 957 6
0,05	0,911 239	3,786 962	0,011 444 3
0,04	1,019 967	3,606 287	0,013 212 0
0,03	1,159 794	3,421 244	0,014 263 2
0,025	1,248 952	3,323 789	0,014 478 5
0,0232	1,285 594	3,287 460	0,014 498 2
0,023 029	1,289 224	3,283 967	0,014 498 3
0,022 7	1,296 287	3,277 224	0,014 497 7
0,02	1,358 523	3,220 701	0,014 448 3
0,010 697	1,667 652	3	0,013 501 6
0,008	1,811 873	2,921 891	0,012 890 8
0,004	2,156 850	2,776 294	0,011 408 0
0,001	2,848 800	2,588 792	0,008 966 5
0,000 1	3,999 804	2,419 583	0,006 456 7
0,000 01	5,150 989	2,325 829	0,005 019 2
10^{-10}	10,907 4	2,153 872	0,002 370 6
10^{-100}	114,524	2,014 655	0,000 225 8
10^{-1000}	1150,69	2,001 459	0,000 022 5
$10^{-100000}$	1151288	2,000 001	0,000 000 02

Soll die Welle den Stab achtmal durchlaufen, so erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_{\substack{z=0\\u=8l}} = (s-\sigma)\{e^{-8\alpha l}[1 - 2e^{6\alpha l}(\tfrac{16}{3}\alpha^3 l^3 + 2\alpha l + 1) + 2e^{4\alpha l}(16\alpha^2 l^2 + 4\alpha l + 1) - 2e^{2\alpha l}(6\alpha l + 1)] + 1\} = 0,$$

welche für αl den Werth 0,162 853 47 liefert; ferner wird:

$$v_1 = \frac{a}{l}\int_{-2l}^{0} f_4'(z + 8l)\,dz, \text{ d. i.}$$

$$\beta = \frac{1}{2\alpha l}\{2e^{-2\alpha l}[e^{-4\alpha l} - 3e^{-2\alpha l} + 5 + 8\alpha^2 l^2 + 8\alpha l - 8\alpha l e^{-2\alpha l}] - 6\},$$

und die numerische Berechnung dieses Ausdrucks ergibt:

$$\beta = 0{,}000\,517\,889.$$

Es erscheint mir nicht überflüssig, die Annäherungsformel des Hrn Prof. Boltzmann mit meinen Resultaten numerisch zu vergleichen. Dieselbe geht für den hier vorausgesetzten Fall über in:

$$\beta = \frac{4}{45}\frac{c^2 l^2}{b^2}.$$

Dabei ist die Stossdauer $= \pi\sqrt{\frac{m}{2c}}$. Daher ist:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{a\pi}{l}\sqrt{\frac{m}{2c}} = \pi\sqrt{\frac{b}{2cl}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha l}},$$

und obige Formel lässt sich schreiben:

$$\beta = \frac{1}{45}\frac{\pi^4 l^4}{\lambda^4}.$$

Für $\lambda = 6l$ wird:

$$\beta = 0{,}001\,670\,242, \quad \alpha l = 0{,}274;$$

für $\lambda = 8l$:

$$\beta = 0{,}000\,528\,476, \quad \alpha l = 0{,}154.$$

Vergleicht man diese Werthe mit den entsprechenden der Tab. I, so zeigt sich bereits eine Uebereinstimmung, wie man bei den der Annäherungsformel zu Grunde liegenden Voraussetzungen nur immer erwarten kann.

II. Fall.

$$l_1 = 2l_2 = l; \quad b_1 = b_2 = b.$$

Hier lauten die Gleichungen (6), (7) und (8):

$$g'(-u) = -f'(u - 2l)$$

$$\varphi'(u) = -\gamma'(-u + l)$$

$$\gamma'(-u) = f'(u) + g'(-u) - \varphi'(u)$$

$$f''(u) + \frac{2c}{b}f'(u) = \frac{2c}{b}\varphi'(u) + g''(-u).$$

Ferner ist wieder:

$$\frac{2c}{b} = \alpha,$$

$$\varphi'(u) = \sigma \quad \text{von } 0 \text{ bis } l$$

$$g'(-u) = -s \quad \text{„} \; 0 \; \text{„} \; 2l.$$

Man erhält durch eine analoge Behandlung dieser Gleichungen wie im I. Falle folgende Functionswerthe:

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \varphi'(u) &= \sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)\, e^{-\alpha u} + \sigma = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_1'(u) - s - \sigma \end{aligned}\right\} \text{von } 0 \text{ bis } l$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \varphi'(u) &= -f_1'(u-l) + s + \sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)\, e^{-\alpha u} \{e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 1\} + s = f_2'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_2'(u) + f_1'(u-l) - 2s - \sigma \end{aligned}\right\} \text{von } l \text{ bis } 2l$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_1'(u-2l) \\ \varphi'(u) &= -f_2'(u-l) - f_1'(u-2l) + 2s + \sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)\, e^{-\alpha u} \Big\{ e^{2\alpha l} \left[\frac{\alpha^2 u^2}{2} - u(2\alpha^2 l + \alpha) + 2\alpha^2 l^2 + 2\alpha l\right] \\ &\quad + e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 1 \Big\} + s = f_3'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_3'(u) + f_2'(u-l) - (2s + \sigma) \end{aligned}\right\} \text{von } 2l \text{ bis } 3l$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_2'(u-2l) \\ \varphi'(u) &= -f_3'(u-l) - f_2'(u-2l) + 2s + \sigma \\ f'(u) &= (s-\sigma)\, e^{-\alpha u} \Big\{ e^{3\alpha l} \left[-\frac{\alpha^3 u^3}{6} + u^2\left(\tfrac{3}{2}\alpha^3 l + \tfrac{3}{2}\alpha^2\right) - u\left(\tfrac{9}{2}\alpha^3 l^2 + 9\alpha^2 l - \alpha\right) \right. \\ &\quad \left. + \tfrac{9}{2}\alpha^3 l^3 + \tfrac{27}{2}\alpha^2 l^2 - 3\alpha l + 1\right] + e^{2\alpha l}\left[\frac{\alpha^2 u^2}{2} - u(2\alpha^2 l + \alpha) + 2\alpha^2 l^2 + 2\alpha l\right] \\ &\quad + e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 1 \Big\} + \sigma = f_4'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_4'(u) + f_3'(u-l) - (2s + \sigma). \end{aligned}\right\} \text{von } 3l \text{ bis } 4l$$

Ich setze für den Moment des Endes des Stosses $\lambda = 2l + \varepsilon l$ und betrachte den Fall, dass:

$$0 < \varepsilon \leqq 1.$$

Dann ist:

$$(24) \quad e^{2\alpha l}\left[e^{\alpha \varepsilon l} + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 l^2}{2} - \alpha \varepsilon l - 1\right] - e^{\alpha l}[\alpha \varepsilon l + \alpha l + 1] + 1 = 0.$$

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit ergibt sich mit Rücksicht auf (24):

$$(25)\quad v_1 = \frac{V_1^0 - V_2^0}{2\alpha l}\{e^{-\alpha\varepsilon l}[e^{-\alpha l} - \alpha\varepsilon l] + \alpha\varepsilon l - 1\} + \frac{V_1^0 + V_2^0}{2}.$$

Ich bestimmte unter Annahme verschiedener αl das zugehörige ε aus Gleichung (24) und mit diesen Werthen das v_1 aus Gleichung (25). Die erhaltenen Resultate sind aus Tab. II entnehmen.

Tabelle II.

αl	$\lambda : l$	v_1
0,9036	3,000 000	$0{,}33491\,V_1^0 + 0{,}66509\,V_2^0$
2,3026	2,253 266	$0{,}35093\,V_1^0 + 0{,}64907\,V_2^0$
4,6052	2,051 418	$0{,}39770\,V_1^0 + 0{,}60230\,V_2^0$
6,9078	2,012 853	$0{,}42824\,V_1^0 + 0{,}57176\,V_2^0$
9,2103	2,004 657	$0{,}46493\,V_1^0 + 0{,}53507\,V_2^0$
2302,6	2,000 002	$0{,}49978\,V_1^0 + 0{,}50022\,V_2^0$

III. Fall.

$$l_1 = 2l_2 = l;\quad b_2 = 2b_1.$$

Für diesen Fall ist:

$$\gamma'(-u) = \tfrac{1}{2}f'(u) + \tfrac{1}{2}g'(-u) - \varphi'(u),$$

$$f''(u) + \frac{3c}{2b_1}f'(u) = \frac{2c}{b_1}\varphi'(u) + \frac{c}{2b_1}g'(-u) + g''(-u),$$

alles übrige wie im II. Falle.

Setze ich $(3c/2b_1) = \alpha$, so ergeben sich folgende Functionswerthe:

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \varphi'(u) &= \sigma \\ f'(u) &= \tfrac{4}{3}(s-\sigma)e^{-\alpha u} - \tfrac{1}{3}(s-4\sigma) = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= \tfrac{1}{2}f_1'(u) - \frac{s}{2} - \sigma \end{aligned}\right\}\text{von } 0 \text{ bis } l$$

$$\left.\begin{aligned} g(-u) &= -s \\ \varphi'(u) &= -\tfrac{1}{2}f_1'(u-l) + \frac{s}{2} + \sigma \\ f'(u) &= \tfrac{4}{9}(s-\sigma)e^{-\alpha u}\{2e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 3\} + \tfrac{1}{9}(5s+4\sigma) = f_2'(u) \\ \gamma'(-u) &= \tfrac{1}{2}f_2'(u) + \tfrac{1}{2}f_1'(u-l) - s - \sigma \end{aligned}\right\}\text{von } l \text{ bis } 2l$$

$$\left.\begin{aligned} g'(-u) &= -f_1'(u-2l) \\ \varphi'(u) &= -\tfrac{1}{2}f_2'(u-l) - \tfrac{1}{2}f_1'(u-2l) + s + \sigma \\ f'(u) &= \tfrac{4}{9}(s-\sigma)e^{-\alpha u}\{\tfrac{1}{3}e^{2\alpha l}[2\alpha^2u^2 - u(8\alpha^2 l + 14\alpha) + 8\alpha^2 l^2 + 28\alpha l - 5] \\ &\quad + 2e^{\alpha l}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 3\} + \tfrac{1}{27}(35s - 8\sigma) = f_3'(u) \\ \gamma'(-u) &= \tfrac{1}{2}f_3'(u) + \tfrac{1}{2}f_2'(u-l) - s - \sigma. \end{aligned}\right\}\text{von } 2l \text{ bis } 3l$$

Ich setze wieder $u = \lambda = 2l + \varepsilon l$, wo $0 < \varepsilon \leqq 1$, und bilde:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\substack{z=0\\ u=2l+\varepsilon l}} = f'(\lambda) + g'(-\lambda) = 0.$$

Die sich hieraus ergebende Gleichung:

$$(26)\quad 3e^{-2\alpha l} - e^{-\alpha l}(2\alpha l + 2\alpha\varepsilon l + 2) + \tfrac{2}{3}\alpha^2 l^2 \varepsilon^2 - \tfrac{14}{3}\alpha\varepsilon l - \tfrac{11}{3} + \tfrac{11}{3}e^{\alpha\varepsilon l} = 0,$$

bildet die Bedingung für das Ende des Stosses. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist mit Zuziehung obiger Gleichung:

$$(27)\quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{2(V_1^0 - V_2^0)}{27\,\alpha l}\{2e^{-\alpha\varepsilon l}[3e^{-\alpha l} - 2\alpha\varepsilon l + 5] + 11\alpha\varepsilon l - 16\} \\ \qquad + \tfrac{1}{9}V_1^0 + \tfrac{8}{9}V_2^0. \end{cases}$$

Ich berechnete wieder unter speciellen Annahmen von αl das entsprechende ε aus Gleichung (26) und mit diesen Werthen das v_1 aus (27) und folgende Resultate:

Tabelle III.

αl	$\lambda : l$	v_1
1,07108	3,00000	$0{,}00355\,V_1^0 + 0{,}99645\,V_2^0$
2,3026	2,40029	$0{,}01107\,V_1^0 + 0{,}98893\,V_2^0$
3,91203	2,20675	$0{,}03468\,V_1^0 + 0{,}96532\,V_2^0$
6,9078	2,11020	$0{,}06420\,V_1^0 + 0{,}93580\,V_2^0$
23025	2,00002	$0{,}11109\,V_1^0 + 0{,}88891\,V_2^0$

Fasse ich die Ergebnisse meiner Berechnungen zusammen, so komme ich zu folgendem Schlusse:

Die Abweichungen, welche Hr. Voigt für gleichlange Stäbe zwischen den nach der alten Theorie berechneten und seinen (allerdings nach Anbringung gewisser Correctionen) beobachteten Resultaten findet, sind kleiner als die grössten Abweichungen, welche in meiner Tab. I vorkommen, woraus aber noch kein Schluss gezogen werden darf, ob λ gross oder klein gegenüber $2l$ ist. Meine in der citirten Abhandlung angegebenen Beobachtungen über die Stossdauer von gleichlangen Glasstäben ergeben, wenn man für Glas $\alpha = 5000$ m setzt, $\lambda = 4l$, $8l$ und $12l$ entsprechend den Anfangsamplituden von 100, 50 und 30 mm (Fadenlänge: 2,5 m). Danach müssten

also die Abweichungen von der alten Stosstheorie, welche übrigens kaum die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten dürften, mit wachsender Stossgeschwindigkeit zunehmen.

Was den zweiten der hier betrachteten Fälle betrifft, so dürften schon für $\lambda = 3l$ die kaum zu vermeidenden Beobachtungsfehler grösser sein als die Abweichungen des Werthes der Tab. II von $V_1^0/3 + 2V_2^0/3$, welches der Grenzwerth für abnehmende α ist. In allen Fällen, wo Hr. Voigt eine die Grenze der Beobachtungsfehler entschieden übersteigende Abweichung vom alten Stossgesetze findet, dürfte daher λ noch beträchtlich kleiner als $3l$ sein, ein Umstand, der die Anwendbarkeit von Annäherungsformeln, welche λ/l gross gegen die Einheit voraussetzen, als sehr zweifelhaft erscheinen lässt.

Auch im dritten Falle bestätigt es sich, dass nach der Voigt'schen Hypothese der den gewöhnlichen Stossformeln entsprechende Grenzwerth sehr rasch erreicht wird, so zwar, dass schon für $\lambda = 3l$ die Beobachtung kaum mehr eine Abweichung von denselben ergeben könnte.

Obwohl die hier mit Hrn. Voigt gemachte Annahme, dass c eine Constante sei, durch Beobachtungen Voigt's durchaus nicht bestätigt wird, so ist dieselbe doch schon insofern von theoretischem Interesse, als sich mit ihrer Hülfe bei weitem am leichtesten eine continuirliche Brücke zwischen der alten und der St. Venant'schen Theorie herstellen lässt. Und das war der Zweck der obigen Entwickelungen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Boltzmann, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, für die mir hierbei vielfach gewährte Anleitung und Unterstützung meinen wärmsten Dank auszusprechen.

VI. *Ueber die Phasenänderungen bei der Reflexion und über die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes; von W. Wernicke.*

(Hierzu Taf. III Fig. 1—7.)

1.

Die Intensität I des von einer dünnen Schicht eines isotropen durchsichtigen Körpers reflectirten Lichtes ist:

$$(1)\qquad I = \frac{(r+\varrho)^2 - 4r\varrho \sin^2 \frac{\pi}{\lambda_1}(2d\cos\alpha_1 + \Delta - \Delta' + D)}{(1+r\varrho)^2 - 4r\varrho \sin^2 \frac{\pi}{\lambda_1}(2d\cos\alpha_1 + \Delta - \Delta' + D)}.$$

Es bedeuten darin r die Amplitude des an der oberen Grenzebene der Schicht reflectirten Lichtes, wenn die des einfallenden gleich Eins ist, ϱ die des an der zweiten Grenzebene reflectirten, d die Dicke der Schicht, λ_1 die Wellenlänge des Lichtes in der Substanz derselben, α_1 den Winkel zwischen dem Lichtstrahl innerhalb und der Normale; Δ, Δ' und D, jedes multiplicirt mit dem Factor $2\pi/\lambda$, die Phasenverzögerungen infolge der Reflexion an der ersten und zweiten und der Brechung in der ersten Grenzebene.

Der Ausdruck (1) ist streng richtig für isotrope durchsichtige Substanzen; er ist auf allgemein gültige und allgemein angenommene mechanische Grundsätze basirt und unabhängig von jeder besonderen Theorie der Reflexion des Lichtes. Er erhält seine kleinsten Werthe, wenn:

$$(2)\qquad (2d\cos\alpha_1 + \Delta - \Delta' + D)\frac{2\pi}{\lambda} = q\pi$$

wird, wo q eine beliebige, von der Dicke der Schicht und der Natur des angewandten Lichtes abhängige ganze Zahl ist; dieselbe ist gerade, wenn der Brechungsindex der Schicht grösser oder kleiner als jeder der beiden Grenzmedien ist, ungerade, wenn er zwischen den beiden letzteren liegt.

Die Hauptaufgabe der Reflexionstheorie, nämlich die Bestimmung der Grössen Δ, Δ', D durch die optischen Constanten, namentlich den Brechungsindex, für die verschiedenen Lichtarten, konnte bis jetzt nicht ohne Hinzuziehung fremdartiger, aus den Principien der Mechanik

nicht ableitbarer, Annahmen gelöst werden; die Resultate sind daher sehr verschieden, oder, richtiger gesagt, einander widersprechend. Nach Fresnel's und Cauchy's Annahmen und nach Green's Theorie sind alle 3 Grössen für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht Null; nach Neumann's, Mac-Cullagh's u. A. Hypothesen ergibt sich das Gegentheil, nämlich dass $\varDelta$, $\varDelta'$, D nicht für parallel, sondern für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht verschwinden. Auch der dritte noch mögliche Fall hat seine Vertreter gefunden: in der neuesten Zeit haben Einige unter der Voraussetzung des „Mitschwingens der ponderabeln Massentheilchen", Andere durch die Annahme „einer allmählich von einem zum anderen Mittel sich ändernden Aetherdichte" gefunden, dass beide Lichtarten ihre Phasen ändern, ein Resultat, was freilich den Vorzug der Allgemeinheit vor den anderen voraus zu haben scheint.

Im Folgenden will ich durch neue Versuche zu entscheiden versuchen, welche von den genannten — überhaupt möglichen — Annahmen die allein zulässige ist.

Der einfache Grundgedanke zu diesen Versuchen entwickelt sich folgendermassen:

Aus Gl. (2) ergibt sich:

$$2d\cos\alpha_1 + \varDelta - \varDelta' + D = q \cdot \frac{\lambda_1}{2} \cdot \tag{3}$$

Ist $\varDelta - \varDelta' + D$ Null, so ergibt (3) für die Dicke der Schicht:

$$2d = \frac{1}{2}\,\frac{q\lambda_1}{\cos\alpha_1} \cdot \tag{4}$$

Diese Gleichung ist zufolge der ersten Theorie streng richtig für parallel, nach der zweiten für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht, während sie nach der dritten so wenig richtig ist, dass sich verschiedene Werthe für d bei verschiedenen Einfallswinkeln ergeben müssen. Für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht dagegen liefert die erste Theorie verschiedene Werthe für d für verschiedene Werthe von α_1, die zweite constante und die dritte ebenfalls voneinander verschiedene. Da sich nun, wie ich sogleich zeigen werde, q, λ_1 und α_1 mit hinreichender Genauigkeit

durch Messungen bestimmen lassen, so kann durch die Versuche entschieden werden, welche von den möglichen drei Hypothesen Gültigkeit hat.

Erst nachdem diese Hauptfrage entschieden ist, können wir an die genauere Prüfung der Formeln gehen, welche uns die den Versuchen entsprechende, allein zulässige Theorie liefert.

2. Apparate und Beobachtungsmethoden.

(Vgl. Fig. 1.)

Durch den Spalt S des Collimators C eines Spectrometers mit horizontalem Kreise K tritt Sonnenlicht ein und fällt auf die in der Mitte des drehbaren Tischchens T vertical aufgestellte Glasplatte P, auf welcher die dünne zu untersuchende Schicht befestigt ist. Dieselbe reflectirt die parallelen Strahlen in das Beobachtungsfernrohr F, welches um die verticale Axe des Instrumentes drehbar und mit den Nonien (oder besser einem dieselbe ersetzenden concentrischen getheilten Kreise) fest verbunden ist. Der abgelesene Winkel, nämlich der Winkel zwischen Collimator- und Fernrohraxe, ist der doppelte Einfallswinkel; derselbe kann auf diese Weise mit jeder gewünschten Genauigkeit, wenn man will, bis auf einzelne Secunden erhalten werden. Ist der Einfallswinkel abgelesen, so wird der Tisch T mit der Platte festgeklemmt und vor das Objectiv des Fernrohres auf ein fest mit demselben verbundenes Ansatzstück G mit horizontalem Tischchen das kleine Prismensystem (G) mit gerader Durchsicht gesetzt. Dasselbe zerlegt das durchgehende, von P reflectirte Lichtbündel in ein Spectrum, welches mit den von der Interferenz an der dünnen Schicht herrührenden dunklen Streifen durchzogen ist. Jetzt drehe ich das Fernrohr ein wenig, bis die im Brennpunkt des Objectives angebrachte Spitze auf eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie einsteht, und klemme das Fernrohr fest. Die Spitze ist durch eine Mikrometerschraube M mit getheilter Trommel in der Focalebene verschiebbar; ich drehe die Trommel so lange, bis die Spitze in der Mitte des nächsten Interferenzstreifens steht, und lese die Zahl der Umdrehungen an der Trommel ab; diese Zahl gibt die Lage

des Streifens im Spectrum an; sie ist abhängig von der Natur des Lichtes. Um sie für beide Lichtarten zu erhalten, betrachte ich das Spectrum durch ein dicht hinter dem Ocular angebrachtes Nicol'sches Prisma *N*. Ist die lange Diagonale der Endfläche desselben horizontal, so erhält man die Lage des Streifens für parallel, ist sie vertical, für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die beiden an der Trommel der Mikrometerschraube abgelesenen Zahlen werden notirt und die Spitze auf die zum Ausgangspunkt der Messung dienende Fraunhofer'sche Linie zurückgedreht. Die Messung kann alsdann zur Controle wiederholt werden, wobei zu bemerken ist, dass der Einfallswinkel unabhängig von der Drehung des Fernrohres ist und so lange derselbe bleibt, als die Stellung des Tisches *T* nicht geändert wird.

Zur Bestimmung der Wellenlängen aus den Ablesungen an der Trommel habe ich aus Angström's Atlas die Wellenlängen einer grösseren Anzahl von Fraunhofer'schen Linien entnommen, diese Linien im Spectrum meines Apparates aufgesucht und ihre Abstände von der nächsten Hauptlinie durch die Zahl der Umdrehungen der Mikrometertrommel bestimmt. Durch graphische Interpolation ergaben sich alsdann die Wellenlängen der Farben zwischen den gemessenen Linien. Fig. 6 stellt die Ausführung und die Resultate dieser Messungen für einen kleinen Prismenkörper mit gerader Durchsicht dar, dessen ich mich am häufigsten bedient habe. Derselbe hat zur Erreichung möglichster Intensität normale Endflächen; die Dispersion wurde durch ein Flüssigkeitsprisma aus mit Alkohol versetztem Zimmtsäureäthyläther erzeugt, die Ablenkung durch zwei Flüssigkeitsprismen aus oxydirtem Terpentinöl ($n_D = 1{,}492$) mit entgegengesetzter brechender Kante aufgehoben; diese Flüssigkeiten waren so gewählt, dass die Empfindlichkeiten derselben sich compensirten und demzufolge bei Temperaturen zwischen 18° und 23° die gegenseitigen Entfernungen der Linien im Spectrum unverändert blieben, wenigstens in weit höherem Maasse, als dies bei einer Prismencombination aus Glas und einer Flüssigkeit der Fall ist.

Für die meisten Versuche habe ich Sonnenlicht benutzt, das von einem Silberspiegel in den Spalt des Collimators reflectirt wurde. Das einfallende Licht war also elliptisch polarisirt, die relative Intensität und Phase der beiden Componenten vom Stande der Sonne und der Stellung des Apparates abhängig; daher für die einzelnen Beobachtungen nicht constant, unter Umständen recht verschieden. Bemerkenswerth ist deshalb, dass die relativen Intensitäten und Phasendifferenzen der beiden Componenten des einfallenden elliptischen Lichtes für die Lage der Interferenzstreifen im Spectrum nach der beschriebenen Methode gleichgültig, für die Deutlichkeit und Schärfe aber nicht ohne Einfluss sind. Wesentlich ist z. B. für die Messung der Interferenzstreifen bei senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Lichte (◇Stellung des Ocularnicols) — das bei durchsichtigen Körpern von geringem Brechungsvermögen in der Nähe des Polarisationswinkels ohnehin schon sehr schwach ist —, dass die zu benutzende Componente im einfallenden elliptischen Lichte möglichst gross im Vergleich zu anderen gemacht wird.

Nach der beschriebenen Anordnung der Versuche ist das Fernrohr F auf den Collimatorspalt, also nicht auf die dünne Schicht in der Mitte des Kreises eingestellt. Will man dasselbe auf die Schicht selbst einstellen und gleichzeitig ein reines Spectrum haben — eine Anordnung, die ich bei der Untersuchung des Kupferoxyduls und der stark brechenden Körper häufig gewählt habe —, so wird das Flüssigkeitsprisma, anstatt mit einer ebenen Glasplatte, mit einer achromatischen Linse von kurzer Brennweite geschlossen und in ihrer Brennebene ein kleiner Spalt ganz nahe der Schicht P angebracht. Man erhält so auch bei weit geöffnetem Collimatorspalt S zarte Fraunhofer'sche Linien, da die Lichtstrahlen durch zwei Collimatoren sehr parallel geworden sind.

Wenn die Herstellung dünner Lamellen eines Körpers wegen technischer Schwierigkeiten nicht ausführbar ist, so bleibt die beschriebene Untersuchungsmethode doch anwendbar, indem man als dünne Lamelle die Luftschicht zwischen

einer planparallen Glasplatte (oder der Hypotenusenfläche eines Reflexionsprismas) und einem ebenen Flächenstück des zu untersuchenden Körpers benutzt. Diese Methode, welche in anderer Beziehung der ersteren nachsteht, hat den nicht unerheblichen Vorzug, dass für die Bestimmung der Phasenänderungen die Kenntniss der Brechungsindices nicht nothwendig ist. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Herstellung ebener spiegelnder und reiner Oberflächen; ich werde später bei Beschreibung der einzelnen Substanzen zeigen, wie ebene und reine Flächen solcher Körper, die gerade für die Prüfung der Theorie von Interesse sind, in vollkommenerer Weise als durch Schleifen und Poliren erhalten werden.

Bei Anwendung der beschriebenen Untersuchungsart braucht das ebene Flächenstück nur von geringer Ausdehnung zu sein, $^1/_4$ qcm genügt in den meisten Fällen. Legt man, nach Entfernung der Staubtheilchen, eine planparallele Platte aus Glas auf die geschliffene Fläche des zu untersuchenden Körpers, so findet man meist eine Stelle der letzteren, für welche die Luftschicht, mit freiem Auge bei Wolkenlicht betrachtet, breite farbige Streifen (Fig. 2) zeigt, von denen der mittlere horizontale dunkle Streifen die dünnste Stelle der Luftschicht anzeigt. Durch geringen Druck auf die Glasplatte kann man die Luftschicht, ohne ihre Gestalt wesentlich zu ändern, dünner machen. Hat dieselbe nahezu die gewünschte Dicke und Gestalt angenommen, so befestige ich die obere Platte in der erhaltenen Lage mittelst einer nicht leicht erhärtenden weichen Kittmasse auf der unteren. Dies Verfahren hat sich besser als Schraubenbefestigung bewährt, bei welcher zuweilen die Dicke der Schicht auch durch geringe Temperaturänderungen starke Schwankungen erleidet.

Noch leichter als ein Streifensystem von der Gestalt der Fig. 2 erhält man, wenn man in der angegebenen Weise verfährt, ein Ringsystem, wie Fig. 3; selbst Platten von gewöhnlichem gut geschliffenen Spiegelglase liefern nicht selten an ausgesuchten Stellen ein solches. Erscheint der mittlere dünnste Theil der Luftschicht selbst nur in der Ausdehnung von $^1/_4$ qcm gleichmässig gefärbt, so kann das Präparat unter

Anwendung geeigneter Vorsichtsmaassregeln zu den Messungen verwendet werden.

Hierzu stelle ich zunächst das Plattenpaar auf dem mittleren Tische vertical so auf, dass die Ebene der Luftschicht nahezu durch den auf dem Tische markirten Mittelpunkt geht und die Streifen gleicher Newton'scher Farbe (Fig. 2) horizontal, d. h. senkrecht zum Collimatorspalt liegen (parallel gerichtet würden dieselben, wie leicht einzusehen, nicht brauchbare Resultate geben), und lasse mittelst des Collimators ein vom Heliostatenspiegel reflectirtes Bündel paralleler Lichtstrahlen auffallen. Das an der ersten Fläche der vorderen und das von der zweiten der hinteren Platte reflectirte Lichtbündel wird abgeblendet, indem das Bild des farbigen Ringsystems von einem weissen, vor das Prismensystem aufgestellten Papierschirm aufgefangen wird, welcher einen $^1/_2$ bis 1 mm breiten verticalen Spalt ($a-a$, Fig. 2 u. 3) hat. Den Schirm stellt man so, dass der Spalt den mittleren elliptischen Fleck das Ringsystems (Fig. 3) nahezu halbirt. Hat man ein Streifensystem von der Gestalt der Fig. 2, so kann man mittelst des Spaltes immer dieselbe Stelle der Luftschicht untersuchen. In beiden Fällen erhält man im Fernrohr des Apparates ein Spectrum, das mit gekrümmten Interferenzstreifen (Fig. 4) durchzogen ist, welche ihre Convexität nach dem Violett zu haben. Man stellt die Spitze des Ocularmikrometers stets auf den verticalen, am meisten nach dem Violett zu liegenden Theil des Streifens ein, welcher der dünnsten Stelle der Luftschicht entspricht. — Das beste Kriterium — empfindlicher als die Newton'sche Farbe — dafür, dass die untersuchte Stelle der Schicht an allen Punkten dieselbe Dicke hat, ist das, dass der mittlere Theil der Interferenzstreifen (Fig. 4) immer senkrecht, d. h. parallel den Fraunhofer'schen Linien bleibt, auch wenn man die Schicht um eine horizontale Axe dreht.

3. Spiegelglas.

Das Glas war eine ungefähr 4 mm dicke Platte von gut geschliffenem, in starken Schichten gelblich grün erscheinendem Spiegelglase, das vor 13 Jahren von einer Berliner

Handlung bezogen wurde. An der Kante eines Stückes der Platte wurde eine Fläche angeschliffen, welche mit der einen Fläche ein Prisma bildete, dessen Winkel 56° 6′ 30″ betrug. Aus den Minimalablenkungen ergaben sich die Brechungsindices des Glases:

$$n(B) = 1{,}5269 \qquad n(E) = 1{,}5343$$
$$n(C) = 1{,}5280 \qquad n(F) = 1{,}5373$$
$$n(D) = 1{,}5307 \qquad n(G) = 1{,}5431$$

Schliff und Politur des Glases standen den Planparallelplatten der optischen Institute wenig nach; die beiden Flächen der mehrere Quadratdecimeter grossen Platte waren schwach wellenförmig und bildeten Winkel zwischen 1 und 3 Minuten. An einer ausgesuchten Stelle wurde ein etwa 2 qcm grosses Stück herausgeschnitten und nach Reinigung der Oberflächen auf dem grösseren Theile der staubfrei gemachten Platte unter schwachem Drucke soweit herumgeführt, bis Farbenstreifen von der Gestalt der Fig. 2 erschienen; an dieser Stelle wurde alsdann ein 2 bis 3 qcm grosses Stück herausgeschnitten, mit dem ersteren in der oben beschriebenen Weise vereinigt und die Luftschicht zwischen beiden an der gleichmässig gefärbten dünnsten Stelle untersucht.

Die folgende Tab. I gibt die bei verschiedenen Einfallswinkeln α gemessenen Wellenlängen λ der Interferenzstreifen nebst ihrer Ordnungszahl m und darunter die aus diesen Zahlen nach der Formel:

$$d = \frac{m\lambda}{2\cos\alpha},$$

d. h. unter der Voraussetzung, dass keine Phasenänderung stattfinde, berechnete Dicke d der Luftschicht an, und zwar für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die Winkel sind bis auf 20 Secunden genau, die Temperatur betrug 20° C. Die Einheit von λ und d ist das Milliontelmillimeter.

Tabelle I.

Luftschicht zwischen zwei Platten des Glases (I) bei ∓ Licht.

$\alpha = 13^{\circ}\ 51'$.

λ (m)	619 (12)	571 (13)	531 (14)	497 (15)	465 (16)	436 (17)
d	3825	3822	3828	3836	3831	3817

$\alpha = 50^{\circ}$.

λ (m)	611 (8)	543 (9)	489 (10)	445 (11)
d	3801	3799	3801	3803

$\alpha = 55^{\circ}$.

λ (m)	624 (7)	545 (8)	485 (9)	436 (10)
d	3808	3801	3802	3801

$\alpha = 55^{\circ}\ 30'$.

λ (m)	616 (7)	539 (8)	479 (9)	432 (10)
d	3806	3806	3805	3813

$\alpha = 56^{\circ}$.

λ (m)	609 (7)	532 (8)	473 (9)	426 (10)
d	3812	3803	3803	3804

$\alpha = 56^{\circ}\ 30'$.

λ (m)	600 (7)	527 (8)	467 (9)	420 (10)
d	3805	3818	3804	3803

$\alpha = 57^{\circ}$.

λ (m)	594 (7)	518 (8)	463 (9)	416 (10)
d	3817	3805	3825	3819

$\alpha = 57^{\circ}\ 30'$.

λ (m)	587 (7)	512 (8)	456 (9)	411 (10)
d	3823	3806	3819	3824

$\alpha = 58^{\circ}$.

λ (m)	577 (7)	505 (8)	450 (9)	—
d	3811	3812	3821	—

$\alpha = 59^{\circ}$.

λ (m)	562 (7)	492 (8)	437 (9)	—
d	3819	3821	3818	—

$\alpha = 60^{\circ}$.

λ (m)	545 (7)	477 (8)	424 (9)	—
d	3815	3817	3816	—

Jede der gemessenen Zahlen λ ist das Mittel aus 5 Beobachtungen; für die Dicke d der Luftschicht ergibt die optische Messung in Anbetracht der Mängel des Präparates einen nahezu constanten Werth 3810 mmm; die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; der kleinste Werth ist 3799, der grösste 3836.

Die folgende Tab. II entspricht genau der vorigen Tab. I; sie stellt dieselben Grössen für senkrecht zur Einfalls-

ebene polarisirtes Licht dar. Für Einfallswinkel, kleiner als 55° und grösser als 60° findet keine erhebliche Veränderung in der Lage der Streifen statt, wenn man das Ocularnicol von der ◇Stellung in die ◇Stellung dreht.

Tabelle II.

Luftschicht zwischen den Platten des Glases (I) bei ⊥ Licht.

$\alpha = 55°$.	$\lambda'(m)$	630 (7)	549 (8)	489 (9)	440 (10)
	d'	3844	3830	3836	3835
$\alpha = 55°\ 30'$.	$\lambda'(m)$	624 (7)	545 (8)	484 (9)	436 (10)
	d'	3873	3849	3846	3849
$\alpha = 56°$.	$\lambda'(m)$	622 (7)	541 (8)	481 (9)	—
	d'	3893	3870	3871	—
$\alpha = 56°\ 30'$.	$\lambda'(m)$	—	547 (8)	486 (9)	430 (10)
	d'	—	3964	3962	3896
$\alpha = 57°$.	$\lambda'(m)$	—	564 (8)	499 (9)	—
	d'	—	4142	4123	—
$\alpha = 57°\ 30'$.	$\lambda'(m)$	—	574 (8)	503 (9)	—
	d'	—	4273	4213	—
$\alpha = 58°$.	$\lambda'(m)$	—	568 (8)	498 (9)	—
	d'	—	4287	4229	—
$\alpha = 59°$.	$\lambda'(m)$	—	557 (8)	488 (9)	—
	d'	—	4326	4264	—
$\alpha = 60°$.	$\lambda'(m)$	—	543 (8)	475 (9)	—
	d'	—	4344	4277	—

Die Zahlen d' für die unter der Voraussetzung, dass keine Phasenänderung stattfinde, berechnete Dicke der Luftschicht bieten also für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht in der 6° umfassenden Umgebung des Polarisationswinkels sehr erhebliche Unterschiede, sowohl untereinander, als von den entsprechenden Zahlen für parallel polarisirtes Licht (Tab. I) dar. Aus beiden Tabellen folgt daher, dass die Phasenänderung ganz vorzugsweise für senkrecht zur

Einfallsebene polarisirtes Licht eintritt, während sie für parallel polarisirtes entweder Null oder sehr gering ist. Um letzteres zu entscheiden, habe ich an einem vollkommeneren Präparate die folgenden Versuche angestellt.

4. Planparalleles Glas (II).

Eine quadratische Planparallelplatte mit sehr ebenen Flächen wurde durchschnitten und beide Theile in der oben beschriebenen Weise aufeinander befestigt. Obwohl die Luftschicht zwischen beiden fast homogen gefärbt erschien, wurde doch nur stets ein und dieselbe Stelle derselben gemessen. Die Tabellen III und IV geben die Resultate für parallel, resp. senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die Temperatur war 20° C., alle Zahlen haben dieselbe Bedeutung wie in Tab. I. und II.

Tabelle III.

Luftschicht zwischen planparallelen Glasplatten (II) bei ◇ Licht.

$\alpha = 13^\circ 51'$				
$\lambda(m)$	639 (8)	569 (9)	510 (10)	464 (11)
d	2632	2637	2627	2629
$\alpha = 30^\circ$				
$\lambda(m)$	569 (8)	504 (9)	455 (10)	—
d	2628	2619	2627	—
$\alpha = 50^\circ$				
$\lambda(m)$	565 (6)	483 (7)	—	—
d	2636	2630	—	—
$\alpha = 52^\circ$				
$\lambda(m)$	647 (5)	540 (6)	—	—
d	3627	2636	—	—
$\alpha = 52^\circ 30'$				
$\lambda(m)$	640 (5)	533 (6)	—	—
d	2628	2627	—	—
$\alpha = 55^\circ$				
$\lambda(m)$	604 (5)	502 (6)	432 (7)	—
d	2632	2626	2636	—
$\alpha = 55^\circ 30'$				
$\lambda(m)$	594 (5)	496 (6)	427 (7)	—
d	2622	2627	2638	—

$\alpha = 56^\circ$				
$\lambda(m)$	587 (5)	490 (6)	420 (7)	—
d	2624	2629	2629	—
$\alpha = 56^\circ 30'$				
$\lambda(m)$	579 (5)	483 (6)	—	—
d	2623	2625	—	—
$\alpha = 57^\circ$				
$\lambda(m)$	573 (5)	477 (6)	—	—
d	2630	2626	—	—
$\alpha = 57^\circ 30'$				
$\lambda(m)$	565 (5)	470 (6)	—	—
d	2629	2624	—	—
$\alpha = 58^\circ$				
$\lambda(m)$	557 (5)	465 (6)	—	—
d	2627	2632	—	—
$\alpha = 59^\circ$				
$\lambda(m)$	540 (5)	450 (6)	—	—
d	2621	2627	—	—
$\alpha = 60^\circ$				
$\lambda(m)$	525 (5)	438 (6)	—	—
d	2625	2628	—	—

Tabelle IV.

Luftschicht zwieschen den planparallelen Glasplatten (II) bei ⊥ Licht.

α			
52^0	$\lambda'(m)$	650,5 (5)	545 (6)
	d'	2642	2655
$52^0\,30'$	$\lambda'(m)$	645 (5)	538,5 (6)
	d'	2651	2654
55^0	$\lambda'(m)$	622 (5)	520 (6)
	d'	2711	2719
$55^0\,30'$	$\lambda'(m)$	629 (5)	530 (6)
	d'	2777	2818
$55^0\,40'$	$\lambda'(m)$	—	531 (6)
	d'	—	2831
$55^0\,45'$	$\lambda'(m)$	—	534 (6)
	d'	—	2846
56^0	$\lambda'(m)$	539 (6)	468 (7)
	d'	2892	2929
$56^0\,30'$	$\lambda'(m)$	552 (6)	469 (7)
	d'	3000	2981
57^0	$\lambda'(m)$	553 (6)	466 (7)
	d'	3046	2995
$57^0\,30'$	$\lambda'(m)$	550 (6)	463 (7)
	d'	3071	3016
58^0	$\lambda'(m)$	546 (6)	458 (7)
	d'	3079	3025
59^0	$\lambda'(m)$	533 (6)	447 (7)
	d'	3105	3041
60^0	$\lambda'(m)$	521 (6)	436 (7)
	d'	3126	3052

Aus Tab. III geht hervor, dass für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht für die Dicke d der Luftschicht sich stets derselbe Werth ergibt, welchen Werth auch der Einfallswinkel haben möge. Die kleinen Verschiedenheiten der Zahlen d sind unregelmässig und liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Dagegen zeigt Tab. IV, dass die Zahlen d' zwischen 52^0 und 60^0 die erheblichsten Unterschiede aufweisen. Wir müssen hieraus schliessen, dass nur die Reflection des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes unter Phasenänderung stattfindet, die des parallelen dagegen ohne merkliche Aenderung der Phase vor sich geht.

5. Flussspath.

Zwei ungefähr 4 mm dicke Platten, von Hrn. Mechaniker Hänsch aus ganz wasserhellem Flussspath geschliffen, wurden aufeinander befestigt; die Luftschicht zwischen beiden zeigte

im Apparat keine sehr deutlichen, zur Messung geeigneten Interferenzstreifen, hauptsächlich wohl infolge kleiner Risse im Inneren der anderen Platte. Dieselbe wurde deshalb durch eine Platte des Glases (I) — vom Brechungsindex $n(D) = 1{,}5307$ — ersetzt; die dünne Luftschicht zeigte jetzt bessere Streifen, deren Lage im Spectrum gut zu bestimmen war. Ich habe die Messungen nur für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht ausgeführt, und zwar für drei verschiedene (mit I, II, III bezeichnete) Dicken der Luftschicht. Die folgende Tab. V gibt die beim Einfallswinkel α gemessenen Wellenlängen λ nebst der zugehörigen Ordnungszahl m und die aus der Formel $2d = \lambda \cos \alpha / (m)$ berechnete doppelte Dicke der Luftschicht an.

Tabelle V.

Luftschicht zwischen Glas- und Flussspathplatte bei ≢ Licht.

α	13° 51′	30°	50°	55°	58°	60°	Temp.
I $\lambda(m)$ $2d$	547 (3) 1691	489 (3) 1694	544 (2) 1692	483 (2) 1685	453 (2) 1709	426 (2) 1704	24° C.
II $\lambda(m)$ $2d$	586 (3) 1811	520 (3) 1802	577 (2) 1796	517 (2) 1803	— —	454 (2) 1816	20° C.
III $\lambda(m)$ $2d$	523 (4) 2157	621 (3) 2151 467 (4) 2157	461 (3) 2152	619 (2) 2158	572 (2) 2159	536 (2) 2146	21° C.

Die Zahlen der vorigen 4 Tabellen haben gezeigt, dass parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht ohne Phasenänderung am Glase reflectirt wird; eine jede der drei Reihen in Tab. V beweist, dass die Zurückwerfung dieses Lichtes auch am Flussspath ohne Aenderung der Phase stattfindet. Wurde das Ocularnicol aus der ◇- in die ⬡Stellung gedreht, so rückten bei Einfallswinkeln zwischen 54 und 57° die Interferenzstreifen nach dem violetten Ende des Spectrums (anstatt wie beim Glase nach dem rothen), ein Beweis, dass unsere Flussspathplatte, wie wohl die meisten Varietäten dieses Minerals, negative Reflexion hatten.

6. Jodsilber.

Die dünnen Schichten wurden durch schnelles Jodiren polirter Silberspiegel auf Glas bei Ausschluss wirksamen Lichtes hergestellt. Wenn die letzten Spuren von freiem Jod aus der gebildeten Jodsilberschicht entfernt sind, ist dies Jodsilber nicht mehr lichtempfindlich. Am leichtesten lassen sich homogene Schichten erzeugen, deren Dicke kleiner als zwei Wellenlängen ist; die Herstellung dickerer ist schwieriger, beliebig dicker, wofern sie homogen und von ebenen Flächen begrenzt sein sollen, bei gewöhnlicher Temperatur nicht möglich. Der Grund hiervon ist der, dass die zuerst gebildeten äusseren Schichten der Lamelle, welche von den Dämpfen des Jods durchdrungen werden, durch die später in grösserer Tiefe entstehenden gehoben und schliesslich infolge der geringen Cohäsion, die das AgJ bei gewöhnlicher Temperatur hat, theilweise zertrümmert werden: durch ein gutes Mikroskop lassen sich die Hochebenen, Thäler und Klüfte sehr gut erkennen; dem unbewaffneten Auge erscheinen sie trübe.

Die folgenden Versuche beziehen sich auf zwei Jodsilberschichten, von denen die eine möglichst dick, die andere, soweit dies in Rücksicht auf die Genauigkeit der Messungen zulässig ist, möglichst dünn war. Die erstere, mit Jodsilber (I) bezeichnet, zeigte nach der prismatischen Zerlegung des reflectirten Lichtes fünf dunkle Interferenzstreifen, deren Ordnungszahlen 6, 7, 8, 9, 10 sind; die dünnere, mit (II) bezeichnet, von smaragdgrüner Farbe bei kleineren Einfallswinkeln, nur die Streifen von der Ordnung 3, 4, 5.

Bestimmt wurden für die Schicht (I) die Lagen zweier Streifen, nämlich der beiden (6) und (7); für die Schicht II nur der erste (3).

In den folgenden Tabellen bedeuten wie früher λ die beim Einfallswinkel α für $\mp$ und $\perp$ zur Einfallsebene polarisirtes Licht gemessenen Wellenlängen, d die aus der Formel $2\,d = m\,\lambda/(n \cos \alpha_1)$ berechneten Dicken; in dieser ist m die Ordnungszahl, n der zu λ gehörige Brechungsindex des Jodsilbers, α_1 der mit dem Einfallswinkel α durch die Glei-

chung $\sin \alpha_1 = n \sin \alpha$ zusammenhängende Brechungswinkel. Die Brechungsindices des Jodsilbers sind der früher[1]) von mir mitgetheilten Tafel entnommen.

Tabelle VI$_a$.
Jodsilber (I), zwischen Glas und Luft, im reflectirten Licht.
Streifen $m = 6$.

α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
13°51'	618	618	1726	1726
30°	605	605	1719	1719
50°	586	584	1722	1715
60°	577	569	1717	1693
63°	574	563	1721	1679
64°	573	559	1720	1667
65°	572	554	1718	1656
66°	570,5	550	1715	1634
67°	569	547	1714	1629
68°	569	544,5	1715	1623
70°	567	541	1713	1613

Tabelle VI$_b$.
Jodsilber (I), zwischen Glas und Luft, im reflectirten Licht.
Streifen $m = 7$.

α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
13°51'	540,5	540,5	1715	1715
30°	534	534	1725	1725
50°	520	518	1730	1723
60°	513	508	1731	1705
63°	511	503,5	1730	1692
64°	510	500	1728	1678
65°	508	497	1723	1667
66°	508	494	1721	1656
67°	508	493	1721	1653
68°	507	491	1722	1646
70°	507	489	1723	1640

Tabelle VII.
Jodsilber (II), zwischen Glas und Luft, im reflectirten Licht.
Streifen $m = 3$.

α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
13° 51'	602	602	836	836
30°	590	590	834	834
50°	575	575	840	840
60°	565,5	555	840	818
63°	562	544	838	804
64°	560	538	836	794
65°	560	531	838	784
66°	558	525	836	771
67°	558	519,5	838	763
68°	556	514	836	754
70°	554,5	509	835	744

Obwohl das Jodsilber das Licht sehr stark bricht — seine Brechungsindices liegen zwischen 2,1 und 2,5, so ist doch in den vorigen 3 Tabellen eine Phasenänderung für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht nirgends erkennbar: in jeder sind die Zahlen unter ($2d \mp$) nahezu constant für die verschiedenen Einfallswinkel; ihre geringen Verschie-

1) W. Wernicke, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1876. p. 137.

denheiten lassen nichts Gesetzmässiges erkennen und sind ohne Zweifel Folgen von Ungenauigkeiten in der Messung der nicht sehr scharfen Streifen.

7. Kupferoxydul.

Durch electrolytische Zersetzung alkalischer Kupferlösungen kann man, wie ich früher[1]) gezeigt habe, auf Metallplatten homogene Schichten von Kupferoxydul in beliebiger Dicke erhalten. Von allen Methoden der Herstellung dünner Schichten dürfte diese die vollkommenste sein; denn da man durch Einschaltung eines Galvanometers, eines Rheostaten und hinreichend grosser Widerstände die Stromstärke in der Gewalt hat, so kann man die den Körper bildenden Kräfte vom ersten bis zum letzten Augenblicke constant halten, ist also sicher, dass die Oberfläche der Schicht keine andere Beschaffenheit hat als das Innere. Eine Oberflächenspannung z. B., wie sie bei geschmolzenen und erstarrten Körpern eintreten kann, ist hier ganz ausgeschlossen.

Obwohl die Brechungsexponenten des Kupferoxyduls zwischen 2,6 und 2,9 liegen, und die Absorption nicht ganz unbedeutend ist — Schichten von $^1/_{10}$ mm Dicke lassen nur noch rothes, von $^2/_{10}$ mm kaum noch etwas hindurch —, so findet doch eine bemerkbare Phasenänderung des unter kleinen Einfallswinkeln (nahe Null) reflectirten Lichtes nicht statt. Um dies zu beweisen, brachte ich auf die zu untersuchende Schicht ein Tröpfchen einer Lösung von Kautschuk in Schwefelkohlenstoff, legte auf dieses ein rechteckiges, 5 mm langes und 2 mm breites planparalleles Deckglas und stellte die Platte vor den Spalt des Spectrometers mit der früher[2]) beschriebenen Einrichtung. Die beiden an der Grenze von Cu_2O-Luft und von Cu_2O-Kautschuk-Schwefelkohlenstoff reflectirten Lichtbündel bilden nach der prismatischen Zerlegung zwei übereinander liegende, durch eine scharfe Linie getrennte, Streifensysteme; nicht die geringste gegenseitige Verschiebung der Streifen war bemerkbar. Dasselbe Resultat erhielt ich, als ich statt der stark brechenden Kautschuk-

1) W. Wernicke, Pogg. Ann. **139.** p. 132. 1870.
2) W. Wernicke, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1875. p. 673.

lösung Wasser, Alkohol, Schellacklösung nach einander anwandte. Diese Versuche beweisen, dass die Phase des an der Grenze von Kupferoxydul und einer der genannten 4 Substanzen reflectirten Lichtes bei kleinen Einfallswinkeln dieselbe ist wie an der Grenze von Cu_2O und Luft. — Bei einigen anderen Substanzen jedoch, z. B. aufgeschmolzenem Colophonium, erwärmtem Canadabalsam, nicht ganz reiner, namentlich Lackmus röthender Gelatine, zeigte sich eine Verschiebung der Interferenzstreifen gegen das violette Ende des Spectrums hin, gleich als ob die von diesen Substanzen bedeckte Cu_2O-Schicht ein wenig dünner geworden wäre. Dies letztere ist auch wirklich der Fall; denn durch Digestion mit Cu_2O färben sich jene Substanzen deutlich grün oder bei alkalischer Reaction braun — ein Zeichen, dass Auflösung eingetreten ist.

Um die Untersuchungen der Phasenänderungen des unter beliebigen Einfallswinkeln reflectirten Lichtes möglichst einfach zu gestalten, ist es nothwendig, die dünne Schicht vom Metall zu trennen. Die Trennung ist mir durch folgendes Verfahren gelungen. Ich giesse auf die der horizontal gelegten Metallplatte fest anhaftende Schicht eine frisch bereitete Lösung reiner Gelatine (russischer Hausenblase), sodass dieselbe die Platte gleichmässig bedeckt, und lasse das Lösungsmittel schnell bei gewöhnlicher Temperatur, am besten im Vacuum, verdunsten. Bald kann man die feste Gelatineschicht, nachdem man mit einem scharfen Messer oder durch Biegen der Platte an einer Stelle einen Sprung erzeugt hat, ganz oder grösstentheils vom Metall ablösen. Hierdurch gewinnt man eine Kupferoxydulschicht, welche auf der einen Seite von Luft, auf der anderen von einer dünnen Gelatineschicht begrenzt ist, welche also im durchgehenden wie im reflectirten Lichte, unabhängig von der Metallreflexion, optisch untersucht werden kann. Diese Methode ist allgemein anwendbar auf metallische und nicht metallische Körper; sie ermöglicht überdies — was für die Bestimmung der Reflexionsconstanten von Bedeutung ist —, die Reflexion an derselben Stelle eines Spiegels in Berührung mit Glas und dann in Berührung mit Luft zu messen.

Die Brechungsindices des Cu_2O habe ich ganz ähnlich wie die der dünnen Jodsilberschichten[1]) durch Messung der Lage der Interferenzminima verschieden dicker Lamellen und graphische Interpolation bestimmt. Tab. VIII gibt die Brechungsindices von der Wellenlänge $\lambda = 686$ bis $\lambda = 486$ an, wie sie der die Dispersionscurve des Kupferoxyduls darstellenden Curve in Tafel IV entnommen sind; in dieser bedeuten die Abscissen die Wellenlängen, die Ordinaten die Brechungsindices. Wenngleich der absolute Werth des Brechungsindex wahrscheinlich schon in der dritten Decimale ungenau ist, so habe ich doch die Zahlen auf 4 Stellen angegeben, weil nämlich die Berechnung der Phasenänderungen nicht sowohl vom absoluten Werthe, als vielmehr von dem Quotienten zweier nicht weit auseinander liegender Brechungsexponenten abhängt.

Tabelle VIII.

Brechungsindices des Kupferoxyduls zwischen $\lambda = 686$ und 486.

λ	n	λ	n	λ	n	λ	n
686	2,6640	636	2,6818	586	2,7089	536	2,7637
684	2,6645	634	2,6826	584	2,7105	534	2,7670
682	2,6651	632	2,6835	582	2,7120	532	2,7705
680	2,6657	630	2,6846	580	2,7135	530	2,7742
678	2,6663	628	2,6854	578	2,7152	528	2,7780
676	2,6670	626	2,6862	576	2,7170	526	2,7821
674	2,6676	624	2,6870	574	2,7188	524	2,7860
672	2,6683	622	2,6879	572	2,7205	522	2,7903
670	2,6689	620	2,6888	570	2,7224	520	2,7950
668	2,6696	618	2,6898	568	2,7243	518	2,7999
666	2,6703	616	2,6908	566	2,7263	516	2,8048
664	2,6710	614	2,6919	564	2,7285	514	2,8102
662	2,6717	612	2,6929	562	2,7305	512	2,8162
660	2,6725	610	2,6940	560	2,7326	510	2,8227
658	2,6732	608	2,6950	558	2,7348	508	2,8290
656	2,6739	606	2,6960	556	2,7371	506	2,8352
654	2,6746	604	2,6971	554	2,7395	504	2,8422
652	2,6754	602	2,6982	552	2,7418	502	2,8493
650	2,6761	600	2,6994	550	2,7442	500	2,8570
648	2,6770	598	2,7006	548	2,7467	498	2,8640
646	2,6778	596	2,7019	546	2,7492	496	2,8725
644	2,6786	594	2,7032	544	2,7518	494	2,8818
642	2,6794	592	2,7045	542	2,7547	492	2,8930
640	2,6802	590	2,7060	540	2,7575	490	2,9050
638	2,6810	588	2,7074	538	2,7605	488	2,9170

1) W. Wernicke, Monatsber. der Berl. Acad. 1876. p. 137.

8. Aeussere Reflexion an Cu_2O.

Mit Hülfe der vorigen Tabelle sind die doppelten Dicken $2d$ der Kupferoxydulschichten für die verschiedenen Einfallswinkel α aus der Gleichung $2d = m\lambda / n\cos\alpha_1$ berechnet, nachdem die Wellenlängen für parallel ($\lambda\mp$) und senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht ($\lambda\perp$) gemessen waren. Die Lamellen wurden hierzu mittelst Canadabalsam mit der Gelatineseite auf Glas gekittet und in der Mitte des Tisches des Spectrometers senkrecht zur Ebene der Collimator- und Fernrohraxe aufgestellt. Eine etwa 20 qmm grosse Lamelle, im Folgenden mit Cu_2O (I) bezeichnet, zeigte zwei bei allen Einfallswinkeln zwischen 17^0 und 75^0 deutliche, zur Messung geeignete, Interferenzminima; Tab. IX stellt die Resultate für den weniger brechbaren Streifen ($m = 5$), Tab. X für den folgenden ($m = 6$) dar.

Tabelle IX.

Cu_2O (I) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte.

$m = 5$.

α	$\lambda\mp$	$\lambda\perp$	$2d\mp$	$2d'\perp$
35°18′	636	636	1215	1215
45 18	628,5	628,5	1214	1214
50 18	625	624	1216	1213
55 18	619,5	613	1209	1195
60 18	615	607	1207	1189
65 18	611	599	1205	1177
67 48	610	591	1208	1165
69 18	610	585	1207	1152
70 18	610	583	1209	1147
71 18	611	581	1212	1143
72 18	609	578	1211	1137
73 18	608	575	1208	1128
75 18	607	571	1206	1122

Tabelle X.

Cu_2O (I) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte.

$m = 6$.

α	$\lambda\mp$	$\lambda\perp$	$2d\mp$	$2d'\perp$
35°18′	544	544	1213	1213
45 18	538,5	538,5	1211	1211
50 18	536	535	1212	1208
55 18	533	530	1209	1198
60 18	529	523	1203	1185
65 18	528	520	1206	1181
67 48	527	515	1201	1165
69 18	526	513	1202	1158
70 18	525	512	1201	1150
71 18	524	510	1199	1143
72 18	524	508	1201	1137
73 18	524	507	1202	1134
75 18	523	505	1201	1128

Tab. XI und XII, genau wie die beiden vorigen eingerichtet, geben die entsprechenden Zahlen für zwei Interferenzminima $m = 8$ und $m = 9$ für eine andere, mit (II) bezeichnete Cu_2O-Lamelle.

Tabelle XI.

Cu_2O (II) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte.

$m = 8$.

α	$\lambda \pm$	$\lambda \perp$	$2d \pm$	$2d' \perp$
17° 11'	660	660	2012	2010
25 18	658	658	2013	2013
35 18	655	655	2007	2007
45 18	650	650	2016	2016
50 18	647	646	2018	2015
55 18	643	640	2017	2006
60 18	639	634	2016	1998
65 18	635	626	2013	1981
67 48	633	620	2012	1967
69 18	632	616	2010	1952
70 18	631	612	2009	1938
71 18	629	610	2007	1931
72 18	628	608	2005	1925
73 18	628	605	2004	1916
75 18	626	602	2001	1907

Tabelle XII.

Cu_2O (II) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte.

$m = 9$.

α	$\lambda \pm$	$\lambda \perp$	$2d \pm$	$2d' \perp$
17° 11'	594	594	2006	2006
25 18	591	591	2008	2008
35 18	587	587	1998	1998
45 18	583	583	2006	2006
50 18	581	580	2011	2009
55 18	579	577	2015	2005
60 18	576	573	2015	2001
65 18	574	567	2016	1987
67 48	573	564	2014	1977
69 18	572	561	2010	1965
70 18	571	559	2011	1959
71 18	571	557	2010	1952
72 18	571	555	2009	1944
73 18	570	553	2008	1939
75 18	568	551	2007	1933

9. Innere Reflexion an Kupferoxydul.

Die Untersuchung der inneren Reflexion lässt sich bei Körpern von selbst nur mässigem Absorptionsvermögen nur durch die Methode der dünnen Schichten bewerkstelligen; jede andere versagt hier gänzlich.

Die planparallele Gelatinelamelle L, welche die Cu_2O-Schicht trägt, wurde mittelst Canadabalsam mit der Gelatineseite auf der Hypotenusenfläche eines rechtwinklig gleichschenkligen Crownglasprismas (Fig. 5) vorsichtig so befestigt, dass die neue Hypotenusenfläche von Cu_2O parallel der Hypotenusenfläche des Glases wurde. Ist 2β der Winkel zwischen dem durch die eine Kathetenfläche eintretenden und dem aus der anderen austretenden Strahle, also der am Kreise des Spectrometers gemessene Winkel, r der Winkel zwischen dem Strahle innerhalb des Glases und der Normale der Kathetenfläche, μ der Brechungsindex des Prismas für ein bestimmtes λ, so ist:

$$\sin r = \frac{\sin(\beta - 45^0)}{\mu}$$

und wie leicht (Fig. 5) zu sehen, der Winkel zwischen dem Strahl im Prisma und der Normale der Kupferoxydulschicht, d. h. der Einfallswinkel von Glas in Kupferoxydul:

$$\alpha = 45^0 + r.$$

Ist $\beta < 45^0$, so ist r negativ.

Die Brechungsexponenten des Crownglases, des Canadabalsams und der Gelatine sind durch das Minimum der Ablenkung für verschiedene Linien bestimmt und in Tab. XIII aufgeführt.

Tabelle XIII.

	Brechungsindices					
	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Glasprisma .	1,5125	1,5134	1,5159	1,5191	1,5222	1,5278
Canadabalsam	—	—	1,5259	—	—	1,5420
Gelatine . .	1,5295 (*A*)	—	1,5354	—	1,5440	1,5521

Von den bei der inneren Reflexion in Betracht kommenden Winkeln ist besonders der Austrittswinkel J, d. h. der Winkel zwischen der Normale der Kupferoxydulschicht und dem austretenden Strahle bemerkenswerth, weil er dem Einfallswinkel bei der äusseren Reflexion entspricht; er hängt mit dem Winkel α durch die Gleichung $\sin J = \mu \sin \alpha$ zusammen, weil die Gelatineschicht von parallelen Ebenen begrenzt wird.

Die folgenden 4 Tabellen enthalten in der ersten Columne die am Kreise gemessenen Winkel β, in der zweiten die aus diesen berechneten Austrittswinkel J, in der dritten und vierten die am Ocularmikrometer für beide Lichtarten gemessenen Wellenlängen $\lambda \neq$ und $\lambda \perp$ und in den beiden letzten die daraus berechneten Dicken d der Schicht. — In der zweiten Columne beziehen sich die oberen Zahlen für die Winkel J auf das parallel, die unteren auf das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht; die Unterschiede rühren von der Dispersion des Glasprismas her.

Tab. XIV und XV geben die Zahlen für zwei Interferenzminima $m = 5$ und $m = 6$ einer Cu_2O-Schicht (III), Tab. XVI und XVII für die Streifen $m = 8$, $m = 9$ einer anderen mit (IV) bezeichneten an.

Tabelle XIV.

Cu_2O (III) zwischen Gelatine und Luft (innere Reflexion).

$m = 5.$

β	J	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 11′	43° 32′/32′	628	628	1210	1210
25 18	53 40′/40′	619	617	1206	1200
27 48	57 19′/19′	616	612	1205	1196
29 18	59 37′/37′	614	609	1203	1193
30 18	61 14′/15′	613	607	1206	1192
31 18	62 56′/57′	612	604	1203	1187
32 18	64 44′/46′	610	601	1201	1180
33 18	66 39′/42′	610	595	1205	1171
34 18	68 44′/49′	608	592	1202	1160
35 18	71 0′/7′	607	582	1204	1145
35 48	72 13′/21′	607	581	1206	1138
36 18	73 32′/42′	607	577	1207	1130
37 18	76 33′/48′	607	572	1208	1125
38 18	80 18′/40′	607	569	1209	1118

Tabelle XV.

Cu_2O (III) zwischen Gelatine u Luft (innere Reflexion).

$m = 6.$

β	J	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$
17° 11′	43° 46′	537	537	1205
25 18	54 0	532	530	1203
27 48	57 39	529	527	1201
29 18	59 58	528	525	1201
30 18	61 36′/37′	528	524	1203
31 18	63 21′/22′	527	522	1202
32 18	65 11′/13′	527	521	1204
33 18	67 8′/11′	526	518	1200
34 18	69 13′/19′	526	515	1204
35 18	71 33′/42′	526	512	1206
35 48	72 49′/73 2′	526	511	1207
36 18	74 10′/36′	525	508	1205
37 18	77 17′/36′	523	503	1202
38 18	81 26′/51′	522	501	1198

Tabelle XVI.

Cu_2O (IV) zwischen Gelatine und Luft (innere Reflexion).

$m = 8.$

β	J	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 11′	43° 30′	649	649	2007	2007
25 18	53 38	642	641	2010	2004
27 48	57 14	640	637	2012	2001
30 18	61 10	639	633	2018	1997
32 48	65 38′/39′	637	628	2015	1990
34 18	68 39′/40′	635	622	2019	1974
35 18	70 55′/57′	632	614	2014	1948
35 48	72 8′/11′	630	609	2011	1933
36 18	73 26′/30′	629	607	2007	1928
36 48	74 52′/55′	629	605*	2004	*uns.
37 18	76 26′/29′	627	601	2004	1917
38 18	80 10′/18′	625	598	2001	1905

Tabelle XVII.

Cu_2O (IV) zwischen Gelatine u Luft (innere Reflexion).

$m = 9.$

β	J	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$
17° 11′	43° 38′	583	583	2003
25 18	53 48	578	576	2007
27 48	57 25	577	574	2011
30 18	61 22	576	571	2015
32 48	65 51′/52′	575	568	2017
34 18	68 55′/58′	574	564,5	2021
35 18	71 12′/17′	572	559	2018
35 48	72 27′/33′	571	557	2015
36 18	73 39′/57′	570	554	2013
37 48	75 9′/32′	569	554*	2009
37 18	76 46′/77 1′	568	550	2006
38 18	80 44′/58	567	544	2008

In jeder der vorangehenden 4 Tabellen sind die Zahlen unter $2d\dagger$ nahezu constant, für alle Austrittswinkel J bis zu 81°; die unter $2d\perp$ haben die verschiedensten Werthe. Die Unterschiede von $d\dagger$ und $d\perp$ würden die Phasenunterschiede beider Lichtarten darstellen, wenn für alle äusseren Einfallswinkel J bis zu 81° bei der Reflexion an der Grenze von Cu_2O und Gelatine keine merkliche Differenz der Phasen des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes stattfände. Einem Winkel J von 81° entspricht ein Einfallswinkel α von Glas in Cu_2O von 40° 30′; jedenfalls dürfte also für eine Kupferoxydulschicht, welche beiderseitig von Gelatine begrenzt ist, die Lage der Interferenzstreifen im Spectrum eine Verschiedenheit für beide Lichtarten nicht zeigen, wenn der Einfallswinkel kleiner als 40° 30′ ist. Um dies zu prüfen, habe ich auf die an der Hypotenusenfläche des gleichschenkligen Crownglasprismas befestigte Schicht ein gleiches Prisma mit Canadabalsam aufgesetzt, sodass die Kupferoxydulschicht sich zwischen Gelatine und Canadabalsam befand, welcher bis auf die letzte Decimalstelle mit denen der Gelatine übereinstimmende Brechungsindices hatte.

Die Resultate der Messungen an zwei Interferenzstreifen $m = 4$ und $m = 5$ einer mit (V) bezeichneten Kupferoxydulschicht sind in den folgenden Tabellen XVIII und XIX zusammengestellt.

Tabelle XVIII.

Cu_2O (V) zwischen Gelatine und Canadabalsam. $m = 4$.

β	α	$\lambda\dagger$	$\lambda\perp$	$2d\dagger$	$2d\perp$
17° 12′	27° 2′	685	685	1063	1063
25 18	32 7	674	674	1060	1060
35 18	30 35	660	660	1056	1056
45 18	45 10	649	649	1059	1059
50 18	48 28	644	642	1061	1054
55 18	51 46	637	630	1062	1047
60 18	55 2	630	605	1059	1010
62 48	56 39	628	590	1061	987
65 18	58 13	625	567	1060	952
67 18	59 50	620	551	1056	914
70 18	61 20	616	540	1053	894
75 18	64 34	610	527	1052	871

Tabelle XIX.

Cu_2O (V) zwischen Gelatine und Canadabalsam. $m = 5$.

β	α	$\lambda\dagger$	$\lambda\perp$	$2d\dagger$	$2d\perp$
17° 12′	27° 3′	562	562	1060	1060
25 18	32 8	553	553	1055	1055
35 18	38 35	543	543	1049	1049
45 18	45 10	534	534	1047	1047
50 18	48 28	530	527	1046	1038
55 18	51 56	526	520	1045	1032
60 18	55 1	523	511	1047	1010
62 48	56 38	521	505	1046	986
65 18	58 12	520	496	1048	961
67 48	59 49	518	486	1046	934
70 18	61 18	516	478	1044	915
75 18	64 22	514	474	1047	906

Die Zahlen der ersten 4 Reihen in jeder der beiden vorangehenden Tabellen zeigen, dass für Einfallswinkel α, kleiner als 45° 10′, keine merkliche Phasendifferenz bei der Reflexion an der Grenze von Cu_2O und Gelatine stattfindet. Die Unterschiede in den Grössen $2d \mp$ und $2d \perp$ der früheren 4 Tabellen XIV bis XVII rühren also von der Reflexion an der Luftgrenze her.

Alle Tabellen aber zeigen, dass auch für Kupferoxydul das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht ohne Phasenänderung reflectirt wird, die Reflexion mag an der Grenze von Luft oder Gelatine oder Canadabalsam stattfinden, eine innere oder äussere sein.

10. Bleisesquihydroxyd.

In Pogg. Ann. **139**. p. 132. 1870 u. **141**. p. 109. 1871 habe ich die Reindarstellung und Zusammensetzung einer Gruppe von Körpern beschrieben, welche vorzugsweise für die experimentelle Prüfung der Theorie der Lichtreflection geeignet erscheinen, nämlich die Superhydroxyde des Bleies, Mangans, Kobalts u. s. w. Durch electrolytische Zersetzung bestimmter Lösungen jener Metalle lassen sich homogene Schichten dieser Körper auf Metallplatten erhalten; nach den im Vorigen beschriebenen Methoden können dieselben ohne Schwierigkeit von der Metallplatte getrennt und im durchgehenden Lichte untersucht werden. Die Lichtabsorption ist in allen grösser als im Kupferoxydul, besonders im brechbareren Theile des Spectrums; die Interferenzstreifen, welche man nach der prismatischen Zerlegung des reflectirten Lichtes im Spectrum beobachtet, sind deswegen im Grün nur schwach, im Blau nicht mehr zu erkennen; aus diesem Grunde lassen sich die Brechungsindices für Grün und Blau nicht genau bestimmen.

Ich habe in den oben genannten Arbeiten ferner gezeigt, dass der electrolytische Wasserstoff in die Metalle Platin, Kupfer, Nickel, Neusilber eindringt, und wie man die Menge desselben dadurch bestimmen kann, dass man die Metallplatten in bestimmte Metallauflösungen bringt, welche auf die wasserstofffreien Platten nicht die geringste Wirkung

ausüben, dieselben aber alsbald mit den Newton'schen Farben überziehen, wenn sie mit Wasserstoff bedeckt sind.

Der electrolytische Wasserstoff dringt nicht nur in jene Metalle, sondern auch in andere Substanzen ein und bringt in diesen chemische Wirkungen hervor. Lässt man denselben auf das Superhydroxyd dadurch einwirken, dass man den Strom eines Daniells, mit dessen Zinkcylinder die auf Platin niedergeschlagene Superhydroxydschicht, und dessen Kupfercylinder eine kleine Platin- oder Bleiplatte verbunden ist, durch reines Wasser schickt — oder einen noch schwächeren Strom durch natronhaltiges Wasser —, so wird das schwarze Superhydroxyd bald röthlich gelb, indem der electrolytische Wasserstoff sich mit einem Theile des Sauerstoffs im Superoxyd verbindet und eine neue Bleiverbindung bildet, welche ich Bleisesquihydroxyd nenne. Demselben durch längere Einwirkung oder Verstärkung des Stromes mehr Sauerstoff zu entziehen, ist schwierig, weil es dann sofort metallisches Blei gibt; nur durch besondere Vorsichtsmaassregeln gelingt die weitere Reduction; man erhält dann stets weisses Bleioxydhydrat, niemals wasserfreies gelbes Oxyd.

Diese einfache Methode der Herstellung lässt sich noch weiter vereinfachen:

1. Ist das Bleisuperhydroxyd auf Platin niedergeschlagen, so taucht man die Platinplatte in Wasser und stellt ein Zinkstäbchen hinein, welches das Metall an irgend einer Stelle berührt. In einigen Stunden ist das schwarze Superhydroxyd vollständig in gelbes Sesquihydroxyd verwandelt.

2. Hat man eine Superhydroxydschicht auf Neusilber, so verwandelt sich dieselbe unter Wasser scheinbar von selbst, in Wirklichkeit durch die zwischen Neusilber, Superoxyd und Wasser gebildete Kette, in Sesquihydroxyd.

3. Bei einiger Vorsicht kann man daher (siehe 2) dünne Schichten von reinem Sesquihydroxyd auf Gelatineplatten einfach dadurch erhalten, dass man die Gelatinelösung auf die auf Neusilber (Nickel) niedergeschlagene Schicht des Superhydroxyds giesst, trocknen lässt und, wie vordem beschrieben, abzieht.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, aus dem Bleisuperhydroxyd jene Verbindung zu erhalten, welche stets von constanter Zusammensetzung und überdies beständig ist, so dass man selbst die dünnsten Schichten, welche die Farben erster Ordnung zeigen, Jahre lang unverändert aufbewahren kann. Sie unterscheidet sich vom Superhydroxyd in ihrer Zusammensetzung dadurch, dass sie eine geringe Menge Sauerstoff weniger enthält, in optischer Beziehung aber hauptsächlich durch den für unseren nächsten Zweck günstigen Umstand, dass sie die brechbareren Strahlen in erheblich geringerem Maasse absorbirt. Die Absorptionscurven beider Körper steigen vom Roth zum Violett allmählich und stetig an, die des Superhydroxyds schon ziemlich stark von E, die des Sesquihydroxyds erst von G im Violett.

Die Dispersionscurve des Bleisesquihydroxyds konnte wegen seines geringen Absorptionsvermögens wie die des Silberjodids und Kupferoxyduls ermittelt werden. Als Ausgangspunkt diente der Brechungsindex 1,9614 für die Wellenlänge 589, den ich durch Wägungen homogener Schichten des Superhydroxyds nach der früher beschriebenen Methode für das letztere erhalten hatte. Durch Vergleichung der Interferenzspectra gleich dicker Schichten mit scharfer Trennungslinie zeigt sich, dass die Brechungsexponenten des Sesquihydroxyds für Roth und Gelb nur wenig kleiner als die entsprechenden des Superhydroxyds sind; als wahrscheinlichster Werth für $n(D)$ des Sesquihydroxyds ergab sich 1,9492. Aus dieser Zahl bestimmte ich die Brechungsindices für die anderen Wellenlängen durch Messung der Interferenzstreifen einer grösseren Anzahl verschieden dicker Schichten und Construction der Dispersionscurve I Fig. 7.

Obwohl die letzten Decimalstellen der Zahl 1,9492 unsicher sind, so habe ich doch alle Brechungsindices auf 4 Stellen angegeben, weil die Genauigkeit der Curve dies zulässt und für die Berechnung der Phasenänderungen die Quotienten zweier naheliegender Zahlen mehr von Einfluss sind als die absoluten Werthe derselben.

In Tab. XX sind die Brechungsindices des Bleisesquihydroxyds zwischen $\lambda = 666$ und $\lambda = 476$ zusammengestellt;

die zwischen je zwei in dieser Tabelle aufgeführten Zahlen liegenden können der Curve II in Fig. 7 entnommen werden.

Tabelle XX.

Brechungsindices des Bleisesquihydroxyds.

λ	n	λ	n
666	1,9134	566	1,9632
656	1,9172	556	1,9708
646	1,9212	546	1,9777
636	1,9254	536	1,9853
626	1,9299	526	1,9933
616	1,9347	516	2,0017
606	1,9398	506	2,0106
596	1,9452	496	2,0200
586	1,9509	486	2,0298
576	1,9569	476	2,0402

Bemerkenswerth ist, dass, obwohl der Körper an Metall ebenso reich ist als Kupferoxydul, und obwohl sein specifisches Gewicht nicht kleiner ist, dennoch Brechung und Dispersion der Bleiverbindung so sehr viel geringer sind, während die Stärke und der Gang der Absorption des Lichtes im ganzen sichtbaren Spectrum wenig Verschiedenheiten darbieten.

11. Aeussere Reflexion am Bleisesquihydroxyd.

Die folgenden Tabellen sind genau wie die entsprechenden für das Kupferoxydul eingerichtet; alles was dort über die Bedeutung, Messung und Berechnung der aufgeführten Zahlen gesagt ist, gilt auch hier. Tab. XXI und XXII stellen die Resultate für die beiden Interferenzstreifen $m = 4$ und $m = 5$ einer mit (I) bezeichneten Schicht, Tab. XXIII für den Streifen $m = 4$ einer anderen, mit (II) bezeichneten Schicht von Bleisesquihydroxyd dar.

Tabelle XXI.

Bleisesquihydroxyd (I) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Licht. $m = 4$.

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d \perp$
17° 11'	690	690	1459	1459
25 18	678	678	1460	1460
30 18	671	671	1463	1463
35 18	665,5	665,5	1458	1458
40 18	660	660	1461	1461
45 18	653	653	1463	1463
50 18	647	645	1465	1457
55 18	640	636	1469	1456
57 48	636	631	1469	1449
60 18	632	621	1467	1437
62 18	629,5	604	1466	1398
62 48	627	599	1462	1382
63 3	626	598	1461	1375
64 18	624	586	1466	1355
65 18	623	580	1461	1333

Tabelle XXII.

Bleisesquihydroxyd (I) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Licht. $m = 5$.

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d \perp$
17° 11'	569,5	569,5	1461	1461
25 18	562	562	1465	1465
30 18	558	558	1462	1462
35 18	554	554	1460	1460
40 18	550	550	1464	1464
45 18	546	546	1467	1467
50 18	541	539	1464	1457
55 18	535	533	1468	1457
57 48	532	527	1466	1447
60 18	529	521	1464	1436
62 18	527	511	1460	1407
62 48	526	507	1461	1397
63 3	526	504	1463	1391
64 18	525	496	1460	1367
65 18	523	492	1458	1359

Tabelle XXIII.

Bleisesquihydroxyd (II) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Licht. $m = 4$.

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d \perp$
17° 11'	603	603	1256	1256
25 18	595	595	1260	1260
35 18	588	588	1259	1259
45 18	579	578	1269	1265
50 18	574	571	1267	1259
55 18	569	564	1269	1256
57 48	565	559	1266	1249
60 18	562	551	1265	1234
62 18	560	541	1263	1209
62 48	559	537	1264	1199
63 18	558	535	1266	1194
63 48	558	532	1267	1190
64 18	558	528	1269	1179
65 18	556	524	1268	1171

12. Innere Reflexion an Bleisesquihydroxyd.

In Bezug auf Anordnung und Ausführung der Versuche, Bedeutung und Berechnung der in den folgenden Tabellen aufgeführten Zahlen gilt das, was unter 9 bei der inneren Reflexion am Kupferoxydul gesagt ist. Tab. XXIV stellt die Resultate der Messungen eines Interferenzstreifens $m = 4$

für eine mit (III) bezeichnete Schicht, Tab. XXV für den Streifen $m = 3$ einer mit (IV) bezeichneten, zwischen Gelatine und Canadabalsam befindlichen Schicht dar. In Bezug auf letztere gilt besonders das bei der Erklärung der Tab. XVIII Gesagte.

Tabelle XXIV.

Bleisesquihydroxyd (III) zwischen Gelatine und Luft.

$m = 4.$

β	J	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
17° 11′	43° 38′	582	582	1269	1269
25 18	53 48	573	571	1276	1268
27 48	57 26	567	560	1272	1256
29 18	59 44	565	553	1274	1245
30 18	61 24	563	544	1273	1229
30 48	62 13	562	536	1272	1214
31 18	63 6	562	533	1275	1207
32 18	64 54	560	528	1274	1195
32 48	65 45	558	523	1270	1178
35 18	71 16	554	513	1271	1163
36 18	73 53	553	509	1273	1150

Tabelle XXV.

Bleisesquihydroxyd (IV) zwischen Gelatine und Canadabalsam im reflectirten Licht.

$m = 3.$

β	α	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
17° 12′	27° 2′	665	665	1113	1113
25 18	32 7	648	648	1112	1112
30 18	35 20	636	636	1111	1111
35 18	38 35	625	623	1113	1109
40 18	41 42	614	610	1114	1108
45 18	45 10	605	600	1121	1109
50 18	48 28	595	587	1125	1106
52 48	50 2	589	578	1124	1095
55 18	51 46	584	561	1126	1067
57 48	53 23	578	550	1125	1051
58 18	53 43	575	545	1119	1041
59 18	54 20	574	535	1120	1020
60 18	55 1	572	523	1121	994
65 18	58 13	563	509	1128	975
70 18	61 22	555*	498	1138*	969
		*ung.		*ung.	

Die ersten 4 Horizontalreihen der Tab. XXV zeigen, dass für Einfallswinkel α, kleiner als 38°, das Licht an der Grenze von Bleisesquihydroxyd und Gelatine ohne merklichen Phasenunterschied des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes reflectirt wird. Die Differenzen der Zahlen $2d \neq$ und $2d \perp$ in den Tabellen XXI bis XXIV rühren also nur von den Phasenunterschieden des an der Luftgrenze reflectirten Lichtes her, da zu einem Einfallswinkel $\alpha = 38°$ von Glas (vom Brechungsindex 1,52) in Sesquihydroxyd ein Einfallswinkel J (aus Luft in denselben Körper) von 69° 21′ gehört.

Resultate.

Aus den in den vorangehenden 12 Capiteln beschriebenen Versuchen, welche isotrope Körper von den verschiedensten Brechungsexponenten — von 1,4 (Flussspath) bis 2,9

(Kupferoxydul) — umfassen, ergibt sich eine Anzahl von Folgerungen, von denen ich zunächst die folgenden hervorhebe:

1. Isotrope Körper von geringem Absorptionsvermögen reflectiren das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht unter allen Einfallswinkeln ohne merkliche Aenderung der Phase, die Reflexion mag eine äussere oder innere sein.

2. Die Phase des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes wird allein geändert.

3. Alle Theorien des Lichtes, welche den Sätzen 1 und 2 nicht entsprechen, sind unhaltbar.

Berlin, im Mai 1883.

VII. *Ueber die electrische Leitungsfähigkeit der Mischungen von Wasser und Alkohol;* *von Emanuel Pfeiffer.*

(Aus dem phys. Laboratorium der technischen Hochschule zu München.)

(Hierzu Taf. III Fig. 8—10.)

Eine seit mehreren Monaten in Gang befindliche Experimentaluntersuchung, bei der ich mich mit der Ermittelung der electrischen Leitungsfähigkeiten von sehr schlecht leitenden Electrolyten zu befassen habe, veranlasste mich zur Construction eines Widerstandsgefässes von möglichst kleiner Widerstandscapacität. Der Grund hierzu liegt in dem Umstande, dass ich mich bei den Widerstandsmessungen der bekannten Kohlrausch'schen Messmethode mit alternierenden Strömen bediente, bei der in der Brücke ein Electrodynamometer eingeschaltet ist. Da sich letzteres bekanntlich an Empfindlichkeit mit den Galvanometern nicht messen kann, so tritt bei Messung grösserer Widerstände der Uebelstand ein, dass dieselbe nicht mehr mit der nöthigen Schärfe ausgeführt werden kann. Die folglich wünschenswerthe Verkleinerung der zu ermittelnden Widerstände erreicht man durch Vergrösserung der Capacität des Widerstandsgefässes.

Das von mir benutzte Widerstandsgefäss war in folgen-

der Weise construirt (Fig. 8): Ich nahm 2 Glasröhren von ca. 3 und 3,6 cm äusserer Weite. Das engere Rohr wurde auf eine Länge von 13 cm auf der Aussenseite mit einem Platinblech umhüllt und letzteres durch 3 Platindrähte so fest auf die Röhre gebunden, dass eine Verschiebung oder Durchbiegung des Bleches nicht mehr möglich war. Das weitere Rohr wurde im Inneren ebenfalls auf eine Länge von 13 cm mit einem Platinblech ausgekleidet. Um auch bei ihm eine etwaige Deformation oder Verschiebung unmöglich zu machen, wurde der Durchmesser des Platincylinders dem inneren Durchmesser der Glasröhre so genau als möglich gleich gemacht und dann die zusammenstossenden Seitenkanten des Bleches in der Mitte und an beiden Enden mit Silber gelöthet. Sodann wurden die beiden Glasröhren so ineinander gesteckt, dass die äussere Platinbelegung P_1 der inneren Röhre R_1 und die innere Belegung P der äusseren Röhre R einander genau als concentrische Cylinderflächen gegenüber standen. Die weitere Fertigstellung des Gefässes verdanke ich der Geschicklichkeit des hiesigen Glasbläsers, Hrn. Greiner. Die Röhre R_1 wurde oben geschlossen und unten mit der Röhre R zusammengeschmolzen und eine hier nach unten angesetzte kurze Glasröhre in den schweren Messingfuss F eingekittet, um dem so über 30 cm hohen, schlanken Widerstandsgefäss die nöthige Stabilität zu verschaffen. Die Glasröhre R wurde oben zu einem engeren Hals zusammengezogen und in diesen ein hohler Glasstöpsel G eingeschliffen. Eine kleine Glasglocke H wurde in der aus der Figur ersichtlichen Weise über das geschlossene Gefäss gestülpt, um Staub und andere Verunreinigungen fernzuhalten, die bekanntlich bei manchen schlechtleitenden Electrolyten sehr störend wirken. Die Stromzuleitung geschah durch die eingeschmolzenen Platindrähte D und D_1, welche oberhalb der Einschmelzstelle durch ein Gummiband B straff an die Röhre gedrückt wurden, um erstere zu schützen.

Ich gehe über zur Bestimmung der Widerstandscapacität des eben beschriebenen Gefässes. Unter den von Kohlrausch[1]) empfohlenen, zur Aichung von Gefässen besonders

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 49. 1879.

geeigneten Electrolyten wäre wohl Essigsäure wegen ihres grossen specifischen Leitungswiderstandes am vortheilhaftesten gewesen. Weil ich aber dieselbe nicht in der wünschenswerthen Reinheit besass, so wählte ich als Normallösungen Zinkvitriollösung vom specifischen Gewicht 1,285 und Bittersalzlösung vom specifischen Gewicht 1,187.[1] Mit diesen liess sich aber die Capacität obigen Gefässes nicht direct bestimmen, da in diesem die Widerstände zu gering gewesen wären, um sich genau ermitteln zu lassen. Der Widerstand der Normalzinkvitriollösung wäre z. B. in meinem Gefäss bei 18° ca. 0,07 Q.-E.

Ich musste auf einem Umwege zum Ziele zu kommen suchen; dies geschah in folgender Weise: Es wurden zwei von Kohlrausch[2]) angegebene Widerstandsgefässe von grösserer und kleinerer Capacität in Anwendung gebracht. Die beiden Normallösungen wurden zunächst im ersten Gefäss untersucht; die Capacität desselben ergab sich:

bei Zinkvitriollösung $k = 0{,}001\,114$,
bei Bittersalzlösung $= 0{,}001\,106$,
also im Mittel $= 0{,}001\,110$.

Ich bemerke hierbei nebenher, dass ich vom Zinkvitriol zwei verschiedene Lösungen herstellte. Einmal wurde käuflicher, chemisch reiner Zinkvitriol einigemal umkrystallisirt und dann sofort zur Lösung verwendet, das andere mal wurde er nach den Vorschriften von v. Beetz mit Zinkcarbonat gekocht und ebenfalls umkrystallisirt. Im letzteren Fall erhielt ich für das grosse Gefäss die obige Capacität:

0,001 114,

im ersteren die Capacität: 0,001 110.

Der Unterschied zwischen beiden ist also fast unmerklich, was für die Reinheit der von mir angewandten Substanzen spricht. Der obige Mittelwerth für die Capacität des grossen Gefässes wurde nun dazu verwandt, um die Leitungsfähigkeit einer nicht ganz reinen Essigsäure zu ermitteln; dieselbe war bei 16°:

$$\lambda_{16} = 0{,}000\,000\,155\,2$$

1) l. c. p. 49.
2) l. c. Taf. I. Fig. 2 und 3.

und bei einem späteren Versuche:

$$\lambda_{16} = 0{,}000\,000\,155\,5.$$

Mit Hülfe dieser nun bekannten Leitungsfähigkeit der Essigsäurelösung wurde die Capacität des zweiten, kleineren Gefässes bestimmt und ergab:

$$k_1 = 0{,}000\,016\,03.$$

In diesem Gefäss liess sich nun ein noch schlechter leitender Electrolyt, eine ganz verdünnte Kochsalzlösung untersuchen von der Leitungsfähigkeit:

$$\lambda_{16} = 87{,}71 \times 10^{-10}.$$

Diese Lösung nun wurde zur Ermittelung der Capacität meines Gefässes angewandt, für das ich bei zwei verschiedenen Versuchen fand:

$$k_2 \,.\, 10^{10} = 3305 \text{ und } = 3302, \text{ im Mittel } = 3303.$$

Diese Capacität wurde ein für alle mal mit 10^{10} multiplicirt und sind also auch alle in Zukunft anzuführenden Leitungsfähigkeiten in diesem Verhältniss vergrössert.

Bevor ich zur Angabe der von mir erlangten Resultate gehe, muss ich noch einige Bemerkungen vorausschicken. Die Widerstandsbestimmungen wurden, wie ich bereits eingangs erwähnte, nach der Kohlrausch'schen Methode durchgeführt. Ich hatte ebenso wie bei einer früher in diesen Berichten[1]) erschienenen Abhandlung einen Sinusinductor[2]) und ein Dynamometer[3]), beide von Kohlrausch construirt, in Verwendung. Die Widerstände wurden wie dort mit einer grossen Siemens'schen Brücke bestimmt.

Da ich vielfach mit reinem Wasser zu thun hatte, so wurden die Bleche meines Widerstandsgefässes nicht platinirt, da die Platinirung die Reinhaltung der Electroden erschwert, umsomehr, als bei der beträchtlichen Grösse meiner Electroden die Möglichkeit der Unmerkbarmachung der Polarisation auch ohne dieses Hülfsmittel vorauszusehen war. Inwieweit dies eintraf, illustrire ich am besten durch die nachfolgende kleine Tabelle, in der in der ersten Reihe

---

1) Pfeiffer, Sitzungsber. d. k. b. Akad. d. Wiss. **2.** p. 293. 1884.
2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 292. 1874.
3) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **15.** p. 556. 1882.

verschiedene Tourenzahlen des Inductors, in der zweiten die mit denselben gefundenen Widerstände einer Mischung von Alkohol und Wasser, mit einem Alkoholgehalt von ca. 88 Gewichtsprocenten bei genau constanter Temperatur aufgeführt werden:

Tabelle I.

Tourenzahl pro Sec.	Widerstand in Q.-E.
90	1164,0
103	1163,5
110	1163,4

Bei einer Tourenzahl über 100 sind also die Widerstände von derselben unabhängig, welche Zahl bei meinen Versuchen immer beträchtlich überschritten war.

Bei der bekannten starken Beeinflussung der Leitungsfähigkeit des Wassers durch minimale Verunreinigungen, die sich auch bei den Mischungen von Wasser und Alkohol zeigte, musste ich Vorkehrungen treffen, die mir Gewissheit gaben, dass sich während der einige Wochen dauernden Versuche die Leitungsfähigkeiten der Bestandtheile, aus denen die Mischungen bereitet wurden, nicht merklich geändert habe. Dies geschah, indem Wasser und Alkohol in Gefässen verwendet wurden, in denen sie seit Jahren nur im reinsten Zustand aufbewahrt worden waren. Ich hatte mich durch lange Versuchsreihen überzeugt, dass durch die Aufbewahrung an sich, sowie durch die Manipulationen des Umgiessens u. s. w. die Leitungsfähigkeiten nicht alterirt wurden.

Bei Durchsicht der Litteratur fand ich nur einzelne auf mein Thema bezügliche Angaben.

Zunächst erwähne ich eine Stelle einer Abhandlung Herwig's[1]), in der er gelegentlich die Leitungsfähigkeit von Wasser, Alkohol und zwei Gemischen aus beiden untersucht, aber zu grosse Zahlen erhält.

Saïd Effendi[2]) schätzte sehr approximativ das Verhältniss der Leitungsfähigkeit des Alkohols zu der des Wassers und fand für dasselbe den Werth 0,0049.

---

1) Herwig, Pogg. Ann. **159.** p. 65. 1876.

2) Saïd Effendi, Compt. rend. **68.** p. 1565. 1869.

Nach einer anderen Methode findet Oberbeck[1]) für dieses Verhältniss die Zahl 0,14.

Kohlrausch hat nun in seiner Arbeit „über die electrische Leitungsfähigkeit des Wassers und einiger anderer schlechter Leiter"[2]) einiges Licht in diese widersprechenden Angaben gebracht. Er fand für absoluten Alkohol die Leitungsfähigkeiten 0,3 bis 0,5, für käuflichen absoluten Alkohol 1,8 bis 2,0, was mit den von mir erhaltenen Zahlen, wie aus den späteren Tabellen ersichtlich, gut übereinstimmt. Weiter fand er, dass das Leitungsvermögen von Wasser durch geringen Alkoholzusatz sich von 5,2 auf 5,6 erhöhte, sprach jedoch die Möglichkeit aus, dass die Erhöhung auch von Nebenumständen herrühren könne. In der That stimmt die Beobachtung qualitativ mit den meinigen überein.

Wenn ich nun zur Darstellung meiner Resultate übergehe, so muss ich zunächst auf die Herstellung und Bestimmung der Mischungen eingehen. Unter Procentgehalt ist in Zukunft immer der Gehalt in Gewichtsprocenten verstanden. Der Gehalt der Lösungen an Alkohol wurde aus dem specifischen Gewicht derselben mit Hülfe der Tabellen von Mendelejeff[3]) bestimmt. Die Ermittelung der specifischen Gewichte geschah mittelst eines Pyknometers. Die obenerwähnten Tabellen enthalten das specifische Gewicht der Lösungen bei 15° bezogen auf Wasser von 15° als Einheit. Auf obige Temperatur musste ich meine Wägungen beziehen. Da letztere immer bei nahe 15° ausgeführt wurden, so genügte mir eine annähernde Kenntniss der cubischen Ausdehnung der Lösungen zur Bestimmung der kleinen Correctionsgrösse. Sie wurde ebenfalls aus den Landolt'schen Tabellen[4]) entnommen, indem aus den Zahlen Recknagel's eine Curve über den Verlauf des Ausdehnungscoëfficienten in seiner Abhängigkeit vom Procentgehalt construirt wurde.

Die in den nachfolgenden Tabellen enthaltenen Zahlen für die Leitungsfähigkeit sind aus zwei getrennten Versuchs-

1) Oberbeck, Pogg. Ann. 155. p. 601. 1875.
2) Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergzbd. 8. p. 12. 1876.
3) Landolt u. Börnstein, phys. chem. Tab. p. 151.
4) l. c. p. 63.

reihen combinirt; indem einmal von Wasser zu höheren Gehalten aufwärts, das andere mal vom absoluten Alkohol zu geringeren Gehalten vorgeschritten wurde. Unter absolutem Alkohol verstehe ich den Alkohol, wie wir ihn als völlig rein aus der chemischen Fabrik von Perutz dahier beziehen. Eine specifische Gewichtsbestimmung ergab den Gehalt desselben an Alkohol in Gewichtsprocenten zu 99,28 Proc. Die Leitungsfähigkeit bei 15° war ca. 2,4, während Kohlrausch wohl auch bei Zimmertemperatur 1,8 bis 2,0 findet. Wie ein Blick auf die später zu beschreibenden Figuren zeigt, fällt die Curve der Leitungsfähigkeit mit abnehmendem Wassergehalt schnell ab, und ist also die Differenz durch einen geringen Unterschied der beiden Alkohole im Wassergehalt leicht zu erklären. Da ferner Kohlrausch die Leitungsfähigkeit des wasserfreien Alkohols zu 0,3 bis 0,5 fand, so konnte ich auf die weitere Verfolgung der ganz concentrirten Lösungen verzichten und nehme obigen 99,28procent. Alkohol als Ausgangspunkt für die verdünnteren Lösungen.

Tabelle II.

Δ	p	λ	t	λ_1	t_1
1	0	1,355	0,66	1,975	13,62
0,99605	2,14	1,376	0,46	2,077	14,54
0,99082	5,24	1,400	0,64	2,195	14,40
0,98598	8,50	1,385	0,74	2,174	14,15
0,97895	13,96	1,332	0,78	1,991	11,46
0,96838	22,60	1,190	0,80	2,175	15,84
0,96302	26,52	1,160	0,59	1,940	12,84
0,95582	31,19	1,152	0,63	2,222	16,36
0,92873	45,38	1,256	0,72	2,045	12,61
0,91320	52,49	1,373	0,91	2,410	15,60
0,89102	62,20	1,515	0,53	2,542	15,43
0,89078	62,31	1,579	0,80	2,556	14,82
0,87308	69,85	1,727	0,85	2,724	15,46
0,86526	73,12	1,763	0,67	2,792	15,85
0,85572	77,09	1,938	0,93	2,591	11,13
0,84039	83,37	2,039	0,72	2,920	16,12
0,82945	87,59	2,004	0,73	2,760	14,64
0,81831	91,78	1,965	0,84	2,662	14,74
0,80660	95,94	1,966	1,20	2,574	14,82
0,79656	99,28	1,897	1,03	2,419	15,22

In vorstehender Tabelle II sind die direct erhaltenen Beobachtungsresultate zusammengestellt. Die Columne Δ

enthält die specifischen Gewichte der Lösungen bei 15° bezogen auf Wasser von 15°, die Columne p die Gewichtsprocente, die Columne λ die Leitungsfähigkeiten bei der niedrigeren Temperatur t, die λ_1 dasselbe bei der höheren Temperatur t_1.

Für die meisten obigen Lösungen hatte ich auch noch die Leitungsfähigkeiten für zwei oder drei Zwischentemperaturen bestimmt, und es wurde dabei constatirt, dass die Leitungsfähigkeit nicht genau dem Temperaturzuwachs proportional ist.

Durch folgende Gleichungen wurde dann die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von der Temperatur ermittelt.

$$\lambda_t = \lambda_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$$
$$\lambda_{t_1} = \lambda_0 (1 + \alpha t_1 + \beta t_1^2).$$

Hier sind o, t und t_1 die Temperaturen der Lösungen, λ_0, λ_t und λ_{t_1} die zugehörigen Leitungsfähigkeiten. Hieraus wurden jedesmal die Coëfficienten α und β ermittelt. Weitere beobachtete Leitungsvermögen stimmten mit den hieraus berechneten meist sehr gut überein, wie folgendes Beispiel zeigen möge.

Für den Procentgehalt 91,78 Proc. fand sich:

$$t = 7{,}53 \qquad \lambda_t = 2{,}300$$
$$t_1 = 14{,}74 \qquad \lambda_{t_1} = 2{,}662.$$

In der Nähe von 0° war gefunden $\lambda_{0,84} = 1{,}965$ und hieraus durch lineare Interpolation mit λ_t:

$\lambda_0 = 1{,}925$; daraus ergab sich $\alpha = 0{,}02380$, $\beta = 0{,}000\,149$.

Eine weitere Leitungsfähigkeit ergab sich direct als:

$$\lambda_{10,94} = 2{,}462, \text{ berechnet } = 2{,}461.$$

Ich habe die Zahlen für die Mitteltemperaturen und die Werthe von α und β nicht angegeben, sondern später die Temperaturcoëfficienten nur mit Hülfe der zwei äussersten angegebenen Temperaturen linear berechnet. Der Coëfficient β zeigt wohl wegen seiner Kleinheit und der daraus entspringenden Ungenauigkeit so starke Schwankungen, dass keine Gesetzmässigkeit zu erkennen war. Nur soviel will ich erwähnen: Derselbe ist für mein reines Wasser negativ, geht dann bei ganz schwachem Alkoholgehalt durch o hindurch und ist für alle beobachteten Lösungen positiv.

Während also die Leitungsfähigkeit meines reinen Wassers langsamer, als der Proportionalität mit der Temperaturzunahme entspräche, anwächst, findet bei sämmtlichen alkoholischen Lösungen ein beschleunigtes Wachsthum statt.

Aus obiger Tabelle wurden nun die Leitungsfähigkeiten für genau 0 und 15° berechnet. Dies geschah, wenn die beobachteten Temperaturen nicht zu weit von 0 und 15° ablagen, durch lineare Interpolation, bei grösseren Intervallen wurden die Coëfficienten α und β zur Berechnung herangezogen. In der Tab. III, in welcher die Columne p wieder die Procentgehalte bezeichnet, sind die Ergebnisse zusammengestellt. Die Columne $\Delta\lambda$ enthält die mittlere Zunahme des Leitungsvermögens pro Grad innerhalb der beobachteten Grenzen. In der Columne α ist der Temperaturcoëfficient enthalten, wie er aus den 2 Grenztemperaturen t und 0° durch die Gleichung folgt:

$$\lambda_t = \lambda_0 (1 + \alpha_0 t).$$

α_0 ist also die mittlere Zunahme der Leitungsfähigkeit pro Grad zwischen 0 und 15° dividirt durch λ_0.

Tabelle III.

p	λ_0	λ_{15}	$\Delta\lambda$	α_0
0	1,323	2,025	0,0478	0,0361
2,14	1,352	2,100	0,0499	0,0369
5,24	1,363	2,230	0,0577	0,0423
8,50	1,341	2,224	0,0588	0,0438
13,96	1,284	2,209	0,0617	0,0481
22,60	1,138	2,120	0,0655	0,0576
26,52	1,122	2,078	0,0638	0,0569
31,19	1,109	2,129	0,0680	0,0613
45,38	1,208	2,224	0,0664	0,0550
52,49	1,309	2,368	0,0706	0,0539
62,20	1,478	2,512	0,0689	0,0466
62,31	1,523	2,568	0,0697	0,0475
69,85	1,669	2,692	0,0682	0,0409
73,12	1,718	2,734	0,0678	0,0395
77,09	1,879	2,839	0,0640	0,0341
83,37	1,998	2,856	0,0572	0,0286
87,59	1,964	2,779	0,0543	0,0276
91,78	1,923	2,675	0,0501	0,0261
95,94	1,914	2,582	0,0446	0,0233
99,28	1,859	2,411	0,0368	0,0198

In Fig. 9 sind auf Grund dieser Tabelle 2 Curven construirt, die die Leitungsfähigkeiten λ_0 und λ_{15} als Function des Alkoholgehaltes der Lösung darstellen. Dieselben haben den gleichen eigenthümlichen Verlauf, dass sie zwei Maxima und ein Minimum besitzen. In Fig. 10 ist ebenso die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten α_0 vom Alkoholgehalt graphisch dargestellt. Letztere Curve zeigt im Gegensatz zu den beiden ersten eine grosse Einfachheit, indem sie in der Nähe von 30 Proc. ein Maximum hat, das mit dem Minimum der beiden Curven für die Leitungsfähigkeit zusammenzufallen scheint. — Dieselbe Coincidenz des Minimums der Leitungsfähigkeit mit dem Maximum des Temperaturcoëfficienten fand auch Kohlrausch[1]) für Schwefelsäure.

Zum Zwecke der weiteren Discussion der vorliegenden Thatsachen möchte ich vorausschicken, dass in neuerer Zeit bekanntlich vielfach die electrische Leitungsfähigkeit mit der Reibung in Beziehung gebracht worden ist, welche bei der durch den Strom hervorgebrachten gegenseitigen Verschiebung der Theile des Electrolyten auftritt. Von G. Wiedemann[2]) wurde zuerst eine derartige Beziehung aufgestellt. Für einige wässerige Salzlösungen fand er innerhalb gewisser Grenzen die Beziehung bestätigt, dass die Leitungsfähigkeit dem Salzgehalt der Lösung p direct und dem Reibungscoëfficienten η verkehrt proportional ist. Später hat sich insbesondere Grotrian[3]) mit dem Zusammenhang zwischen Leitungsfähigkeit und Reibungscoëfficienten befasst und namentlich die Analogie zwischen dem Verlauf der Temperaturcoëfficienten beider Grössen gezeigt. Kohlrausch[4]) wies auf die Wichtigkeit der verdünnten Lösungen hin, bei denen sich die mechanischen Vorgänge am einfachsten und übersichtlichsten gestalten. Schliesslich möchte ich noch der Arbeit von C. Stephan[5]) Erwähnung thun, der eine Reihe

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. bair. Acad. d. Wiss. 1875. p. 294.
2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **99.** p. 228. 1856.
3) Grotrian, Pogg. Ann. **157.** p. 130, 237. 1876 u. Pogg. Ann. **160.** p. 238. 1877.
4) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 151. 1879.
5) C. Stephan, Wied. Ann. **17.** p. 673. 1882.

verdünnter Salzlösungen hinsichtlich obiger 2 Grössen untersucht und dabei als Lösungsmittel Mischungen aus Wasser und Alkohol benutzt. Er findet folgende Beziehung: Wenn er Leitungsfähigkeit und Reibungscoëfficient einer verdünnten alkoholisch-wässerigen Lösung bei constanter Temperatur mit λ und η, die gleichen Grössen für wässerige Lösung mit Λ und H bezeichnet, dann nähert sich der Ausdruck:

$$q = \frac{\Lambda H}{\lambda . \eta}$$

mit zunehmender Verdünnung einer Constanten, die von dem gelösten Salz unabhängig ist und nur in Beziehung steht zum Alkoholgehalt der Lösung. Die Constante q ist bis zum Maximum der inneren Reibung (bei 46 Gewichtsprocenten) der Mischungen von Wasser und Alkohol sehr nahe $= 1$; wird dann mit zunehmendem Alkoholgehalt grösser und grösser. Bei den wasserreicheren Lösungen bis herauf zum Gehalt maximaler, innerer Reibung ist also:

$$\lambda = \frac{c}{\eta}, \tag{1}$$

oder: bei constanter Temperatur sind unter obiger Bedingung Leitungsfähigkeit und Reibungscoëfficient einander verkehrt proportional. Diese Gleichung möchte ich nun auf den mir vorliegenden Fall anwenden.

Es ist bekannt, dass die Leitungsfähigkeit sehr reinen Wassers der in demselben enthaltenen Verunreinigung nahe proportional ist. Unter Verunreinigung verstehe ich etwa die Zahl der in 100 g Wasser enthaltenen, electrolysirbaren Molecüle und bezeichne sie mit a. Falls obige Proportionalität genau stattfindet, ist Wasser ein Isolator, was wohl ziemlich viel Wahrscheinlichkeit hat. Ich will nun für einen Augenblick annehmen, dass auch die Mischungen von Wasser und Alkohol Isolatoren sind, und dass auch hier die Leitungsfähigkeit proportional der Verunreinigung zunimmt, was sich bei meinen Versuchen nahe bestätigte. Dann kann ich den obigen Satz, der sich auf den Fall verdünnter Lösungen bezieht, auch bei meinen Lösungen annehmen. Bezeichne ich analog

der Bedeutung der Zahl a für reines Wasser mit b die Verunreinigung des von mir angewandten Alkohols, dann ist die Verunreinigung einer Mischung von p Gewichtsprocenten Alkohol:

$$= \frac{a(100-p)}{100} + \frac{b \cdot p}{100} = a + p \cdot \frac{b-a}{100}.$$

Dieser Ausdruck ist der obigen Beziehung (1) noch als Factor hinzuzufügen, um auch der Grösse der Verunreinigung Rechnung zu tragen.

Dann erhalte ich:

$$\lambda = \frac{c_1(1+c_2 p)}{\eta} \quad \text{oder} \quad \lambda \cdot \eta = c_1(1+c_2 p).$$

Mit Worten: Falls obige Annahmen richtig sind, dann muss, wenn ich für eine Reihe von Mischungen die Producte $\lambda \cdot \eta$ bei constanter Temperatur bilde und dieselben in ein Coordinatennetz als Ordinaten mit p als Abscissen eintrage, innerhalb der Gehalte 0° und 46 Proc. eine Gerade entstehen. Die Möglichkeit, diese Curve zu construiren, liegt nun in der That für die Temperatur 10° vor, für welche Poiseuille[1]) die Reibungscoëfficienten einer Anzahl Mischungen von Wasser und Alkohol bestimmt hat. Der Gang der Reibungscoëfficienten ist ein einfacher: bei 46° Gewichtsproc., dem Maximum der Contraction, tritt auch ein Maximum der inneren Reibung ein, von hier aus nimmt dieselbe nach geringeren und stärkeren Concentrationsgraden stetig ab. In Fig. 10 ist die Curve mit der Bezeichnung $\lambda \cdot \eta$ gezeichnet, um zu zeigen, dass sie erheblich von einer Geraden abweicht.

Schon diese Thatsache deutet darauf hin, dass die Annahme, auf die wir bei obiger Betrachtung fussten, nicht richtig ist, nämlich, dass die Mischungen von Wasser und Alkohol Isolatoren sind.

Dass es in der That speciell die Mischung beider Flüssigkeiten ist, die die Leitungsfähigkeit modificirt, sieht man deutlich, wenn man für die Alkoholgehalte, die den drei singulären Punkten der Leitungsfähigkeitscurve entsprechen, ausrechnet, in welchem Zahlenverhältniss die Wasser- und

1) Poiseuille, Pogg. Ann. 58. p. 437. 1843.

Alkoholmolecüle zu einander stehen. Für das erste Maximum lässt sich wegen der starken Verdünnung ein bestimmtes Zahlenverhältniss nicht angeben. Das Minimum fällt ungefähr auf 30 Proc. Ziemlich genau auf die Stelle fällt der Gehalt einer Mischung aus einem Molecül Alkohol und 6 Molecülen Wasser, nämlich auf 29,9 Proc. Noch auffallender ist das Zusammentreffen des zweiten Maximums mit einem einfachen molecularen Mischungsverhältniss. Zufällig fällt eine direct untersuchte Lösung von 83,4 Proc. mit dem Maximum der Leitungsfähigkeit zusammen und fast auf die gleiche Zahl, nämlich 83,6 Proc., fällt das einfache Mischungsverhältniss von einem Molecül Wasser auf 2 Molecüle Alkohol. Besonders dieses letztere Zusammentreffen halte ich für bedeutsam, es weist mit ziemlicher Sicherheit auf die Thatsache hin, dass wir es bei den Mischungen von Wasser und Alkohol mit Hydratbildungen zu thun haben, also mit wirklichen chemischen Verbindungen, die theils eine grössere, theils eine kleinere Leitungsfähigkeit besitzen, als die Constituenten. Das Minimum der Leitungsfähigkeit λ_0 bei 30 Proc. liegt nämlich weit tiefer als die Leitungsfähigkeiten meines Wassers und meines Alkohols.

Dass wir es in vorliegendem Fall mit wesentlich anderen Erscheinungen, als bei gewöhnlichen Electrolyten zu thun haben, ergibt sich aus folgendem, hierher gehörigem Umstande. Bei gewöhnlichen Electrolyten, etwa bei wässerigen Salzlösungen, welche Maxima des Leitungsvermögens bei bestimmtem Gehalte zeigen, rücken die Maxima mit wachsender Temperatur nach höheren Gehalten fort, in unserem Falle aber coincidiren die Maxima und Minima bei 0 und 15° ziemlich scharf und sind also an den speciellen Gehalt gebunden.

Ich will schliesslich noch einen Punkt berühren, nämlich den von Grotrian in seiner oben citirten Arbeit gefundenen Parallelismus zwischen dem Temperaturcoëfficienten der Fluidität (reciproker Werth des Reibungscoëfficienten) und Leitungsfähigkeit. Zu einem Vergleich stehen mir nur 3 Zahlen aus der ebenfalls oben citirten Abhandlung von C. Stephan zur Verfügung. Ich stelle in folgender Tabelle

dieselben mit den aus meinen Versuchen sich ergebenden Temperaturcoëfficienten derselben Lösungen zusammen.

Tabelle IV.

Procent-gehalt	$\frac{\Delta f_{15}}{f_{10}}$	$\frac{\Delta \lambda_{15}}{\lambda_{10}}$
35,1	0,0408	0,0377
49,0	0,0403	0,0355
70,0	0,0380	0,0290

Man erkennt allerdings qualitativ einen Parallelismus in beiden Reihen und eine Uebereinstimmung in der Grössenordnung, allein zu einem genaueren Zusammenhalt beider Grössen wären ausführlichere Fluiditätsbestimmungen nöthig.

VIII. *Ueber das electrische Leitungsvermögen und den Temperaturcoëfficienten des festen Quecksilbers; von C. L. Weber.*

(Aus dem phys. Laboratorium der technischen Hochschule zu München.)

Die umfassenden Untersuchungen, welche A. Matthiessen vor nahezu 25 Jahren über das Leitungsvermögen der Metalle und ihrer Legirungen durchgeführt hat, ergaben als Resultat, dass sich die Metalle in 2 Gruppen ordnen lassen, sodass die der ersten Gruppe, wenn unter sich legirt, die Electricität im Verhältniss ihrer relativen Volumina leiten, während die der zweiten Gruppe, wenn unter sich oder mit Metallen der ersten Gruppe legirt, eine Leitungsfähigkeit zeigen, welche stets kleiner ist als die, welche sich aus dem Verhältniss ihrer Bestandtheile berechnen lässt.[1]

Unter diese Eintheilung fügten sich alle von Matthiessen untersuchten Legirungen mit Ausnahme derjenigen des Quecksilbers. W. Siemens[2]) versuchte, diese Abweichung der Quecksilberlegirungen dadurch zu erklären, dass er annahm, es sei ihre Leitungsfähigkeit gleich der

1) Matthiessen, Pogg. Ann. **110.** p. 190. 1860.

2) W. Siemens, Pogg. Ann. **113.** p. 96. 1861.

mittleren Leitungsfähigkeit ihrer Bestandtheile — beide Bestandtheile in flüssigem Zustand gedacht; und Sabine[1]) hat auf Grund dieser Annahme aus den beobachteten Leitungsfähigkeiten der flüssigen Amalgame die der Metalle in flüssigem Zustande berechnet. Allein die so gefundenen Zahlen wurden durch directe Beobachtungen nicht bestätigt, sodass jene Annahme, wie Matthiessen gezeigt hat[2]), nicht genügt, um das eigenthümliche Verhalten der Quecksilberlegirungen zu erklären. Vielmehr sah sich Matthiessen genöthigt, das Quecksilber als Repräsentant einer dritten ganz besonderen Gruppe von Metallen hinzustellen.[3])

Es möchte demnach den Anschein gewinnen, als ob das Quecksilber überhaupt in Bezug auf sein Leitungsvermögen den anderen Metallen gegenüber eine exceptionelle Stellung einnähme, als ob sein abweichendes Verhalten nicht durch den flüssigen Aggregatzustand allein erklärt werden könnte. Hierauf bezügliche Versuche scheinen seit jener Zeit nicht mehr aufgenommen worden zu sein. Wenigstens besitzen wir keinerlei Angaben darüber, ob das galvanische Verhalten des Quecksilbers in fester Form sich dem der übrigen Metalle nähert, ob ihm z. B. ein ähnlicher Temperaturcoëfficient zukommt, und auch die Beobachtungen über das Leitungsvermögen der bei gewöhnlicher Temperatur festen Metalle in geschmolzenem Zustande sind so spärlich, dass es unmöglich ist, aus ihnen entsprechende Anhaltspunkte zu gewinnen.

Da aber doch jener Frage eine gewisse Bedeutung nicht abzusprechen ist, namentlich im Hinblick auf die Beziehungen zwischen galvanischer Leitungsfähigkeit und anderen physikalischen Eigenschaften der Metalle, so möchte ich im Nachstehenden einige Versuche bekannt machen, die das galvanische Verhalten des Quecksilbers in festem Zustande betreffen.

Ich wurde bei der Ausführung derselben dadurch unterstützt, dass mir der Vorstand unseres Laboratoriums, Hr.

1) Sabine, Phil. Mag. 1862. p. 455.
2) Matthiessen u. Vogt, Pogg. Ann. **116.** p. 369. 1862.
3) Matthiessen, Pogg. Ann. **114.** p. 317. 1861.

Prof. Dr. v. Beetz, eine grössere Menge flüssiger Kohlensäure (aus der Fabrik der Actiengesellschaft für Kohlensäureindustrie, Berlin) zur Verfügung stellte. Ich gestatte mir, demselben hierfür, sowie für seine fortwährende freundlichste Förderung meiner Arbeiten meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Das Quecksilber wurde in U-förmigen Capillarröhren untersucht, an deren Enden weitere Glasröhren von ca 10 mm Durchmesser angeschmolzen waren. Um auf der ganzen Länge des Quecksilberfadens möglichst gleiche Temperatur zu haben, und um nicht allzugrosse Mengen Kohlensäure auf einmal zu verbrauchen, durfte man die Capillare nicht zu lang nehmen; andererseits zeigte sich, dass bei Verwendung sehr enger Capillaren das Quecksilber beim Erstarren Risse und Unterbrechungen bekam. Ich wählte schliesslich Röhren von ca. 180 mm Länge und 1 mm Durchmesser im capillaren Theil. Der zu messende Widerstand war infolge dessen sehr klein (bis zu 0,02 Ohm). Von zwei ineinander geschobenen Cylindergläsern enthielt das innere Aether in welchen die U-Röhre eingetaucht war, das äussere einige Tropfen concentrirter Schwefelsäure oder ebenfalls etwas Aether, um das Beschlagen der Glaswände mit Reif zu vermeiden; man musste nämlich hindurchsehen können, um zu beurtheilen, ob der Quecksilberfaden beim Erstarren nicht gerissen war; denn auch bei den 1 mm weiten Capillaren kam dies noch vor, wenn man die Temperatur zu rasch erniedrigte. Daher durfte man die feste Kohlensäure nur nach und nach in den Aether eintragen, sodass die Temperatur allmählich unter den Gefrierpunkt des Quecksilbers sank. Zur Temperaturmessung dienten Alkoholthermometer, deren Röhren calibrirt waren, der Werth eines Scalentheiles war durch Vergleichung mit einem Geissler'schen Quecksilberthermometer in der Nähe von 0° ermittelt.

War eine hinreichend tiefe Temperatur erreicht, so wurde mit dem Hinzufügen weiterer Kohlensäure innegehalten und, während die Temperatur des Aetherkohlensäuregemisches wieder stieg, wurden die Widerstandsmessungen vorgenommen.

Die fortwährend sich entwickelnden und im Aether aufsteigenden Kohlensäurebläschen hielten denselben in steter Wallung, sodass ein Rühren unnöthig war.

Man hatte es also mit sehr kleinen Widerständen zu thun und war genöthigt, rasch zu arbeiten. Dementsprechend benutzte ich zur Widerstandsmessung eine Thomson'sche Brückencombination.

4 Zweige derselben bestanden aus 2 Rollen von je 10 Ohm und zwei solchen von je 100 Ohm Widerstand; als Vergleichswiderstand diente ein ausgespannter Neusilberdraht mit 2 Schleifcontacten. Das Spiegelgalvanometer war stark astasirt.

Die folgende Tab. I gibt eine so erhaltene Beobachtungsreihe.

Tabelle I.

Temp.	W in Ohm	Temp.	W in Ohm	Temp.	W in Ohm
−55,3	0,02802	−45,5	0,02970	−30,8	0,13001
−53,9	2823	−43,9	2994	−18,5	13156
−53,0	2843	−42,4	3021	− 5,6	13300
−51,5	2863	−41,0	3043	± 0,0	13372
−50,0	2892	−39,4	3147	+15,8	13576
−48,8	2912	beginnende Schmelzung		+45,1	13949
−47,0	2941	−37,3	5362		

Eine graphische Prüfung der Zahlen ergibt, dass schon bei −39,4° eine beginnende Schmelzung eintrat, der Widerstand steigt schnell auf den dem flüssigen Quecksilber zukommenden Werth, welcher viermal so gross ist, als der Widerstand des festen Quecksilbers beim Schmelzpunkt. Die ersten 11 Beobachtungen gestatten die Bestimmung des Temperaturcoëfficienten für das feste Quecksilber. Nimmt man an, dass der Widerstand desselben bei 2 Temperaturen T und t gegeben sei durch die einfache Formel:

$$W = w_0 (1 + \alpha T) \quad \text{und} \quad w = w_0 (1 + \alpha t),$$

so erhält man:

$$\alpha = \frac{W - w}{w T - W t}.$$

Durch Combination von je 2 der 11 Zahlen, z. B. (1) mit (7); (2) mit (8) etc. ergeben sich für α die Werthe:

Temperaturcoëfficienten des festen	des flüssigen Hg	
0,004 513	zw. −30 u. ± 0°	0,000 901
4 637	−18 u. +15	932
4 467		
4 634	−5,6 u. +45	955
4 494		
Mittel: 0,004 549	Mittel:	0,000 927

Der Vollständigkeit wegen, und um zugleich ein Urtheil über den Werth der Beobachtungen zu haben, wurden die Messungen am flüssigen Hg noch bis null Grad und darüber fortgesetzt. Es ergaben sich die in der zweiten Spalte angegebenen Temperaturcoëfficienten, nämlich 0,000 927 als mittlerer Temperaturcoëfficient zwischen -30 und $+45^0$. Die Uebereinstimmung dieser für flüssiges Quecksilber geltenden Zahl mit den von Matthiessen, Siemens, Rink, Lenz und Retzoff u. a. gegebenen Werthen ist ein Beweis für die Zuverlässigkeit auch der am festen Hg angestellten Messungen.

Mit Hülfe der obigen Formeln findet sich dann auch der Widerstand des festen Hg berechnet für 0^0; dividirt man denselben durch den beobachteten des flüssigen bei 0^0, so ergibt sich für den specifischen Widerstand des festen Quecksilbers für 0^0 berechnet:

$s_0 = 0{,}2799$ oder für sein Leitungsvermögen
$\lambda_0 = 3{,}572$.

Niedrigere Temperaturen als -55^0 wurden zwar wiederholt mit dem Aetherkohlensäuregemisch erzielt, dieselben waren aber so rasch vorübergehend, dass brauchbare Messungen nicht angestellt werden konnten.

Das bei diesen und ähnlich verlaufenden Beobachtungsreihen benutzte Alkoholthermometer hatte ein ziemlich grosses Thermometergefäss, es war infolge dessen die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass bei dem raschen Steigen der Temperatur das Thermometer mit seinen Angaben zurückblieb und zu tiefe Temperaturen zeigte. Um hierüber vollständig sicher zu sein, fertigte ich noch ein zweites Alkoholthermometer an, dessen Kugel aus sehr dünnwandigem Glas nur

5 mm Durchmesser hatte, das Thermometerrohr war ausserordentlich eng.

Die folgende Tabelle gibt eine Versuchsreihe, die mit diesem Alkoholthermometer erhalten wurde.

Tabelle II.

Temp.	W in Ohm	Temp.	W in Ohm		Temperaturcoëfficient
−57,2	0,02455	−47,5	0,02578		0,003 992
57,0	2457	46,8	2585		4 036
55,9	2472	45,7	2600		3 970
54,4	2491	44,9	2612		3 884
53,0	2503	43,7	2630		4 311
52,3	2518	42,6	2648		4 000
51,3	2525	42,3	2652	Beginn der Schmelzung	4 468
50,0	2547	38,1	3300		4 226
49,0	2560	35,8	0,10885		
48,3	2568	±0,0	0,11231		Mittel 0,004 111

Spec. Widerstand des festen Hg berechnet für 0°:

$$s_0 = 0,2853$$

Leitungsvermögen $\lambda_0 = 3,505.$

Wie aus den beiden Tabellen zu ersehen ist und aus einer graphischen Darstellung der beobachteten Widerstände noch deutlicher hervorgeht, findet beim Schmelzpunkt des Hg kein plötzlicher Sprung im Widerstand statt, es tritt blos ein allerdings schnelles Steigen ein, sodass man noch mehrere Beobachtungen machen konnte, ehe der Widerstand des flüssigen Metalls erreicht war. Man darf jedoch hieraus nicht den Schluss ziehen, dass das Quecksilber durch einen Zustand der Erweichung hindurch von der festen in die flüssige Form übergehe; es ist viel wahrscheinlicher, dass die kupfernen Zuleitungsdrähte eine erhebliche Wärmezufuhr von aussen vermittelten, sodass der Schmelzprocess an den Enden derselben begonnen und sich von da durch die ganze Länge der Capillare fortgeflanzt hat.

Hieraus erklärt sich auch der Umstand, dass der beginnende Schmelzprocess, wie er sich durch das rasche Steigen des Widerstandes bemerkbar macht, nicht genau bei derselben Temperatur eintrat; die Besorgniss betreffs des zuerst verwendeten Thermometers erweist sich aus einer Vergleichung der beiden Versuchsreihen als unbegründet, es

zeigt sogar das zweite Thermometer mit kleinerer Kugel beim Beginn des Schmelzens eine etwas niedrigere Temperatur als das erste.

Stellen wir die Resultate beider Beobachtungen zusammen, so sind dieselben in folgenden Zahlen enthalten.

Es ergibt sich für den Temperaturcoëfficienten des festen Quecksilbers

aus Versuch I:	$\alpha = 0{,}00455$
„ „ II:	$\alpha = 0{,}00411$
im Mittel	$\alpha = 0{,}00433$

für den specifischen Widerstand, resp. das Leitungsvermögen des festen Quecksilbers berechnet für 0°:

Versuch I:	$s_0 = 0{,}2799$	$\lambda_0 = 3{,}572$
„ II:	$s_0 = 0{,}2853$	$\lambda_0 = 3{,}505$
im Mittel	$s_0 = 0{,}2826$	$\lambda_0 = 3{,}538$

Die Uebereinstimmung ist grösser, als man bei den obwaltenden Schwierigkeiten erwarten konnte, wenn nämlich in Betracht gezogen wird, dass der ganze zu messende Widerstand den Betrag von einigen Hundertel Ohm nicht überstieg, dass der Temperaturcoëfficient innerhalb eines Intervalles von nur 15° zu bestimmen war, dass endlich nur ganz einfache Hülfsmittel zur Verwendung kamen.

Es ergibt sich aus den angeführten Zahlen folgendes:

1) Das Quecksilber erfährt beim Festwerden eine bedeutende Erhöhung seiner Leitungsfähigkeit, dieselbe ist für das feste Metall beim Schmelzpunkt etwa viermal so gross, als für das flüssige unmittelbar vor dem Erstarren. Bezieht man beide Werthe auf 0°, so erhält man für das Leitungsvermögen des festen Quecksilbers die Zahl 3,5.

2) Der Temperaturcoëfficient des festen Quecksilbers nähert sich dem der übrigen festen Metalle und wird demselben vermuthlich gleich werden, wenn man sich hinreichend weit vom Schmelzpunkt nach abwärts entfernt.

Es ist zu vermuthen, dass dieser grosse Unterschied in den Leitungsfähigkeiten des festen und des flüssigen Metalls auch auf die Leitungsfähigkeit der bei gewöhnlicher Temperatur festen Amalgame einen wesentlichen Einfluss ausübt.

Ueber die Grösse dieses Einflusses und darüber, ob sich unter Zugrundelegung der obigen Zahlen das abnorme Verhalten der Quecksilberlegirungen aufklären lässt, kann vorläufig nicht geurtheilt werden. Die vorhandenen Angaben über das Leitungsvermögen dieser Legirungen reichen dazu nicht aus, und umfassende Untersuchungen hierüber begegnen grossen Schwierigkeiten; denn die meisten Amalgame, welche nicht bei gewöhnlicher Temperatur ganz flüssig sind, entziehen sich den gebräuchlichen Messmethoden infolge ihres eigenthümlichen Aggregatzustandes. — Brauchbare Resultate dürfen vielleicht erwartet werden, wenn man die Inductionswage zur Bestimmung ihrer Leitungsfähigkeiten benutzt.

IX. *Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit*[1]; *von Karl Strecker.*

(Aus den Abhandl. der k. baier. Akad. d. Wiss. II. Cl. 15. Bd. II. Abth. mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die vorliegende Arbeit habe ich unternommen auf Anregung des Hrn. Prof. Kohlrausch als einen Theil der im Auftrage der königlich baierischen Akademie der Wissenschaften im physikalischen Institut zu Würzburg auszuführenden Bestimmung der Quecksilbercapacität des Ohm.

Ich habe mir die Aufgabe gestellt, die Widerstandscapacität einer Anzahl von Glasröhren aus den Dimensionen derselben abzuleiten, und mit Hülfe dieser Röhren, welche ich mit Quecksilber füllte, mehrere Normaldrahtwiderstände herzustellen. Bei diesen Messungen suchte ich eine Genauigkeit von 0,0001 zu erreichen.

Sowohl bei der Bestimmung der Dimensionen der Röhren, als besonders bei einem Theile der galvanischen Messungen hat sich manches Neue ergeben, was mir mittheilenswerth

1) Im April vorigen Jahres veröffentlichte ich zum Zwecke der Mittheilung auf der electrischen Conferenz zu Paris eine kurze Notiz über meine Untersuchung, welche damals noch nicht vollendet war, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg 1884. Dieselbe ist auch in Exner's Repert. d. Phys. abgedruckt worden.

erschien; namentlich glaubte ich, die Erfahrungen, welche ich bei der Vergleichung von Widerständen nach der Kirchhoff'schen Methode des Differentialgalvanometers gemacht habe, etwas ausführlich darstellen zu sollen.

Schliesslich habe ich die Gelegenheit benutzt, die von mir hergestellte Quecksilbereinheit mit den gegenwärtig gebräuchlichen Widerstandseinheiten zu vergleichen, nämlich mit der von Siemens und Halske und der von der British Association ausgegebenen Einheit; hierbei standen mir durch die dankenswerthe Güte der Herren Siemens und Frölich, sowie Lord Rayleigh und Glazebrook Stücke zur Verfügung, welche mit besonderer Sorgfalt bestimmt worden waren.

I. Berechnung des Widerstandes einer Quecksilbersäule.

§ 1. Die Normalwiderstände, welche zu meiner Untersuchung dienten, waren gebildet aus mit Quecksilber gefüllten dickwandigen Glasröhren von kleinem Querschnitt. Die Enden dieser Röhren waren eben und senkrecht zur Axe abgeschliffen; sie wurden mittelst durchbohrter Korkstopfen in den seitlichen Tubulaturen passend geformter, oben offener Gläser befestigt, welche die nöthigen Verbindungen vermittelten.

§ 2. Den Widerstand eines solchen Rohres haben wir nun zu berechnen.

Eine Säule Quecksilber von 0°, welche den unveränderlichen Querschnitt Q und die Länge L besitzt, deren Endflächen Ebenen und Niveauflächen sind, hat den Widerstand:

$$\frac{L}{Q}.$$

Taucht die Glasröhre, in welche die Quecksilbersäule eingeschlossen ist, zum Zwecke der galvanischen Verbindung in weite Gefässe, welche zugleich mit jener mit Quecksilber gefüllt werden, so sind die Endebenen der Quecksilbersäule nicht mehr Niveauflächen[1]), und der Widerstand wird nicht mehr durch die obige Formel ausgedrückt.

1) Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. p. 610. — Wied. Ann. 11. p. 804. 1880.

Bestimmt man ausserdem den Quecksilberwiderstand zwischen einer Niveaufläche, welche in dem einen angesetzten Electrodengefässe liegt und vom Rohrende ziemlich weit entfernt ist, und einer ebenso gelegenen Niveaufläche im anderen Electrodengefäss, so kommt noch die beiderseitige Stromausbreitung zu obigem Ausdruck hinzu.

Die durch beide Ursachen zugleich bedingte Veränderung des Widerstandes der Röhre entspricht an jedem Ende derselben einer Verlängerung um ein Vielfaches des Radius des Endquerschnittes; also ist der ganze Widerstand:

$$W = \frac{L + a(r_1 + r_2)}{Q}.$$

Nach Maxwell[1]) liegt a zwischen 0,785 und 0,824; ich habe, wie früher Rink[2]) gethan, den Werth $a = 0{,}80$ gewählt.

Lord Rayleigh und Sidgwick[3]) und neuerdings Mascart, Nerville und Benoit[4]) haben den Werth 0,82 für a eingesetzt; die letzteren haben einige Versuche angestellt, welche auf diesen Werth von a ungefähr stimmen.

§ 3. Die letzte Formel setzt noch voraus, dass der Querschnitt der Quecksilbersäule überall der gleiche ist; dies ist aber niemals der Fall, wenn man zur Herstellung der letzteren Glasröhren verwendet, welche meistens einen ganz unregelmässig ändernden Querschnitt besitzen.

Um dieser Veränderlichkeit Rechnung zu tragen, denkt man sich die Glasröhre in gleichlange Abschnitte getheilt, welche man als abgestumpfte Kegel ansehen kann. Bedeutet für einen solchen Kegelstumpf q den mittleren Querschnitt, $\mathfrak{l}$ die Länge und $\mathfrak{l}.q$ das Volumen, ferner q_1 und q_2 die Endquerschnitte, so ist der Widerstand des Kegelstumpfes[5]):

$$w = \frac{l}{q} \cdot \frac{1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}{3} = \frac{l}{q} \cdot \left[1 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{q_1 - q_2}{q_2}\right)^2 \left(1 - \frac{q_1 - q_2}{q_2}\right)\right].$$

1) Maxwell, Electr. u. Magnet. **1.** § 308. 309.

2) Rink, Verslagen en Mededeelingen d. kon. Akad. van Wetensch. Afdeel. Natuurkunde. **2.** (11). p. 299. 1877.

3) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, Phil. Trans. **1.** p. 173. 1883.

4) Mascart, Nerville et Benoit, Résumé d'expériences sur la détermination de l'ohm etc. 1884.

5) W. Siemens, Pogg. Ann. **110.** p. 1. 1860.

Den Ausdruck:

$$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{q_1-q_2}{q_2}\right)^2\left(1-\frac{q_1-q_2}{q_2}\right),$$

eine sehr kleine Grösse, will ich mit K bezeichnen und schreibe:

$$w=\frac{1}{q}\cdot(1+K).$$

§ 4. Um die mittleren Querschnitte aller Rohrabschnitte zu vergleichen, calibrirt man das Rohr mit einem Quecksilberfaden, der im Mittel nahezu die Länge $\mathfrak{l}$ besitzt.

Zu diesem Zwecke wurde das zu untersuchende Rohr auf einem in Millimeter getheilten Maassstabe befestigt, dessen Theilfehler kleiner als 0,05 mm waren. Dieser Maassstab diente dazu, das Rohr in Abschnitte zu theilen und die Länge des Quecksilberfadens zu messen. Letzteres geschah mit Hülfe eines auf den Maassstab aufgelegten Spiegels durch Ablesung mit blossem Auge; die Länge λ des Fadens wurde bestimmt, wenn die Mitte des Fadens mit der Mitte eines Rohrabschnittes zusammenfiel, was leicht und mit Genauigkeit mittelst einer kleinen Luftdruckvorrichtung erreicht werden konnte.

Bedeutet v das constante Volumen des Quecksilberfadens, dessen veränderliche Länge wir mit λ bezeichnet haben, τ den Querschnitt in der Mitte des Quecksilberfadens und also auch in der Mitte des betreffenden Rohrabschnittes, so ist:

$$q=\tau\left(1+\frac{1}{4}K\right),\qquad \tau=\frac{v}{q}\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{\mathfrak{l}^2}\cdot K\right),$$

$$\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{v}\left(1+\frac{\lambda^2-\mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2}\cdot K\right),$$

und:

$$w=\mathfrak{l}\cdot\frac{\lambda}{v}\left[1+\left(1+\frac{\lambda^2-\mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2}\right)\cdot K\right].$$

Der Widerstand des ganzen Rohres ohne den Ausbreitungswiderstand berechnet sich also zu:

$$W'=\Sigma w=\frac{\mathfrak{l}}{v}\cdot\Sigma\lambda\cdot\left[1+\left(1+\frac{\lambda^2-\mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2}\cdot\right)K\right].$$

Das Volumen eines Rohrabschnittes ist:

$$\mathfrak{l}\cdot q=\mathfrak{l}\cdot\frac{v}{\lambda}\cdot\left[1-\frac{\lambda^2-\mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2}\cdot K\right],$$

also das Volumen des ganzen Rohres:

$$V = \mathfrak{l} v \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2} \cdot K\right].$$

Demnach wird:

$$W' = \frac{\mathfrak{l}^2}{V} \cdot \Sigma\lambda \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2}\right) K\right] \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2} \cdot K\right],$$

und unter Vernachlässigung des Gliedes, welches in Bezug auf K von der zweiten Dimension ist:

$$W' = \frac{\mathfrak{l}^2}{V} \cdot \left\{\Sigma\lambda \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} + \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \Sigma \lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2} \cdot K\right)\right.$$
$$\left. - \Sigma\lambda \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2} K\right\}.$$

§ 5. In den beiden letzten Gliedern dieses Ausdruckes, welche gegen das erste sehr klein sind, setze ich $\Sigma\lambda = nS$, wobei n die Anzahl der Messungen der Fadenlänge, S den mittleren Werth der letzteren bedeutet; statt $\Sigma(1/\lambda)$ setze ich näherungsweise n/S; dann werden die beiden kleinen Glieder:

$$= \frac{n}{S} \cdot \left[\Sigma\lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2}\right) K - S^2 . \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - \mathfrak{l}^2}{4\mathfrak{l}^2} K\right]$$
$$= \frac{n}{S} \cdot \Sigma \left[K \left(\lambda + \frac{(\lambda^2 - S^2)(\lambda^2 - \mathfrak{l}^2)}{\lambda . 4\mathfrak{l}^2}\right)\right].$$

Diesen Ausdruck kann man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auf die Form bringen:

$$\frac{n}{S} \cdot \left[\mathfrak{l} \cdot \Sigma K + \Sigma K(\lambda - \mathfrak{l}) \left(1 + \frac{\lambda - S}{\mathfrak{l}}\right)\right].$$

Von den beiden Theilen des in der eckigen Klammer stehenden Ausdruckes ist der erste nur aus positiven Werthen zusammengesetzt, während der zweite positive und negative Glieder enthält; ausserdem sind die einzelnen Bestandtheile der zweiten Summe an absoluter Grösse weit geringer als die der ersten. Führt man die Rechnung an einem Beispiele aus, so sieht man, dass $\Sigma K(\lambda - \mathfrak{l})\left(1 + (\lambda - S)/\mathfrak{l}\right)$ noch nicht den hundertsten Theil des in der Klammer stehenden Werthes ausmacht; da der letztere überhaupt sehr gering ist und nur bei Röhren von wenig gleichmässigem Querschnitt einige Hunderttausendtel des zu berechnenden Widerstandes aus-

macht, so darf man den zweiten Summanden aus obiger Klammer weglassen.

§ 6. Damit wird unsere Formel[1]):

$$W' = \frac{\mathfrak{l}^2}{V} \cdot \left[\Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} + \frac{n\mathfrak{l}}{S} \cdot \Sigma K \right].$$

Dieser Ausdruck ist für die numerische Berechnung noch sehr unbequem; um das Glied $\Sigma\lambda \,.\, \Sigma(1/\lambda)$ umzugestalten, will ich eine Grösse s einführen, welche bis auf einen im Belieben des Rechners liegenden kleinen Betrag der mittleren Fadenlänge $S = (1/n) \,.\, \Sigma\lambda$ gleich ist.

Dann sei: $\Sigma\lambda = ns + D,$

worin D eine gegen ns kleine Grösse ist. Ferner kann ich schreiben:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda - s}{s}} = \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{\lambda - s}{s} + \left(\frac{\lambda - s}{s} \right)^2 - \cdots \right].$$

Damit wird:

$$\Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} = \left[ns + D \right] \cdot \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{\lambda - s}{s} + \left(\frac{\lambda - s}{s} \right)^2 - \cdots \right]$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{D}{ns} \right) \left(1 - \frac{1}{ns} \Sigma(\lambda - s) + \frac{1}{ns^2} \cdot \Sigma(\lambda - s)^2 - \cdots \right)$$

$$\Sigma(\lambda - s) = \Sigma\lambda - ns = D,$$

$$\Sigma\lambda \,.\, \Sigma\frac{1}{\lambda} = n^2 \left(1 + \frac{D}{ns} \right) \left(1 - \frac{D}{ns} + \frac{1}{ns^2} \cdot \Sigma(\lambda - s)^2 - \cdots \right),$$

$$W' = \frac{n^2 \mathfrak{l}^2}{V} \left\{ 1 + \frac{1}{ns^2} \cdot \left[\Sigma(\lambda - s)^2 - \frac{1}{s} \Sigma(\lambda - s)^3 + \frac{1}{s^2} \Sigma(\lambda - s)^4 - \cdots \right] \right.$$

$$\left. \left[1 + \frac{D}{ns} \right] - \left(\frac{D}{ns} \right)^2 + \frac{1}{nS} \cdot \Sigma K \right\}.$$

Dieser Formel liegt eine Calibrirung zu Grunde, bei welcher man das Rohr in Abschnitte von der constanten Länge $\mathfrak{l}$ getheilt hatte; indem die Mitte des zur Calibrirung dienenden Quecksilberfadens immer um die Länge $\mathfrak{l}$ verschoben wurde, mass man die Länge des Fadens in jedem Rohrabschnitt. Der Anfangspunkt für die genannte Eintheilung der Röhre ist durchaus willkürlich; daraus folgt,

1) Vgl. Maxwell, Electr. u. Magn. 1. § 361. — Matthiessen, Rep. of electr. standards. p. 128. Third report 1864.

dass man jede beliebige Strecke der Röhre von der Länge l als Rohrabschnitt ansehen kann; man darf also die obige Formel auch anwenden, wenn die Mitte des Quecksilberfadens nicht um l, sondern um einen beliebigen Theil von l verschoben und in jeder neuen Lage die Länge des Fadens gemessen wird; gefordert ist nur, dass die Punkte, an denen die Rohrquerschnitte verglichen werden, durchaus gleichmässig über das ganze Rohr vertheilt seien, und dass man folgerichtig für die Rohrenden, wo eine Messung des Quecksilberfadens unmöglich wird, die Fadenlänge durch Extrapoliren berechnet.

Für die Länge l habe ich 40 mm gewählt, die Mitte des Quecksilberfadens habe ich immer um 10 mm verschoben.

Der Ausdruck K, welcher in der Formel für W vorkommt, enthält die Endquerschnitte der einzelnen Abtheilungen der Röhre; es genügt, hier die Querschnitte umgekehrt proportional zu setzen den Längen λ_1 und λ_2 des Quecksilberfadens, welche beobachtet werden, wenn die Mitte des Fadens mit dem Anfange oder dem Ende eines Rohrabschnittes zusammenfällt. Dadurch wird:

$$K = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}\right).$$

Die Längen λ_1 und λ_2 liefert die Calibrirung zugleich mit λ, wenn man die Fadenmitte immer um 10 mm verschiebt.

Bei der Berechnung von $l\Sigma K$ darf man sich weitere Vernachlässigungen erlauben, indem man in dem Ausdruck für K den Factor $1 - \left((\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1\right)$ weglässt und statt $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ den nahe gleichen Bruch $(\lambda_2 - \lambda_1)/l$ setzt. Dann hat man statt $l\Sigma K$ den bequem zu berechnenden Ausdruck:

$$\frac{1}{12 \cdot l} \cdot \Sigma(\lambda_1 - \lambda_2)^2,$$

welcher dem richtigen Werth von $l\Sigma K$ fast immer genau genug gleich ist.

§ 7. Eine Berechnung der Calibercorrection nach der eben entwickelten Formel ist verhältnissmässig einfach; bei recht guten Röhren ist nur die Summe der Quadrate und Cuben zu ermitteln; bei Röhren von weniger gutem Caliber

muss man allerdings bis zu der Summe der sechsten Potenzen fortschreiten, doch ist die Berechnung der Summen höherer Ordnung als der dritten mit nur wenigen Ziffern auszuführen.

Was die bei der Bestimmung der Calibercorrection zu erreichende Genauigkeit betrifft, so hängt dieselbe wesentlich davon ab, ob die gewählte Länge $\mathfrak{l}$ klein genug ist, um die Voraussetzung zu rechtfertigen, von der wir ausgegangen sind, dass nämlich jedes Stück der Röhre von dieser Länge $\mathfrak{l}$ als abgestumpfter Kegel betrachtet werden kann. Man darf nicht sehr kurze Quecksilberfäden nehmen, weil man sonst die Aenderungen der Fadenlänge nicht genau genug beobachten kann; deshalb habe ich $\mathfrak{l}$ nicht kleiner als 40 mm genommen.

Von der Wahl dieser Länge abgesehen, wird man durch grosse Anzahl der Messungen von λ jedenfalls eine sehr grosse Genauigkeit erreichen können. Bei meinen Röhren betrug die Anzahl der gemessenen Fadenlängen 120 bis 150; ich glaube, aus angestellten Versuchen schliessen zu dürfen, dass die bei der Calibrirung gemachten Beobachtungsfehler nur einen Einfluss von wenigen Hunderttausendteln auf das Resultat haben. Etwas anderes ist die Frage, ob bei allen meinen Röhren die Länge von 40 mm für $\mathfrak{l}$ ausreichend klein war, um die Calibercorrection richtig zu bestimmen. Ich werde darauf später zurückkommen.

§ 8. Ich setze zur Abkürzung:

$$C = 1 + \frac{1}{n s^2} \cdot \left[\Sigma(\lambda - s)^2 - \frac{1}{s} \Sigma(\lambda - s)^3 + \frac{1}{s^2} \Sigma(\lambda - s)^4 - \ldots \right] \cdot \left[1 + \frac{D}{n s} \right] - \left(\frac{D}{n s} \right)^2 + \frac{\mathfrak{l} \Sigma K}{n S}$$

und habe dann: $W' = C \cdot \frac{n^2 \mathfrak{l}^2}{V} = C \cdot \frac{L^2}{V}$.

Das Volumen der Röhre wird durch Wägung der Masse Quecksilbers gefunden, welche das Rohr bei einer gemessenen Temperatur gerade füllt; ist diese Masse $= M$, die Dichtigkeit des Quecksilbers bei der beobachteten Temperatur $= D$, so ist:

$$W' = C \cdot \frac{L^2 D}{M}.$$

Um auch den Ausbreitungswiderstand richtig hinzuzufügen, hat man zu berücksichtigen, dass in diesem Ausdrucke für W' statt des Querschnittes Q:

$$\frac{M}{LD}$$

steht; wir haben also den gesammten Widerstand der Quecksilberröhre:

$$W = C \cdot \frac{LD}{M} \cdot [L + a(r_1 + r_2)].$$

Ist der specifische Leitungswiderstand des Quecksilbers nicht $= 1$, sondern $= \sigma$, so ist:

$$W = \sigma \,.\, C \cdot \frac{LD}{M} \cdot [L + a(r_1 + r_2)].$$

Um den Widerstand W als die in Metern ausgedrückte Länge einer Säule Quecksilbers von 0^0 und von 1 qmm Querschnitt zu erhalten, hat man in diese Formel L und r in Metern und M in Grammen einzusetzen und als Einheit des specifischen Widerstandes denjenigen des Quecksilbers bei 0^0 zu nehmen.

II. Normalröhren.

§ 9. **Herstellung der Normalröhren.** Bei der Auswahl meiner Röhren nahm ich darauf Rücksicht, sowohl solche von möglichst constantem Querschnitt, als auch solche von weniger gutem Caliber zu verwenden; ich wählte schliesslich 5 Röhren, von denen zwei sehr gut, eine von mittlerer und zwei von geringerer Güte des Calibers waren. Die Längen der Röhren betrugen 1,2 und 1,5 m, die Querschnitte zwischen 0,5 und 3,5 qmm. Die Widerstände verhielten sich ungefähr wie 1:3:4:7:9.

Die Enden dieser Röhren wurden mit Schmirgel und Terpentinöl auf einer Kupferscheibe eben und senkrecht zur Axe abgeschliffen; ich benutzte dazu die Drehbank, auf der ich zunächst die Kupferscheibe genau eben und senkrecht zur Drehaxe abdrehte; dann wurde die parallel der Axe in festen Lagern eingeklemmte Glasröhre sanft gegen die rotirende Kupferscheibe gedrückt, während die letztere fortwährend mit einem dünnen Brei von Schmirgel und Terpentinöl benetzt wurde.

Um zu prüfen, ob die Endflächen hinreichend eben geschliffen seien, drückte ich ein Plättchen aus mattem Glase mit ganz wenig Fett auf das Rohrende; wo sich die Glasflächen berührten, wurde das Plättchen durchsichtig. Das Schleifen wurde so lange fortgesetzt, bis die Probe mit dem Glasplättchen zeigte, dass die Endflächen fast genau eben, jedoch noch schwach convex seien; denn ein Vortreten der Ränder gegen die Rohrmitte würde zu Fehlern bei der Längenmessung und Volumenbestimmung der Röhren Veranlassung gegeben haben. Grosse Sorgfalt wurde verwendet, den inneren Rand der Glasröhren beim Schleifen nicht ausspringen zu lassen.

Ausmessung der Dimensionen der Normalröhren.

§ 10. Messung der Rohrlänge. Die Länge der Quecksilbersäule, welche ein Rohr aufnahm, konnte nicht unmittelbar gemessen werden. Man durfte nicht den an einer beliebigen Stelle gemessenen Abstand der beiden Endflächen für diese Länge setzen, da ja diese Flächen nicht genau Ebenen und nur nach dem Augenmaass senkrecht zur Axe geschliffen waren.

Ich kittete nun 1,5 mm dicke, runde Milchglasplättchen, welche die Grösse der Endflächen besassen und eben waren, auf die letzteren; wenn man den Abstand der Ränder der aufgekitteten Plättchen auf zwei diametral gegenüberliegenden Seiten der Röhre mass, so lieferte das arithmetische Mittel einen richtigen Werth für die Länge der Quecksilbersäule, welche das Rohr aufnahm.

Die Abstände der Plattenränder wurden gemessen mit Hülfe eines 2 m langen Glasmaassstabes, der auf dem grössten Theil seiner Länge in Centimeter getheilt war und an jedem Ende eine 10 cm lange Theilung in Millimeter trug. Dieser Maassstab, ein Spiegelglasstreifen von 8 cm Breite und 1 cm Dicke, wurde mit der Theilung nach unten auf die Röhre gelegt, durch untergeschobene Holzklötzchen und Keile dafür gesorgt, dass die Röhre gerade lag und die Theilung des Maassstabes auf ihrer ganzen Länge berührte. Die Abstände der Ränder der Milchglasplättchen von den

nächstgelegenen Theilstrichen des Maassstabes wurden mit einem Mikroskop mit Ocularmikrometer gemessen; das letztere theilte 1 mm des Maassstabes in Zehntel, und man konnte sicher noch 0,02 mm schätzen. Zugleich überzeugte man sich, dass die Dicke der Kittschicht, welche die Plättchen mit den Röhren verband, so gering war, dass man sie bei der angewandten schwachen Vergrösserung gar nicht wahrnehmen konnte.

Bei jeder Messung wurden beide Ränder jedes Plättchens auf den Maassstab eingeschätzt. Nachdem in einer Lage der Röhre 3 Messungen ausgeführt worden, drehte man dieselbe um 180° und wiederholte die dreimalige Messung. Die zusammengehörigen Bestimmungen lieferten auf etwa 0,03 mm dieselben Werthe.

Die Abstände derselben Plattenränder, gemessen in zwei um 180° verschiedenen Lagen des Rohres, unterschieden sich höchstens um 0,05 mm.

Die Dicke der Milchglasplättchen wurde mit dem Sphärometer bestimmt. Es zeigte sich, dass die mit Hülfe der äusseren Plattenränder bestimmte Rohrlänge ein wenig grösser ausgefallen war, als die mit Hülfe der inneren Ränder ermittelte; doch betrug der Unterschied immer weniger als 0,04 mm.

Schliesslich wurde der benutzte Glasmaassstab mit einem Normalmeter verglichen, das von der Normalaichungscommission in Berlin ausgegeben und mit einem Verzeichniss der Theilfehler versehen war. Die Vergleichung geschah unter Anwendung des oben benutzten Mikroskopes mit Ocularmikrometer, indem der Glasmaassstab mit der Theilung nach unten auf den Normalmaassstab gelegt wurde.

Die Genauigkeit, mit welcher die Rohrlänge gemessen wurde, ist nach dem eben Gesagten grösser als 0,05 mm.

§ 11. Ausbreitungswiderstand. Um die Werthe von r_1 und r_2 zu erhalten, berechnet man aus M, L und D den mittleren Radius des Rohres und benutzt die durch Calibrirung bekannten Verhältnisse des mittleren Querschnittes zu den Endquerschnitten. Ist r der mittlere Radius, λ_a und λ_z die erste und die letzte der gemessenen Längen

des Quecksilberfadens, $S = (1/n)\,\Sigma\lambda$ die mittlere Länge desselben, so ist:

$$r = \sqrt{\frac{M}{L \cdot D \cdot \pi}},$$

$$a(r_1 + r_2) = a r \cdot \left(\sqrt{\frac{S}{\lambda_a}} + \sqrt{\frac{S}{\lambda_z}}\right).$$

Der Ausbreitungswiderstand beträgt für meine Röhren zwischen 0,6 und 2 mm; da der Factor a bis auf etwa 3 Proc. bekannt ist, wird man die in Frage kommenden Grössen bis auf 0,02 bis 0,06 mm genau bestimmen können.

Das in der Formel für W stehende Product:

$$L \cdot [L + a(r_1 + r_2)]$$

wird also im äussersten Fall um 0,0001 unsicher sein.

§ 12. Auswägung der Röhren. Die Bestimmung der Masse der Quecksilberfüllung einer Röhre wurde auf folgende Art und Weise ausgeführt, welche mir auch erlaubte, jedesmal nach dem Gebrauche eines Normalrohres dasjenige Quecksilber zu wägen, welches zur Herstellung des Widerstandes gedient hatte.

Das sorgfältig gereinigte und getrocknete Glasrohr war mit Hülfe zweier durchbohrter Korke in den seitlichen Oeffnungen der beiden oben offenen Glasgefässe befestigt, welche zur Aufnahme der Electroden dienten. In das eine dieser Gefässe wurde Quecksilber eingegossen, welches dann langsam durch die Röhre strömte und auch das andere Electrodengefäss anfüllte.

Um den Quecksilberinhalt des Rohres zu wägen, verschloss man (nach Entfernung der Electroden aus den Endgefässen) das eine Ende des gefüllten Rohres unter Quecksilber mit einem ebenen Eisenplättchen, das an einer Feder befestigt war (vgl. Fig. 1), und saugte das in dem anderen Electrodengefäss befindliche Quecksilber aus. Dabei war nicht zu vermeiden, dass aus dem offenen Rohrende eine kleine Menge Quecksilber mit fortgenommen wurde; um diese zu ersetzen, hob man vorsichtig das verschliessende Eisenplättchen am anderen Ende ein wenig, damit etwas Quecksilber nachfliessen konnte, doch nur so viel, dass an dem

freien Rohrende ein Meniscus entstand. Nun wurde auch das Endgefäss, in welchem sich das verschliessende Eisenplättchen befand, von Quecksilber entleert, darauf der am offenen Rohrende befindliche Meniscus mit einer ebenen Glasplatte weggedrückt und über dieses Rohrende ein Gefäss geschoben, das zur Aufnahme des Quecksilbers diente; dieses Gefäss war aus Glas gefertigt und hatte eine seitliche Oeffnung, die gerade gross genug war, das Rohrende durchzulassen.

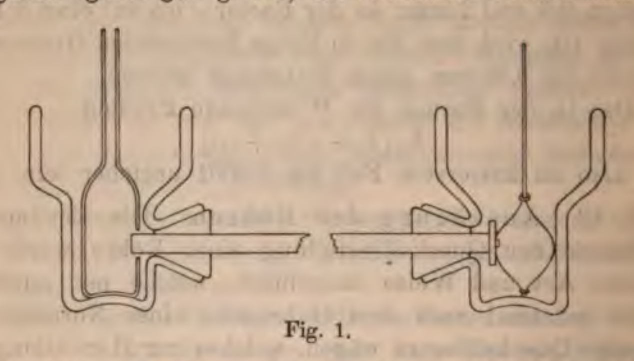


Fig. 1.

Nachdem das Gefäss über das offene Rohrende geschoben und in seiner Stellung durch etwas weiches Papier, das man in das Electrodengefäss einschob, befestigt worden war, hob man das verschlossene Ende der Röhre ein wenig in die Höhe, entfernte die Eisenplatte und liess die Quecksilberfüllung langsam in das zum Auffangen bestimmte Gefäss fliessen; der letzte im Rohr bleibende grössere Tropfen wurde durch vorsichtiges Blasen herausgebracht. Nun hafteten noch manchmal ganz winzige Quecksilbertröpfchen im Rohr nahe den Enden; dieselben konnte man mit Hülfe eines feinen Drahtes leicht herausschaffen und der grösseren Menge zufügen.

Die beschriebenen Operationen waren leicht und bequem auszuführen; von etwa 30 Entleerungen der Röhre, welche ich auf diese Weise vornahm, misslangen nur zwei; anfänglich hatte die Schliessfeder eine andere Gestalt, welche weniger günstig war, sodass die Versuche öfter fehlschlugen.

§ 13. Das Quecksilber wurde in dem Gefäss gewogen, in dem es aufgefangen wurde. Ich benutzte dazu eine sehr

gute Rüprecht'sche Wage, welche auf 1 mg einen Ausschlag von 1 mm gab und sehr constante Einstellungen lieferte.

Der Gewichtsatz bestand aus vergoldetem Messing, war vor diesen Wägungen calibrirt und mit einem 100 g-Stück der Normalaichungscommission in Berlin verglichen worden. Alle meine Wägungen waren Doppelwägungen.

War das gefundene scheinbare Gewicht einer Quecksilbermasse in Grammen gleich M, so wurde zur Reduction auf den leeren Raum davon abgezogen:

$$M.0{,}054 \text{ mg}.$$

Von der Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers wird weiter unten (§ 14) die Rede sein.

Nachdem ich vorgängig etwa 30 Auswägungen meiner 5 Röhren vorgenommen hatte, um die Uebereinstimmung der Resultate zu prüfen, habe ich im Laufe der späteren Widerstandsbestimmungen nochmals ebenso viele Wägungen ausgeführt. Die Resultate aller dieser Bestimmungen mitzutheilen, dürfte wenig Zweck haben; ich will vielmehr eine Tabelle geben, welche ein Urtheil über die Genauigkeit derselben ermöglicht.

Die erste wagerechte Zeile dieser Tabelle enthält die Grösse der vorkommenden Abweichungen der Einzelbestimmungen vom Mittel in Zehntausendteln des Ganzen; die senkrechten Spalten geben für jedes Rohr an, wie viele der Bestimmungen seines Quecksilberinhaltes (reducirt auf eine gemeinschaftliche Temperatur) Abweichungen zeigen, welche innerhalb der in der obersten Zeile gegebenen Grenzen liegen.

Rohr-Nr.	0,0–0,25	0,26–0,50	0,51–0,75	0,76–1,00	1,0–1,3	1,3–1,6	1,8	Summe
1	6	1	0	2	0	0	0	9
2	11	2	1	0	0	1	1	16
3	4	5	1	0	0	1	0	11
4	6	4	2	0	0	0	0	12
5	8	1	2	2	0	0	0	13
Summe	35	13	6	4	0	2	1	61

Ich verfolgte ursprünglich den Zweck, durch die Wägung der Quecksilbermasse, welche die Füllung einer Röhre ge-

bildet und zur Herstellung eines Widerstandes gedient hatte, mich gegen etwaige Veränderlichkeit dieser Masse zu sichern; die angegebene Tabelle zeigt, dass eine solche Veränderlichkeit nicht vorhanden ist; die beobachteten Differenzen der Einzelwerthe vom Mittel, von denen $^4/_5$ kleiner als 0,00005 und nur $^1/_{20}$ grösser als 0,0001 sind, lassen sich durch Beobachtungsfehler erklären. Man darf also, wie andere bereits gethan haben, die Masse Quecksilbers, welche das Rohr bei einer gegebenen Temperatur aufnehmen kann, als eine Constante des Rohres ansehen. Deshalb habe ich der Berechnung der Widerstände der Röhren die Mittelwerthe aus sämmtlichen Massenbestimmungen zu Grunde gelegt; die einzelne Wägung nach jeder Widerstandsbestimmung dient dann nur zur Controle.

Von den 3 Fällen, in welchen die beobachtete Abweichung vom Mittel die Grösse von 0,0001 übersteigt, entfällt einer auf die vorgängige Auswägung der Röhren, wobei noch keine Widerstandsmessungen vorgenommen wurden, einer wurde bei Untersuchungen von untergeordneter Bedeutung beobachtet (§ 35), und nur der dritte trifft eine Bestimmung von Wichtigkeit (§ 42, 1, 2). Ich werde die Messungen, bei denen die grossen Abweichungen wahrgenommen wurden, besonders hervorheben.

Die der Berechnung der Widerstände der Normalröhren zu Grunde liegenden Mittelwerthe für die Massen der Quecksilberfüllungen sind ohne Zweifel auf einige Hunderttausendtel richtig.

§ 14. Temperaturbestimmung. Um die Temperatur des Quecksilbers zu bestimmen, welches in einer Röhre enthalten war, brachte ich die letztere in ein Wasserbad, welches aus einem 1,6 m langen, 10 cm breiten und 10 cm hohen Troge aus Zinkblech bestand, der auf den Seiten und am Boden mit Filz umhüllt war und mit einem Holzdeckel geschlossen wurde. Das Wasser stand im Troge so hoch, dass alle mit Quecksilber gefüllten Theile der Röhre und der Electrodengefässe von Wasser umgeben waren, und es auch während der beim Entleeren der Röhre nöthigen Manipulationen blieben.

In dem Deckel des Wasserbades befanden sich 2 Löcher, in welchen Thermometer befestigt wurden; wenn der Deckel auf dem Bade lag, waren die Gefässe der beiden Thermometer in gleicher Höhe mit der Quecksilberröhre.

War die Temperatur des Bades längere Zeit hindurch constant geblieben, so wurde das Mittel aus den Angaben dieser Thermometer als die Temperatur des im Rohre befindlichen Quecksilbers angesehen; die beiden Thermometer stimmten immer bis auf Theile von 0,1° überein. Die Aenderung der Temperatur betrug nie mehr als wenige Hundertelgrade in der Viertelstunde.

Ich benutzte mehrere sogenannte Normalthermometer, vier von O. Wiegand in Würzburg (im Februar 1882) verfertigte, welche in Zehntelgrade getheilt waren, und eines von Geissler in Bonn (seit 1873 in Gebrauch), welches Fünftelgrade zeigte; bei allen konnte man noch 0,02° mit Sicherheit schätzen. Die Nullpunkte dieser Thermometer bestimmte ich häufig; ausserdem verglich ich die Thermometer unter einander und zwei derselben mit dem Luftthermometer bei 10 und 20°; die letztere Vergleichung war auf mindestens 0,05° genau, sodass die auf das Luftthermometer bezogenen Angaben meiner Quecksilberthermometer als auf 0,05 bis 0,08° richtig anzusehen sind; 0,11° bedeutet ein Zehntausendtel des Widerstandes.

§ 15. **Reinigung des Quecksilbers, specifischer Widerstand und Dichtigkeit desselben.** Das Quecksilber reinigte ich auf folgende Weise:

Eine grössere Menge des Metalles wurde mit fünfprocentiger Salpetersäure und darauf mit Wasser gewaschen, indem es aus feinen Oeffnungen in kleinen Tröpfchen durch eine etwa 1,5 m hohe Schicht der Waschflüssigkeit fiel; dann wurde es unter mässigem Erwärmen getrocknet und in einen Destillationsapparat gebracht.

Dieser war dem von L. Weber[1]) beschriebenen continuirlich arbeitenden Apparate nachgebildet; er besass oberhalb des Siedegefässes einen seitlichen Ansatz mit Hahn, um den

1) L. Weber, Carl's Rep. **15.** p. 52. 1879.

Apparat mit der Luftpumpe verbinden zu können; das Gefäss, in dem sich das Destillationsproduct sammelte, und aus dem es in eine untergesetzte Glasflasche ausfloss, war möglichst klein genommen. Nachdem eine grössere Menge Quecksilber destillirt worden, entfernte ich den Rückstand, reinigte den Apparat und brachte das Product der ersten Destillation nochmals in denselben. Erst nach dieser Wiederholung der Destillation wurde das Quecksilber als rein angesehen.

Dieses Quecksilber zeigte immer das gleiche Leitungsvermögen, einerlei, ob es frisch destillirt, oder ob es schon Monate lang in Glasflaschen aufbewahrt worden, einerlei, ob es luftfrei oder mit Luft geschüttelt war. Die hierzu gehörigen Versuche sollen weiter unten ihre Stelle finden (§ 35, 36).

Um indess jede Unsicherheit, welche in dieser Beziehung entstehen konnte, zu vermeiden, zog ich es vor, zu definitiven Messungen nur Quecksilber zu verwenden, welches noch nicht gebraucht worden war.

Von der Bestimmung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers bei Temperaturen zwischen 0 und 20° wird ebenfalls weiter unten die Rede sein (§ 37). Ich will hier nur angeben, dass ich denselben innerhalb der genannten Grenzen bei der Temperatur t (nach dem Luftthermometer) zu:

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000\,900\, t + 0{,}000\,000\,45\, t^2$$

bestimmt habe, und dass diese Formel meine Beobachtungen bis auf wenige Hunderttausendtel genau wiedergibt.[1])

Die Dichtigkeit des Quecksilbers berechnete ich aus den Regnault'schen Zahlen und den von Wüllner[2]) angegebenen Temperaturcoëfficienten.

§ 16. Normaltemperatur. Sämmtliche Messungen wurden bei Temperaturen zwischen 8 und 17° angestellt. Ich reducire alle Angaben auf 10° C., gemessen nach dem Luftthermometer.

---

1) Die in meiner früheren Mittheilung angegebenen Werthe für specifischen Widerstand und Temperaturcoëfficienten sind nach dem Quecksilberthermometer bestimmt.

2) Wüllner, Pogg. Ann. **153.** p. 440. 1874.

Für diese Temperatur ist:

$$W_{10} = 1{,}00904 \cdot C \cdot \frac{13{,}5713 \cdot L_{10}}{M_{10}} \cdot [L_{10} + a(r_1 + r_2)]$$

und für irgend eine andere Temperatur t zwischen 0 und 20° (unter Berücksichtigung der Ausdehnung des Glases):

$$W_t = W_{10} \cdot \frac{\sigma_t}{\sigma_{10}} = W_{10} \cdot [1 + 0{,}000\,892\,(t - 10) + 0{,}000\,000\,45\,(t^2 - 100)],$$

wofür bei kleinen Temperaturintervallen auch genügt:

$$W_t = W_{10} \cdot [1 + 0{,}00090\,(t - 10)].$$

§ 17. **Resultate der Ausmessung der Dimensionen der Normalröhren.** Die Constanten meiner 5 Röhren, bezogen auf die Normaltemperatur von 10° C. (nach dem Luftthermometer), sind in der nachfolgenden Tabelle vereinigt. Die beigefügte Zeichnung (Fig. 2 a. f. S.) gibt die Querschnittsänderungen der Röhren; die letzteren selbst sind als Abscissenaxen gedacht und die Querschnitte als Ordinaten aufgetragen. Wo der Rohrquerschnitt gleich dem mittleren Querschnitt ist, wird dies durch eine kurze horizontale Linie angezeigt; der mittlere Querschnitt ist bei allen Röhren durch die gleiche Grösse ausgedrückt. Die Abscissenaxen, welche auf der Figur nicht angegeben sind, würden für jede der 5 Curven 63 mm von der dem mittleren Querschnitt entsprechenden Horizontalen entfernt sein.

Tabelle I.

Nr.	C	L_{10}	M_{10}	$a(r_1 + r_2)$	W_{10}
		m	g	m	$\frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$, Hg von 0°
1	1,00464	1,51017	88,5200	0,00195	0,35490
2	1,00692	1,20673	20,1113	0,00098	0,99921
3	1,00051	1,23409	15,2109	0,00086	1,37275
4	1,00225	1,50994	12,2647	0,00070	2,55252
5	1,00066	1,50582	9,6908	0,00063	3,20763

Die Röhren Nr. 3 und 5 sind von gutem Caliber, Nr. 4 von mittlerer, Nr. 1 und 2 von geringer Güte; beim Berechnen der Mittelwerthe sollen die Zahlen, welche durch Messungen mit den Röhren 3 und 5 erhalten wurden, das drei-

fache Gewicht, und die von Rohr 4 herrührenden das doppelte Gewicht bekommen, wie die mit Hülfe von Nr. 1 und 2 bestimmten.

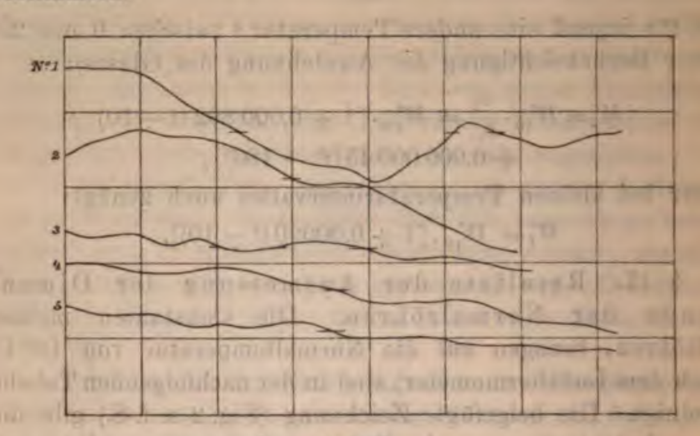


Fig. 2.

III. Drahtwiderstände.

§ 18. Die Widerstände der 5 Quecksilberröhren wurden in Neusilberdraht copirt; von jeder Röhre stellte ich 3 Copien her, wozu ich zwei verschiedene Sorten Neusilberdraht benutzte.

Die eine Sorte wurde gewählt, weil sie schon 1879 aus der Fabrik bezogen worden war; sie hatte freilich einen specifischen Widerstand von nur 0,18 und einen grossen Temperaturcoëfficienten; die Aenderung ihres Widerstandes mit der Temperatur zwischen 0 und 20° wird dargestellt durch die Formel:

$$w_t = w_0 (1 + 0{,}000\,666\,t - 0{,}000\,000\,8\,t^2).$$

Die andere Sorte ist erst im April 1883 bezogen worden (Obermaier in Nürnberg), hatte einen grossen specifischen Widerstand, 0,41, und den mittleren Temperaturcoëfficienten bei 10° von nur 0,000 247.

Die Einrichtung der Widerstandsrollen war die folgende: Durch eine Holzbüchse, 15 cm hoch und 5 cm im Durchmesser, wurden die Electroden aus dickem Kupferdraht

geführt; dieselben wurden mit Guttapercha eingekittet und durch einen aufgeschraubten Holzdeckel festgehalten. Der untere Theil der Holzbüchse war hohl und auf einer längeren Strecke auf geringeren Umfang eingedreht. Auf die letztere Strecke wurden die Widerstandsdrähte bifilar aufgewickelt, nachdem sie in die unteren Enden der Kupferelectroden eingelöthet worden waren; die Stelle, an der der Draht geknickt wurde, ist mit einem Seidenfaden an ein kleines Messingschräubchen angebunden, welches in die Holzbüchse eingesetzt ist. Durch den Deckel der Büchse geht eine Durchbohrung, welche gestattet, ein Thermometer in das Innere der Widerstandsrolle einzuführen. Ueber das Ganze wird ein Glas übergekittet.

Der Electrodendraht ist ca. 3 mm dick; sein Widerstand beträgt pro Centimeter 0,00003 Q.-E. Auf den Electroden wird der Widerstand der Rollen durch Feilstriche abgegrenzt.

§ 19. Diese Widerstandsrollen wurden nur in Wasserbädern gebraucht; die letzteren besassen folgende Gestalt:

Ein cylindrisches Gefäss aus Zinkblech von 10 cm Höhe und 13 cm Halbmesser, an Boden und Seiten mit Filz überzogen, war zur Aufnahme von 3 Widerstandsrollen bestimmt. Der Deckel dieses Gefässes enthielt drei 5 cm weite Oeffnungen, durch welche die Widerstandsrollen hindurchgesteckt wurden, und besass nach oben einen 4 cm hohen Rand, auf welchen ein zweiter Deckel aufgesetzt werden konnte; der Raum zwischen beiden Deckeln wurde, soweit er nicht von den oberen Enden der Widerstandsrollen und den Electroden in Anspruch genommen war, sorgfältig mit Filz ausgefüllt.

Durch die Mitte beider Deckel ging eine Durchbohrung, welche dazu diente, ein Thermometer in das Wasserbad einzuführen; den grossen Oeffnungen des unteren Deckels entsprachen kleinere Oeffnungen des oberen, welche erlaubten, auch in das Innere der Widerstandsrollen Thermometer zu bringen. Der Boden der Widerstandsbüchsen befand sich 2 cm hoch über dem Boden des Wasserbades. Die Stellen der Electroden, wo die Widerstände der Rollen durch Feilstriche begrenzt waren, befanden sich noch innerhalb des Filzdeckels, etwa 2—3 cm vom Rande entfernt; nur die

äussersten Enden der Electroden ragten aus der Umhüllung des Bades hervor.

Solche Bäder wurden nur verwendet, wenn das im Gefässe befindliche Wasser nahe die gleiche Temperatur hatte, wie die umgebende Luft. Die Widerstandsrollen wurden immer mehrere Stunden vor den Messungen in die Bäder gebracht. Die Temperatur des Wassers hielt sich sehr constant; sie änderte sich gelegentlich einmal in $^3/_4$ Stunden um 0,1°, meistens aber nur um wenige Hundertelgrade in derselben Zeit. Ich hielt es deshalb für erlaubt, die Temperatur im Inneren der Widerstandsrollen gleich der des umgebenden Wassers zu setzen, wenn die letztere nahe gleich der Lufttemperatur im Beobachtungsraume war.

§ 20. Die letztere Annahme ist nicht mehr gestattet, wenn die Temperatur des Bades von der der umgebenden Luft erheblich verschieden ist; die Temperatur der in dem Widerstandsgefäss eingeschlossenen Luft ist dann um einige Zehntelgrade von der des Bades verschieden, da die dicken Kupferdrähte einen erheblichen Wärmeaustausch zwischen dem Inneren der Gefässe und der umgebenden Luft vermitteln. Bei den Versuchen, welche ich in dieser Richtung anstellte, erhielt ich das Wasserbad halbe oder ganze Tage lang constant auf einer Temperatur, welche 10 bis 15° höher war, als die der umgebenden Luft; dabei blieb die Temperatur im Inneren der mit Luft oder Petroleum gefüllten Widerstandsbüchsen 0,3 — 0,7° gegen die Temperatur des Bades zurück.

Will man Fehler dieser Art in der Temperaturbestimmung vermeiden, so dürfte es keineswegs zweckmässig sein, den Widerstandsrollen möglichst dicke Kupferelectroden zu geben; bei sehr dicken Drähten wird der Vortheil des grossen galvanischen Leitungsvermögens durch den Nachtheil des grossen Wärmeleitungsvermögens bedeutend überwogen.

Das Umgeben der Widerstandsdrähte mit Paraffin statt mit Luft wird keinen Vortheil bieten.

Sind die Temperaturen des Bades und der umgebenden Luft verschieden, so muss man die Widerstandsdrähte (wie bei den Siemens'schen Normalen) direct mit Flüssigkeit

(Petroleum) umgeben und die Temperatur dieser Flüssigkeit, nicht diejenige des äusseren Bades messen.

Dieses Verfahren habe ich bei Bestimmung der Temperaturcoëfficienten eingeschlagen; die ausführliche Beschreibung desselben wird weiter unten folgen (§ 38).

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

X. *Zur Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Schwingungsversuche; von D. Kreichgauer.*

I. Verschiedene Arten der Bestimmung.

Das Trägheitsmoment eines beliebig geformten Körpers durch Rechnung genau zu ermitteln, ist nicht möglich; wohl aber kann dasselbe durch das Experiment mit ziemlicher Schärfe auf einem Wege bestimmt werden, den Poisson[1]) vorgeschlagen hat. Als Gauss[2]) das Trägheitsmoment von Magneten zur Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus verwendete, führte er jenen Vorschlag in der bekannten, noch gebräuchlichen Form aus, indem er einen Magnet einmal allein, dann mit zwei auf scharfen Spitzen ruhenden Massen von bekanntem Trägheitsmoment schwingen liess. Die Art der Belastung hat mit der Zeit verschiedene Aenderungen erfahren, die Massen wurden von Weber[3]), statt sie auf Spitzen aufzusetzen, an Coconfäden gehängt, deren Abstand mit grösserer Genauigkeit und geringerer Mühe gemessen werden konnte, als die Entfernung zweier Spitzen.

Einige Beispiele älterer Bestimmungen nach dieser Methode mögen hier Platz finden.

W. Weber gibt in den Resultaten aus den Beobach-

1) Lamont, Handbuch des Erdmagnetismus. p. 75.

2) Gauss, Intensitas vis etc.

3) Weber, Resultate a. d. Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. p. 82.

tungen des magnetischen Vereins 1837, p. 82, das Trägheitsmoment eines Stabes, der bei der ersten Bestimmung an einem Seidenfaden, bei der zweiten an einem Metalldrahte von grosser Torsionskraft hing, an als:

1) 49 103 000 [mm² mg], 2) 49 004 000 [mm² mg],

während die Berechnung aus den Dimensionen den Werth 48 982 000 [mm² mg] lieferte. Die Schwingungsdauer des unbelasteten Stabes, auf gleiche Umstände reducirt, wird an derselben Stelle als Resultat aus 4 Beobachtungssätzen mitgetheilt; sie beträgt:

6,698 6,695 6,696 6,695 sec.

Der grösste Unterschied zwischen diesen Zahlen ist 3 auf 6700, oder 1 auf ca. 2230.

Nachdem zwei Cylindergewichte an Coconfäden an den Magnet gehängt waren, wurden aus 3 Sätzen die Schwingungsdauern gefunden:

12,058 12,039 12,019 sec.

mit der grössten Differenz von 39 auf 12040 oder 1 auf ca. 309. Gegenüber der guten Uebereinstimmung obiger 4 Werthe ist der Unterschied der drei letzteren ziemlich auffällig.

In der Schrift Intensitas vis etc. von Gauss findet sich ebenfalls ein Beispiel einer Trägheitsmomentbestimmung. Die Gewichte waren dort in vier verschiedenen Entfernungen nacheinander angehängt, in jeder der verschiedenen Stellungen wurde die Schwingungsdauer der Combination bestimmt, und mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate das Trägheitsmoment berechnet. Der gefundene Werth gestattete nun, rückwärts auszurechnen, wie gross die Schwingungsdauer bei den genannten 4 Stellungen hätte gefunden werden müssen. Das Resultat ist in der folgenden Tabelle enthalten:

Exper.	Tempus calculatum	Tempus observatum	Diff.
I	24,65884''	24,65717''	+0,00167''
II	20,78774	20,79228	−0,00454
III	17,69046	17,68610	+0,00436
IV	15,82805	15,82958	−0,00153

Ferner theilt Sartorius von Waltershausen in den Resultaten des magnetischen Vereins 1837, p. 99, eine ganz ähnliche Beobachtungsreihe mit, wie folgt:

Exper.	Berechnete Zeit in Sec.	Beobachtete Zeit in Sec.	Differenz Sec.	Gegenseitige Entfernung der Gew.
I	31,0169	31,0129	+0,0040	199,888 mm
II	25,6011	25,6317	−0,0306	150,0 „
III	20,8744	20,8433	+0,0311	100,0 „
IV	17,4347	17,4382	−0,0035	50,0 „

Auch Hansteen hat, wie er in den Resultaten von 1840 mittheilt, derartige Versuche angestellt, mit deren Ergebniss er gar nicht zufrieden war.

Da anzunehmen ist, dass nur gute Beobachtungen veröffentlicht wurden, so lässt sich aus den mitgetheilten Beispielen schliessen, dass einer oder mehrere principielle Fehler in der Methode liegen. Dieselben zu corrigiren oder zu umgehen, war der Hauptzweck gegenwärtiger Untersuchung.

Infolge der gemachten schlimmen Erfahrungen belastete Lamont[1]) und Gauss[2]) den schwingenden Magnet mit einem Ringe, dessen Mittelpunkt in die Aufhängeaxe fiel. Dadurch trat nun an Stelle des vermiedenen ein neuer Missstand, die nicht controlirbaren Dichteverschiedenheiten und, da ausserdem der Ring meistens aus Messing bestand, der dieses Metall häufig begleitende Magnetismus. Eine grössere Beobachtungsreihe nach dieser Methode gibt Wild.[3]) Für das Trägheitsmoment desselben Stabes, in längeren Intervallen bestimmt, sind dort die Zahlen angegeben:

71661	71632	71591	71524	71633	71632
71634	71653	71610	71596	71613	71617
71600	71577	71635	71600	71613	

Der grösste Unterschied zeigt sich zwischen dem ersten und vierten Werthe, er beträgt 137 auf 71660, oder 1 auf

1) Lamont, Abhandl. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. bair. Acad. **3.** p. 621. 1843 u. Ueber das magnetische Observatorium an der K. Sternwarte bei München 1840.

2) Gauss, Resultate des magn. Vereins 1841, p. 26.

3) Wild, Exner's Rep. d. Physik. **20.** 1884. p. 12.

523, aber auch die übrigen Zahlen stimmen nur unvollständig überein, was vielleicht auf eine Unsicherheit in der nicht leichten Orientirung, oder auf Magnetismus des Ringes hinweist. Da überdies das berechnete Trägheitsmoment des Ringes mit einem constanten Fehler behaftet sein könnte, so sind auch in dieser Methode noch nicht alle Schwierigkeiten überwunden. In demselben Aufsatze weist Wild noch auf die Nothwendigkeit weiterer Untersuchungen mit den Worten hin:

„Eine aufmerksame Betrachtung der bezüglichen Gauss'schen, sowie ähnlicher Beobachtungen von Sartorius v. Waltershausen lässt indessen erkennen, dass die Bestimmung für die intermediären Entfernungen auffallend viel grössere Abweichungen zwischen Berechnung und Beobachtung ergeben, als die aus den extremen Stellungen abgeleiteten. Wir lassen es dahingestellt, ob dies auf eine ungenügende Theorie dieser Methode, welche allfällige aerodynamische und Reibungscorrectionen, sowie eigene Schwingungen der angehängten Gewichte nicht berücksichtigt, zurückzuführen sei oder nicht, jedenfalls fordert aber dieser Umstand zu eingehenderen Untersuchungen dieser Methode auf."

Eine andere schon von W. Weber gebrauchte Abänderung des Gauss'schen Verfahrens hat Dorn[1]) benutzt, welcher die Belastungscylinder auf Stifte feststeckt und die Schwingungsdauer der Combination bei zwei um 180° verschiedenen Stellungen der Belastung beobachtet. Auf die obere Fläche der Belastungscylinder ist je ein kleiner Kreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt in der Umdrehungsaxe liegt. Gemessen wird der Abstand der auf der Centrale liegenden Punkte beider Kreise. Unter den bisher veröffentlichten Bestimmungen von Trägheitsmomenten geben die auf obigem Wege gefundenen Resultate Dorn die grösste Genauigkeit.

Eine von allen genannten verschiedene Methode beschreibt E. Brassine.[2])

---

1) Dorn, Wied. Ann. **17.** p. 773. 1882.

2) E. Brassine, Compt. rend. **95.** p. 446. 1882. Beibl. **7.** p. 158. 1883.

Im Gegensatze zu den früheren, bei denen Magnetismus oder Torsion als Directionskräfte dienen, wird hier die Schwerkraft benutzt. Ein leichtes Pendel ist am unteren Ende mit einer horizontalen Scheibe versehen und dient zur Aufstellung des Körpers, dessen Trägheitsmoment gemessen werden soll. Zu ermitteln sind dann folgende Stücke: die Masse des Pendels, die Lage seines Schwerpunktes, die Schwingungsdauer ohne und mit Belastung, die Masse des Versuchsgegenstandes, die Lage des Schwerpunktes in demselben und dessen Abstand von der Aufhängeaxe des Pendels. Von diesen werden die beiden letzten nur in seltenen Fällen und nur mit äusserster Vorsicht zu einer Genauigkeit gebracht werden können, welche die Sicherheit des Endresultates in gleichem Grade verbürgen, wie eine der anderen Methoden.

In der neuesten Zeit wurden die Bestimmungsarten durch eine von allen früheren ebenfalls principiell verschiedene Methode, die bifilare Methode[1]) von F. Kohlrausch vermehrt, welche den Zweck hat, die Unsicherheiten der Belastungsmethode zu umgehen. Zu bestimmen ist die Directionskraft einer weiten bifilaren Aufhängung, die Schwingungsdauer der Suspension mit und ohne Versuchsobject. Einen Magnet legt man in zwei um 180° verschiedenen Richtungen nacheinander ein.

Angaben über die Sicherheit der Ausmessung bifilarer Directionskräfte und die ganze Theorie der bifilaren Aufhängung finden sich in der Arbeit über die Bestimmung der Horizontalintensität.[2]) Einen weiteren experimentellen Beitrag liefern die später (p. 300) beschriebenen Versuche, welche zugleich aufs neue die Vortheile der Methode gegenüber den früheren erkennen lassen.

In England ist noch eine andere Form der Trägheitsmomentbestimmung im Gebrauche, deren Resultate unter sich wohl übereinstimmen mögen, die aber zur Erlangung genauer Werthe wenig geeignet sein dürfte. Es wird, nachdem die Schwingungsdauer eines Magnets für sich bestimmt

---

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **22.** p. 411. 1884 u. Gött. Nachr. 1883. p. 411.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **17.** p. 765. 1882.

ist, unter denselben ein Cylinder aus unmagnetischem Metalle horizontal und symmetrisch zur Schwingungsaxe aufgehängt und abermals die Schwingungsdauer gemessen. Da das Trägheitsmoment des Belastungscylinders durch Rechnung gefunden werden kann, so wird dasjenige des Magnets mit den dazu gehörigen Theilen in bekannter Weise erhalten.

II. Störungsgründe.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Magnets nach der Gauss'schen Methode macht vier genaue Messungen erforderlich, eine Wägung, eine Abstandsmessung und zwei Schwingungsdauern. Die Sicherheit der Beobachtung von Schwingungsdauern ist leicht über die geforderte Grenze zu steigern, und der Fehler der Abstandsmessung kann durch sorgfältige Ausführung jedenfalls auch in den meisten Fällen bis zum nöthigen Betrage verringert werden. Obwohl aber gewiss alle Beobachter sämmtliche Stücke mit erforderlicher Genauigkeit gemessen haben, weichen doch die extremen Werthe bis $^1/_{300}$, in vereinzelten Fällen noch mehr voneinander ab. Dass das nach dieser Methode bestimmte Trägheitsmoment im Mittel auch noch zu gross ausfiel[1]), beachtete man früher nicht, wahrscheinlich weil das Resultat fast nie in anderer Weise controlirt wurde. Als Prof. Kohlrausch[2]), einen sehr genau cylindrisch gearbeiteten Stab untersuchte, dessen Trägheitsmoment auch aus der Form berechnete und es ausserdem durch seine Bifilarmethode bestimmte, machte er obige Bemerkung und veranlasste später diese Untersuchung.

Die Ursachen, welche das Trägheitsmoment zunächst ungenau zu machen geeignet sind, beeinflussen alle nur die Schwingungsdauer des belasteten Versuchsobjectes. Eine derselben hat Beling[3]) in einer neueren Schrift untersucht und dann gezeigt, dass die davon herrührenden Störungen, bei kurz aufgehängten Gewichten, mittelst einer einfachen Formel berücksichtigt werden können. Die dort behandel-

1) Beispiel p. 274 oben.
2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. p. 411.
3) Beling, Zur Theorie der Bifilaraufhängung, Breslau 1881.

ten störenden Kräfte treten infolge der selbständigen Pendelschwingungen der aufgehängten Gewichte auf und sind um so grösser, je länger die Aufhängefäden sind. Rechnet man seine Formel, die für die Bewegung eines bifilar aufgehängten Systemes gilt, für den schwingenden Magnet oder das Torsionspendel um, so findet man, dass die beobachtete Schwingungsdauer T mit einem Factor zu multipliciren ist, um jene $\mathfrak{T}$ zu erhalten, welche mit fest verbundenen Gewichten, also ohne Eigenbewegung derselben, gefunden werden würde.

Bedeutet:

D die Directionskraft,
m die Masse eines Belastungsgewichtes,
$2r$ den Abstand der beiden Gewichte,
λ die reducirte Pendellänge derselben,
g die Beschleunigung der Schwere,
k das Trägheitsmoment des Schwingungskörpers,

so ist:
$$\mathfrak{T} = T\left(1 - \frac{D m r^2 \lambda}{g(k + 2 m r^2)^2}\right).$$

Am Schlusse seiner Arbeit stellt **Beling** in einer Tafel die Resultate seiner Experimentaluntersuchungen zusammen, wobei eine auffallende Erscheinung auftritt, deren Ursache aus den mitgetheilten Erläuterungen über Messinstrumente und Messmethoden nicht erklärt werden kann. Ein bifilar aufgehängter Körper von bekanntem Trägheitsmoment und bekannter Masse schwingt bei einer Directionskraft, deren Grösse aus den Dimensionen des Apparates berechnet wird. Aus den beobachteten Daten wird dann die Schwerebeschleunigung bestimmt. Der grösste Unterschied zwischen den 47 in Betracht kommenden Resultaten beträgt ca. 0,000 007 des ganzen, zwischen den letzten 20 nur 0,000 002 des ganzen, während der Abstand der beiden Aufhängefäden nur auf ca. 0,00025 des ganzen Abstandes (3,3 mm) bestimmt werden kann. Dadurch allein würde aber schon in der Grösse g eine Unsicherheit von 0,0005 derselben bedingt sein.

Ausser der besprochenen lassen sich noch 2 Störungsursachen nachweisen, von denen die eine wie die frühere in

der Befestigung der Gewichte, die andere aber in der Aufhängung des ganzen Systemes begründet ist. Die erstere soll auf mathematischem Wege berücksichtigt, die letztere auf praktischem möglichst beseitigt werden.

In der Formel, welche das Trägheitsmoment darstellt, wird jenes der Hülfsbelastung angenommen als bestehend aus der Masse derselben, multiplicirt mit dem Quadrate ihrer Entfernung, ausserdem vermehrt um das Trägheitsmoment der Gewichte, bezogen auf die verticale Axe durch ihren Aufhängepunkt. Dieser letztere Theil würde aber nur dann ganz hierher gehören, wenn die Gewichte sich vollständig mit dem Magnete drehen müssten, d. h. wenn die Directionskraft der Aufhängefäden unendlich gross wäre.[1])

Schwingungen combinirter Pendel.

Die Bewegung des Magnets mit den Gewichten kann dreifacher Art sein, von diesen ist eine bei den wirklich vorkommenden Verhältnissen ausgeschlossen und eine andere oft zu vermeiden.

Um die drei möglichen Arten von Bewegungen anschaulicher zu machen, wollen wir statt des Torsionspendels zunächst zwei gewöhnliche Pendel betrachten, von denen eins am unteren Ende des anderen hängt. Die Schwingungen n solcher Pendel behandelt Daniel Bernoulli in dem Aufsatze: Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae.[2])

1) Einen ganz ähnlichen Gegenstand behandelt der Aufsatz von Lübeck „Notiz zu den Bessel'schen Pendelversuchen", Pogg. Ann. **150.** p. 476. 1873, wo der Einfluss der in den Bessel'schen Pendeln eingeschlossenen Flüssigkeit auf die Schwingungen derselben untersucht und die von Bessel gefundenen unregelmässigen Resultate berichtigt werden.

2) D. Bernoulli, Comm. Acad. sc. Petropolit. **6.** p. 108, 1738. — Ein besonderer Fall solcher Schwingungen hat schon Johann Bernoulli beschäftigt. Comm. Petrop. **3.** p. 13. 1732. Später hat Euler die Bernoulli'sche Arbeit zweifach erweitert. Comment. Petrop **8.** p. 30. 1741: „De oscillationibus fili flexilis quotcunque ponduscullis onusti", und Acta acad. scient. imper. Petrop. **3.** 1779: „De motu oscillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili suspensorum. Dasselbe Thema hat wieder Dumas in der Festschrift zur dritten

Erstens können jede beide Pendel gemeinsame Schwingungen von gleicher Dauer, aber ungleicher, von Masse und Länge derselben abhängiger Amplitude ausführen, wobei beide Pendel stets gleichzeitig die Ruhelage in gleicher Richtung passiren (I) Fig. 1. Die zweite Art unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass der Durchgang durch die Ruhelage wohl zu gleicher Zeit, aber in entgegengesetzter Richtung stattfindet (II). Fig. 2. Diese Bewegung hat stets eine kleinere Periode als die erste. Drittens können beide Pendel unregelmässig schwingen (III).

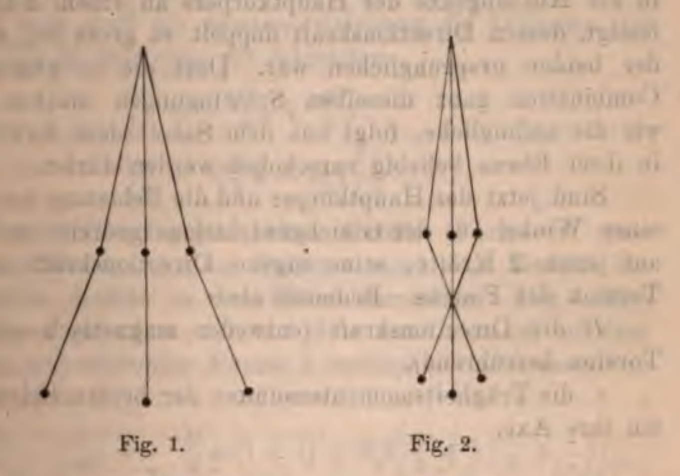


Fig. 1. Fig. 2.

Den drei für gewöhnliche Pendel bestehenden Schwingungsformen ganz analoge lassen sich auch bei Torsionspendeln nachweisen, doch sind die Verhältnisse hierbei insofern allgemeiner, als zwei verschiedene Kräfte zu Direc-

---

Säcularfeier des Berliner Gymnasiums zum grauen Kloster aus anderen Principien behandelt und mehrfach ausgedehnt.

Ausserdem findet sich noch dieser Stoff in Lagranges mécanique analytique, bei Minding, Crelle's Journ. **50.** p. 243, 1855, bei E. Sang, Proc. Edinb. Roy. Soc. 1859—60, bei Jackwitz, die unendlich kleinen Schwingungen eines aus zwei Massenpunkten bestehenden Pendels (im Raume), Progr. des Posener Gymnasiums 1882, bei Luxenburg, Ueber das zweigliedrige Pendel (im Raume), Zeitschr. f. Mathematik. **28.** p. 309. 1883 und bei Résal.

tionskräften verwendet sind, und weil die Ausschläge hier nicht, wie dort, auf sehr kleine beschränkt bleiben.

a) Schwingungen ohne beschränkende Voraussetzungen. — Das Torsionspendel mit zwei an gleichen, unbiegsamen, aber tordirbaren Fäden angehängten gleichen Belastungen kann man zunächst zu einem zweigliedrigen vereinfachen, indem man z. B. die Belastungen in ihren Schwerpunkten concentrirt denkt, sie also des Trägheitsmomentes um ihre verticale Axe beraubt und dafür die die jetzt gewichtslos gedachten Massen derselben zusammen in der Aufhängeaxe des Hauptkörpers an einem Faden befestigt, dessen Directionskraft doppelt so gross ist, als jene der beiden ursprünglichen war. Dass die so abgeänderte Combination ganz dieselben Schwingungen machen muss, wie die anfängliche, folgt aus dem Satze, dass Kräftepaare in ihrer Ebene beliebig verschoben werden dürfen.

Sind jetzt der Hauptkörper und die Belastung um irgend einen Winkel aus der Gleichgewichtslage gedreht, so wirken auf jenen 2 Kräfte, seine eigene Directionskraft und die Torsion des Fadens. Bedeutet also:

D die Directionskraft (entweder magnetisch oder von Torsion herrührend),

s die Trägheitsmomentensumme der beiden Belastungen um ihre Axe.

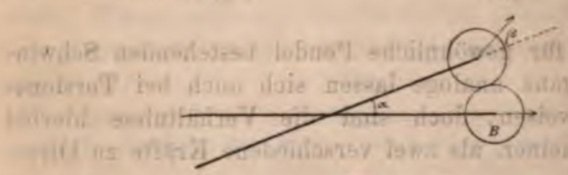


Fig. 3.

α den (für den Fall des Magnets kleinen) Winkel des Hauptkörpers gegen die Ruhelage, Fig. 3,

β den Winkel, um welchen die Belastung B gegen den Magnet gedreht ist,

Θ die doppelte Directionskraft eines Aufhängefadens der Gewichte,

K das Trägheitsmoment des Hauptkörpers,

$2l$ die Entfernung der beiden Aufhängefäden voneinander,

m die Massensumme beider Gewichte,

$S = K + ml^2$, $\varphi = \alpha + \beta$,

so kann man, ähnlich wie Euler in der citirten Schrift (p. 280) zur Definition der Bewegung, die Gleichungen aufstellen:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha + \frac{\Theta}{S}\beta. \tag{1}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\Theta}{s}\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2}. \tag{2}$$

Schreibt man statt der zweiten Gleichung die Differenz von (2) und (1), so entstehen die folgenden:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha + \frac{\Theta}{S}\beta. \tag{3}$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{D}{S}\alpha - \Theta\beta\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right). \tag{4}$$

Diese beiden Gleichungen haben dieselbe Form wie jene, welche die Bewegung eines Punktes unter dem Einfluss beliebig vieler Kräfte in der Ebene darstellen. Die beiden Gleichungen reduciren sich auf eine, wenn man (4) mit dem vorläufig unbestimmten Factor λ multiplicirt und dann von (3) subtrahirt.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \lambda\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha(1+\lambda) + \Theta\beta\left[\frac{1}{S} + \lambda\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right)\right]. \tag{5}$$

Durch Substitution von $\alpha = z + \lambda\beta$ folgt hieraus:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{D}{S}(1+\lambda)z + \beta\left[-\frac{D}{S}\lambda(1+\lambda) + \Theta\left(\frac{1}{S} + \lambda\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right)\right)\right]. \tag{6}$$

Die Grösse λ, über die noch frei verfügt werden kann, werde jetzt so bestimmt, dass der Factor von β in Gleichung (6) verschwindet. Aus dieser Gleichung entsteht so:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{D}{S}(1+\lambda)z, \quad \text{mit der Lösung:} \tag{7}$$

$$z = A\sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda)}}\sin\left[(t-B)\sqrt{\frac{D(1+\lambda)}{S}}\right] = \alpha - \lambda\beta. \tag{8}$$

Der Factor von β in (6) gleich 0 gesetzt, gibt 2 Werthe von λ:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{Ds - \Theta(S+s)}{2Ds}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta Ds^2}{[Ds - \Theta(S+s)]^2}}\right].$$

Infolge der beiden Werthe λ_1 und λ_2 spaltet sich Gleichung (8) in zwei:

$$\alpha - \lambda_1\beta = A_1\sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_1)}}\sin\left[(t-B_1)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}}\right]$$
$$\alpha - \lambda_2\beta = A_2\sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_2)}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}}\right].$$

Eliminirt man hier α und dann β, so entstehen die Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{\frac{S}{D}}\left\{\frac{A_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1}}\sin\left[(t-B_1)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}}\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{A_2\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_2}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}}\right]\right\} \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{\frac{S}{D}}\left\{\frac{A_1}{\sqrt{1+\lambda_1}}\sin\left[(t-B_1)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}}\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{A_2}{\sqrt{1+\lambda_2}}\sin\left[(t-B_2)\sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}}\right]\right\}. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen, welche im allgemeinsten Falle die Elongation des Hauptpendels und die der angehängten Gewichte für jeden Moment anzugeben gestatten, zeigen, dass von einer Schwingungsdauer im gewöhnlichen Sinne nicht die Rede sein kann. Die Bewegung der einzelnen Theile könnte verglichen werden mit jener einer aus 2 Wellen von verschiedener Länge zusammengesetzten Hauptwelle, deren graphische Darstellung die bekannte, oft fast regellos erscheinende Linie gibt. Nur wenn $\sqrt{1+\lambda_1}$ und $\sqrt{1+\lambda_2}$ commensurabel sind, entsteht in jedem Falle eine periodische Bewegung, weil dann nach einem gewissen constanten Zeitintervall beide der in (9) oder (10) enthaltenen Sinus wieder den gleichen Werth annehmen. Ertheilt man der Grösse Θ den Werth Null, so wird aus Gleichung (9):

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_1 S}{D}}\sin\left[(t-c_2)\sqrt{\frac{D}{S}}\right],$$

d. h. die Combination schwingt wie ein einfaches Torsionspendel mit dem Trägheitsmomente S.

Wächst Θ über alle Grenzen, dann entsteht aus (9) $\alpha = \sqrt{c_1(S+s)/D}\,\sin(t-c_2)\sqrt{D/S+s}$, das System schwingt

schwingt demnach wie ein Pendel mit dem Trägheitsmoment $K + ml^2 + s$.

Obgleich weder das Haupt- noch das Nebenpendel, wie die Betrachtung von α und β zeigt, eine Periode besitzen, so gibt es doch zwei Punkte in der Combination, die sich wie ein einfaches Pendel verhalten. Die beiden, entsprechend den 2 Werthen von λ, erhält man aus Gleichung (8). Da nämlich β den Winkel darstellt, um welchen eines der angehängten Gewichte gegen seine relative Ruhelage, also gegen die Richtung des Hauptkörpers gedreht ist, so gibt es auf dem Faden, an dem es hängt, oder auf dessen Verlängerung jedenfalls 2 Querschnitte, deren Drehung gegen jenen Körper $-\lambda\beta$ beträgt. Die ununbegrenzte Verlängerung nach oben und unten wird dabei so gedacht, dass der ganze Faden gleichmässig und in allen Theilen gleich dem wirklich vorhandenen Stück tordirt ist. Da die Drehung der genannten ausgezeichneten Querschnitte gegen den Hauptschwingungskörper $-\lambda\beta$ ist, dieser selbst aber gegen die eigene Ruhelage um α abweicht, so sind die Querschnitte im ganzen um $\alpha - \lambda\beta$ gedreht, und dieser Ausdruck hat nach (8) eine gewöhnliche Sinusperiode.

Würde man in einem der bezeichneten Querschnitte einen Spiegel mit dem Faden verbinden, so erhielte man die Schwingungsdauer desselben:

(Gl. 8) $$T' = \pi \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda)}},$$

ausserdem ist bekannt die Schwingungsdauer ohne Belastung:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

woraus K durch Elimination von D mittelst einer quadratischen Gleichung berechnet werden kann.

Leichter lässt sich dieselbe Erscheinung bei zwei combinirten ebenen Pendeln verfolgen. Auch hier besteht, wie man aus einer der p. 280 citirten Schriften, z. B. der von Dumas, ersehen kann, zwischen dem Winkel des Hauptpendels α (Fig. 3) und dem des Nebenpendels gegen das Hauptpendel β eine Beziehung von der Form:

$$\alpha + m_1 \beta = m_2 \sin m_3 t,$$

wenn m_1 bis m_3 Constante sind. In Fig. 4 sei AC zu i
einer Zeit die Lage des Hauptpendels, FC für dens
Augenblick die Richtung des angehä
Pendels, $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BCE =$
$\sphericalangle BAD = \alpha + m_1 \beta$, $\sphericalangle BAC =$
In dem Dreieck ABC verhält sich dann

$$BC : AC = \sin m_1 \beta : \sin (\beta - m_1 \beta)$$

oder für kleine Winkel β:

$$BC : AC = m_1 : 1 - m_1,$$

d. h. BC ist eine Constante, da sämm
anderen Glieder der Proportion ebenfalls
stante sind; dies gilt für jeden beliebigen
punkt während der Schwingungen. D
folgt, dass die Linie AB immer dens
Punkt in der Richtung des Nebenpendel
trifft, und da AB nach obiger Gleichung S
perioden hat, so hat auch die Bewegun
Schnittpunktes B solche. Der Punkt B kann bei pass
Wahl der Dimensionen beider Pendel natürlich auch zwi
C und F fallen.

Fig. 4.

b) Regelmässige Schwingungen. — Der Unters
dieser gegen die unregelmässigen besteht, wie aus p. 28
sichtlich ist, darin, dass beide Pendel stets gleichzeiti
Ruhelage passiren. Es muss demnach zwischen den Wi
der beiden gegen die Ruhelage α und β eine Beziehun
stehen, welche diese Bedingung enthält und zugleich
beiden Gleichungen (3) und (4) nicht widerspricht. Die
fachste derartige Beziehung ist $\beta = c\alpha$, wo c eine vorl
unbestimmte Constante ist.

Die Bewegung wird jetzt durch die 3 Gleichunge
stimmt:

$$\text{(a)} \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S}\alpha + \frac{\Theta}{S}\beta$$

$$\text{(b)} \quad \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \frac{D}{S}\alpha - \Theta\beta\left[\frac{1}{S} + \frac{1}{s}\right], \qquad \text{(c)} \quad \beta = c\alpha.$$

Die erste und letzte Gleichung liefern die Beziehung:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \alpha\left[-\frac{D}{S} + \frac{c\,\Theta}{S}\right]$$

mit der Lösung:

$$\text{(d)} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{n_1 S}{D - c\Theta}} \sin\left[(t - n_2)\sqrt{\frac{D - c\Theta}{S}}\right],$$

n_1 und n_2 sind Integrationsconstanten.

Die vorläufig unbestimmte Grösse c folgt aus den Gleichungen (a), (b) und (c) durch Elimination von α und β als:

$$\text{(e)} \qquad c = \frac{Ds - \Theta(S + s)}{2\Theta s}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta D s^2}{[Ds - \Theta(S + s)]^2}}\right].$$

Die Constante c ist zugleich das Verhältniss der Ausschlagsweiten beider Pendel. Durch Vergleichung derselben mit der Constanten λ p. 284 folgt:

$$\text{(f)} \qquad c\Theta = -\lambda D.$$

Die Dauer der regelmässigen Schwingungen erhält man aus Gleichung (d), sie ist:

$$T = \pi\sqrt{\frac{S}{D - c\Theta}}.$$

Ersetzt man hierin $c\Theta$ der Gleichung (f) gemäss durch $-\lambda D$, so geht die Beziehung für die Dauer der regelmässigen Schwingungen in jene für die ausgezeichneten Punkte bei unregelmässigen (p. 285) über. Daraus geht hervor, dass die beiden Punkte unter allen Umständen eine constante Schwingungsdauer besitzen.

Ebenso wie auf p. 285 könnte jetzt das Trägheitsmoment K des Hauptpendels einer beliebig gegebenen Combination aus regelmässigen Schwingungen gefunden werden.

c) Dreigliedriges Pendel. — Bisher war stets vorausgesetzt, dass die beiden an das Hauptpendel angehängten Gewichte gleiche Schwingungsdauer um ihre Axe besitzen, und infolge dessen konnten sie als ein einziges betrachtet werden. In praktischen Fällen ist diese Gleichheit der Schwingungsdauern nur schwer erfüllbar, und es ist deshalb von grossem Vortheil, dass auch ohne dieselbe alles Frühere Geltung hat, wenn man nur aus den beiden Torsionsdirectionskräften der Aufhängefäden das arithmetische Mittel nimmt. Aus den 3 Differentialgleichungen für das dreigliedrige Pendel kann dieses in einfacher Weise geprüft werden. Insbesondere ist sofort ersichtlich, dass ungleiche

Schwingungsdauern der beiden Gewichte um ihre Axe unmöglich die Aufhängeaxe des Magnets aus ihrer Lage bringen können, da jedes Drehungsmoment für sich allein schon ein Kräftepaar und zwar unter allen Umständen nur ein solches bedingt.

Nicht so einfach ist die Sachlage für die gewöhnlichen Pendelschwingungen der angehängten Gewichte, welche Beling (s. p. 278) behandelt hat, indem verschiedene Schwingungsdauern derselben hier zu bedeutenden Störungen Veranlassung geben können, so lange die Drehungsaxe des Hauptschwingungskörpers nicht unveränderlich gemacht wird. Solche Schwingungen sind die zweite der auf p. 279 erwähnten Hauptursachen fehlerhafter Bestimmungen des Trägheitsmomentes, indem sie nicht nur direct die Schwingungsdauer beeinflussen, sondern auch den Schwerpunkt des Magnets hin und her stossen. Es ist auch hierdurch besonders die Erscheinung zu erklären, dass unter Beibehaltung der gleichen Verhältnisse verschiedene Schwingungsdauern erhalten werden, insbesondere, wenn man zwischen 2 Beobachtungssätzen den Magnet beruhigt und ihn dann von neuem, etwas rascher oder langsamer wie vorher, wieder anstösst. Warum der Schwerpunkt mit bewegt wird, ist in dem Falle leicht zu sehen, wo die Pendelschwingungen der Gewichte, auch bei Aufhängung an gleichlangen Fäden, unregelmässig ausgeführt werden. In diesem Falle greifen ja nicht mehr Kräftepaare an dem Magnet an, sondern den unregelmässigen, selbständigen Schwingungen entsprechend greifen an beiden Enden des Magnets in jedem Augenblicke von einander unabhängige verschiedene und verschieden gerichtete Kräfte an, die sich immer in ein Kräftepaar und eine einseitig angreifende Kraft zerlegen lassen. Ungleiches Gewicht der beiden angehängten Massen, sowie ungleicher Abstand vom Aufhängepunkte vergrössern das Uebel. Haben die Aufhängefäden auch noch ungleiche Länge, so treten die einseitigen Kräfte in jedem Falle auf, auch bei einer der mit I und II p. 281 bezeichneten Schwingungsformen. Aus den Resultaten der Untersuchungen Euler's (p. 280) geht nämlich hervor, dass die Amplituden zweier ungleich langer,

an demselben Punkte des Hauptpendels befestigten Nebenpendel von gleicher Masse ungleich sind. Auch aus der regelmässigen Schwingungsart dreier Pendel lässt sich durch einfache Schlüsse dieselbe Thatsache folgern. Haben aber beide angehängte Gewichte verschiedene reducirte Pendellängen, folglich verschiedene Amplituden, so können die auftretenden Kräfte wieder kein reines Kräftepaar bilden. Die Störungen wären natürlich am grössten, wenn man einem der Gewichte die Pendellänge Null, dem anderen eine endliche zutheilen würde.

III. Vereinfachung der Gleichungen durch passend gewählte Verhältnisse.

a) Unregelmässige Schwingungen. — Bestimmt man das Trägheitsmoment eines Magnets, so kann das der angehängten Cylinder um ihre Axe (s) immer bedeutend kleiner gemacht werden, als die Summe S, und auch die Regulirung der Torsionskraft Θ bietet keine Schwierigkeiten. Bei passender Wahl dieser Grössen werden sowohl Beobachtung als Rechnung bedeutend einfacher. Während aus Gleichung (9) im allgemeinen Falle eine einigermassen leicht beobachtbare Schwingungsdauer gar nicht erhalten werden konnte, ist dieselbe für ein kleines λ_1 oder λ_2 äusserst einfach. Ist z. B. λ_1 gegen λ_2 klein, was durch die Kleinheit des Ausdruckes $\Theta D s^2 / [Ds - \Theta(S+s)]^2$ (p. 284) bedingt ist, so hat der zweite Sinus in Gleichung (9) entsprechend einen kleinen Einfluss auf die Periode von α. Die beobachtete mittlere Schwingungsdauer T' des Magnets kann man deshalb gleichsetzen:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_1)}} = \pi \sqrt{\frac{K + m l^2}{D(1+\lambda_1)}}.$$

Die Schwingungsdauer ohne Belastung ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

aus diesen beiden findet man durch Eliminiren von D:

$$K = m l^2 \frac{T^2}{T'^2(1+\lambda_1) - T^2}, \tag{13}$$

oder angenähert, wenn $ml^2 + s = k$:

$$K = (m l^2 - \lambda_1 S) \frac{T^2}{T'^2 - T^2} = (k - \lambda_1 S - s) \frac{T^2}{T'^2 - T^2}.$$

Wird die Torsionskraft $\Theta = 0$, so wird auch $\lambda_1 = 0$ und $K = ml^2 T^2/(T'^2 - T^2)$, worin das Trägheitsmoment der Gewichte um ihre Axe (s) ganz fehlt.

Sind Θ und D nicht sehr viel voneinander verschieden, so genügt schon zu demselben Zwecke, dass s/S eine kleine Grösse ist. Für beide bezeichneten Fälle wird auch der allgemeine Ausdruck für λ_1 zur Ausrechnung bequemer, indem angenähert entsteht:

$$\lambda_1 = \frac{\Theta s}{D s - \Theta (S + s)}.$$

Diese Form von λ_1, sowie die Gleichung (13) sind bei der Berechnung der angestellten Versuche benutzt worden.

b) Regelmässige Schwingungen (p. 286). — Dieselben entstehen, wenn man den Ablenkungen α und β von Haupt- und Nebenpendel das Verhältniss $1 : c$ ertheilt, beruhigt und von dieser Lage aus die Bewegung beginnen lässt. Da dieses für die Combination, wie sie zur Bestimmung von Trägheitsmomenten dient, kaum auszuführen ist, so scheint es, als ob diese Schwingungsform für solche Messungen keine Bedeutung hätte. Doch hat schon Daniel Bernoulli die Bemerkung gemacht, dass regelmässige Schwingungen auch entstehen — jedenfalls nur infolge der Reibung an den Aufhängepunkten und in der Luft —, wenn die dazu nothwendigen Bedingungen nur annähernd erfüllt sind. Dass das Gleiche auch von Torsionspendeln gilt, davon habe ich mich durch Versuche überzeugt.

Bei der zu Trägheitsmomentbestimmungen gebräuchlichen Pendelcombination ist es nun oft ohne viele Vorbereitungen möglich, die Bedingungen regelmässiger Schwingungen annähernd zu erfüllen, nämlich immer dann, wenn das Verhältniss der Ausschläge des zweiten Pendels zum ersten c:

$$c = \frac{-\Theta (S + s) + D s}{2 \Theta s} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \Theta D s^2}{[D s - \Theta (S + s)]^2}} \right]$$

recht klein ist. In diesem Falle ist es hinreichend, nur das Hauptpendel abzulenken und nach Beruhigung des Ganzen wieder loszulassen.

Wie früher λ, so wird auch hier c sich einfacher darstellen, wenn $4\,\Theta D s^2/[Ds - \Theta(S+s)]^2 = \delta$ eine kleine Zahl wird:

$$c_1 = \frac{-Ds}{Ds - \Theta(S+s)}; \quad c_2 = \frac{-\Theta(S+s)+Ds}{\Theta s}\left[1 + \frac{\Theta D s^2}{[\Theta(S+s) - Ds]^2}\right].$$

Sind Θ und D nicht viel verschieden, so wird für kleines s/S sowohl δ als c_1 eine kleine Zahl.

Das Trägheitsmoment des Hauptpendels findet sich hier, wie auch sonst immer, aus den beiden Gleichungen für die Schwingungsdauer mit und ohne Belastung:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{S}{D - c_1\Theta}} \quad \text{und} \quad T = \pi\sqrt{\frac{K}{D}},$$

durch Eliminirung von D, unter Berücksichtigung der Beziehung $S = K + ml^2$ als:

$$K = ml^2\frac{T^2}{T'^2\left(1 - c_1\dfrac{\Theta}{D}\right) - T^2}; \tag{14}$$

näherungsweise findet man auch die Beziehung:

$$K = [ml^2 + s(1+c_1)]\frac{T^2}{T'^2 - T^2} = (k + c_1 s)\frac{T^2}{T'^2 - T^2}.$$

Die zur Berechnung von c_1 dienende Grösse S braucht natürlich nicht genau bekannt zu sein.

IV. Versuche.

Gegenstand der vielfachen Versuche waren zwei möglichst sorgfältig cylindrisch abgedrehte Magnete,

deren Länge . .	16,009 cm	und	20,006 cm
„ Durchmesser	1,48 „	„	1,52 „
„ Masse . . .	216,13 g	„	279,96 g

betrug. Ihr magnetisches Moment war im Mittel:

5000 [cm, g] und 7240 [cm, g].

Der Umfang des längeren Stabes wurde an vier gleichweit voneinander entfernten Stellen mittelst eines sehr dünnen Drahtes gemessen, welcher zehnmal um den Magnet geführt war. Dadurch wurde gefunden, dass der Durchmesser desselben vom Südpol gegen den Nordpol wächst, und zwar von der ersten zur zweiten Messstelle um 0,0021 cm, von der zweiten zur dritten um 0,0016 cm, von der dritten zur vierten um 0,0054 cm. Der kürzere Stab war vor einem Jahre nach den Vorschriften von Strouhal und Barus magnetisirt, der längere kurz vor seiner Verwendung in gleicher Weise. Durch die in der Mitte durchbohrten Magnete wurde ein Kupferstift gesteckt, der an einem 265 cm langen, 0,010 cm dicken harten Messingdraht mit dem Torsionscoëfficienten 0,002 angelöthet war.

Die 3 Paare der zur Belastung dienenden Kupfergewichte waren Cylinder:

Nr.	Masse m	Radius ϱ	Höhe	Trägheitsm. $\frac{1}{2} m \varrho^2$
I	98,135 g	0,692 cm	3,7 cm	23,5 [cm,g]
II	200,437 „	0,692 „	7,5 „	48,0
III	193,105 „	0,945 „	3,8 „	86,2

Da verarbeitetes eisenfreies Kupfer bis vor kurzem ziemlich selten war, so wurden die sechs Belastungscylinder auch auf Magnetismus geprüft. Als ein zu solchen Prüfungen vorzüglich geeignetes Instrument wurde das transportable Intensitäts-Bifilarvariometer[1]) benutzt, indem ein Magnetende dem vorderen Glasverschluss durch Drehung am Torsionskopfe möglichst genähert, und dann der zu prüfende Körper von aussen bis zum Glase geschoben wurde; dabei ändern die meisten Körper die Einstellung des Magnets. Es gaben die beiden Cylinder I diamagnetische Ablenkung von 0,2 Scalentheilen, die Gewichte II magnetische von 4,4 Scalentheilen, die Gewichte III magnetische von 4 Scalentheilen, während 1 mg Eisen von etwa 1 mm Länge aus derselben Entfernung den Magnet um 800 Sca-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **15.** p. 533. 1882.

lentheile ablenkte. Um auch noch das Moment des in den Kupfergewichten während der Trägheitsmomentbestimmung inducirten Magnetismus kennen zu lernen, wurde auf Vorschlag von Prof. Kohlrausch eine Methode benutzt, die hier wie bei ähnlichen Zwecken vollständig zum Ziele führt. Eine Magnetnadel wurde durch einen Ablenkungsstab und durch denjenigen Magnet, dessen Trägheitsmoment mittelst der Gewichte gemessen war, senkrecht zum magnetischen Meridian abgelenkt. Darauf wurden die Gewichte II in einem Abstande von 14 cm von der Nadel ungefähr in die Lage gebracht, die sie während der Schwingungsbeobachtungen bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes einnehmen. Die Nadel änderte dadurch ihre Einstellung um ungefähr 0,1 Scalentheil, indessen ein Stab mit dem Magnetismus 5000 [cm g] aus 1 m Entfernung um 70 Scalentheile ablenkte. Daraus lässt sich das magnetische Moment eines Gewichtes auf 0,02, beider Gewichte zusammen von 0,04 [cm,g] schätzen, ein Betrag, der auf die letzte berechnete Stelle des Trägheitsmomentes keinen Einfluss mehr hat. Die Kupfercylinder wurden mittelst verschieden dicker (0,06 bis 0,18 mm) weicher Messingdrähte an den Magnet gehängt, über dessen Enden zur Verhütung des Anstreifens der Drähte vorspringende leichte Kupferkappen steckten.

Der Abstand beider Fäden wurde durch einen Comparator mit zwei Mikroskopen ermittelt. Die beiden letzteren besassen ca. 0,1 mm Theilungen, und wurden auf die Fäden mit bestimmten Strichen eingestellt, deren Abstand nachher durch Visiren nach einem Normalmeter gemessen wurde.

Genauigkeitsgrenzen. Trägheitsmomente von Magneten werden meistens zum Zwecke der Messung der erdmagnetischen Horizontalintensität gesucht. Will man diese letztere, wie manche beabsichtigen, bis auf ± 0,0001 des ganzen Werthes (ungefähr den Betrag, welcher im Durchschnitt bei Bifilarvariometern als Scalenwerth verwendet wird), genau kennen, so darf das Trägheitsmoment des schwingenden Stabes höchstens ± 0,0002 Fehler besitzen. Dieses Trägheitsmoment wird nun erhalten aus der Gleichung:

$$K = k \frac{t^2}{t'^2 - t^2},$$

t ist die Schwingungsdauer des Magnets allein,

k das hinzugefügte Trägheitsmoment,

t' die Schwingungsdauer nach Vermehrung des Trägheitsmoments.

$$k = m\,(l^2 + \tfrac{1}{2} r^2),$$

m die Masse beider Belastungscylinder zusammen,

l deren halber Abstand,

r deren Radius.

$\log K = \log k + \log t^2 - \log (t'^2 - t^2)$, durch Differentiren:

$$\frac{dK}{K} = \frac{dk}{k} + 2\frac{dt}{t}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2} - 2\frac{dt'}{t'}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2}.$$

Ist noch r klein gegen l, und $(dm/m) = 0$, so wird nahezu:

$$\frac{dK}{K} = 2\frac{dl}{l} + 2\frac{dt}{t}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2} - 2\frac{dt'}{t'}\frac{t'^2}{t'^2 - t^2}.$$

Bei den beiden in Frage kommenden Magneten war die Grösse $2t'^2/(t'^2 - t^2)$ zwischen 2,7 und 3,9. Aus einigen Probebeobachtungen kann dt/t und dt'/t' auf etwa $\pm 0{,}00003$, und dl/l auf $\pm 0{,}00005$ geschätzt werden, wenn dl, dt und dt' die Fehler von l, t und t' bezeichnen. Daraus ergibt sich das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers von K zu K selbst:

$\pm\,0{,}00015$ im günstigeren Falle, und

$\pm\,0{,}00019$ im ungünstigeren Falle $\left(\text{für } 2\frac{t'^2}{t'^2 - t^2} = 3.9\right)$.

Ausschliessung einiger möglichen Störungsursachen. Da nach Beseitigung der bis auf p. 288 und 289 besprochenen Fehlerquellen durch Aufhängung der Gewichte an Drähte von grosser Torsionskraft und Berücksichtigung der selbständigen Schwingungen derselben sowohl um ihre Axe, als uach um den Aufhängepunkt, die Unterschiede der einzelnen Werthe grösser blieben, als erwartet worden war, so wurden mögliche störende Einflüsse für sich untersucht.

Luftstörungen. Um zu entscheiden, ob die niemals ganz zu vermeidenden Luftströmungen die Schwingungsdauer merkbar beeinflussen, liess man den unbelasteten Magnet bei

geschlossenem und dann bei ganz offenem Kasten schwingen. Die beiden wiederholt erhaltenen Resultate waren aber nur um die gewöhnlichen Beobachtungsfehler verschieden. Versuche über den Einfluss von Luftströmungen auf einen schwingenden Körper wurden in neuerer Zeit von Braun[1]) angestellt. Die durch den Schwingungskörper verdrängte Luft hat nur bei Schwingungen in nicht horizontaler Ebene einen Einfluss, die durch denselben mitbewegte Luft müsste durch besondere Versuche, wie Bessel in seinem Werke über das Secundenpendel gezeigt hat, eliminirt werden. In den meisten Fällen von Trägheitsmomentbestimmungen, besonders von Magneten, ist der davon herkommende Einfluss wegen der geringen Ausdehnung und der kleinen Geschwindigkeit jedenfalls sehr gering, wie auch aus den Versuchen von E. Bödeker[2]) hervorgeht. Lamont[3]) schliesst aus Beobachtungen, die er gemeinsam mit Kuhn gemacht, dass eine Luftschicht von 4 mm Dicke an dem Magnet hängend gedacht werden müsse. In neuester Zeit hat noch Baille[4]) sich mit dem Einfluss der Luft, — deren Temperatur und Druck variirt wurde — auf einen schwingenden Körper beschäftigt.

Bei den hier mitgetheilten Versuchen wurde der Einfluss der Luft vernachlässigt, da derselbe nicht durch specielle Untersuchung nachgewiesen ward, und da aus den Versuchen Bödeker's auf die Geringfügigkeit desselben geschlossen werden kann.

Logarithmisches Decrement. Ebenso wenig konnte ungleichmässig sich ändernde Dämpfung Störungen von dem erhaltenen Betrage verursachen, indem die vielen, auf längere Zeit ausgedehnten Versuche das logarithmische Decrement des unbelasteten Magnets fast constant erscheinen liessen (0,00040 bis 0,00043). Viel grössere Unterschiede zeigte es aber bei den Schwingungen mit Belastung sowohl innerhalb

1) Braun, Exner's Repert. d. Physik. **20.** p. 821. 1884.

2) E. Bödeker, Versuche zur Bestimmung des Luftwiderstandes bei kleinen Geschwindigkeiten. Göttingen 1881.

3) Lamont, Pogg. Ann. **71.** p. 124. 1847.

4) Baille, Compt. rend. **96.** p. 1493. 1883.

derselben Beobachtungsreihe, als auch besonders von einer zur anderen. Die einzelnen Bestimmungen mit Gewichten II gaben Werthe zwischen 0,00068 bis 0,00086, mit Gewichten I von 0,00052 bis 0,00065.

Von Interesse sind noch die Erscheinungen, die dann auftreten, wenn die Belastungscylinder ungefähr gleiche eigene Schwingungsdauer um ihre Axe besitzen, wie der belastete Magnet. z. B. wurde mit Gewichten III als logarithmisches Decrement gefunden 0,0035 bis 0,0008, während die Schwingungsdauer von kleineren zu grösseren Werthen anstieg:

Aus 23	Schwingungen	13,100	Sec.
„ 28 folg.	„	13,136	„
„ 28 „	„	13,154	„
„ 28 „	„	13,170	„
„ 64 „	„	13,179	„

Bei diesem Versuche war der Magnet, um ihn in Bewegung zu setzen, durch einen zu ihm senkrechten Stab abgelenkt, dann beruhigt und plötzlich losgelassen worden.

Electricität. Hängen die Gewichte an Seidenfäden, so wäre es nicht unmöglich, dass dieselben während der Bewegung electrisch werden und infolge dessen die Schwingungsdauer beeinflussten, aber auch hier ergab die Untersuchung ein negatives Resultat.

Inconstanz des Stabmagnetismus. Da möglicherweise der Magnetismus des Schwingungsstabes während der mit ihm vorgenommenen Manipulationen etwas variabel sein könnte, besonders wenn er, wie hier, längere Zeit im magnetischen Meridian hängt, und dadurch eine kleine Verstärkung durch Induction erfahren konnte, so ward die Constanz auf zweierlei Weise geprüft. Einmal lenkte der gut befestigte Magnet aus grosser Nähe die Nadel eines Magnetometers ab, während er durch schwache Schläge erschüttert wurde. Dabei blieb die Nadeleinstellung constant. Nachdem der Stab wieder mehrere Tage die Richtung des Meridians hatte, ward seine Schwingungsdauer gemessen und nach einigen kleinen Stössen abermals. Für die gleiche Anzahl Schwingungen, auf gleiche Verhältnisse reducirt, ergaben sich

die Zeiten: 1758,45 und 1758,50 Sec. Die Constanz lässt nichts zu wünschen übrig.

1) Trägheitsmoment des kleinen Magnets.

a) Gauss'sche Methode. Die Messungen wurden mit allen von Gauss angegebenen und von Goldschmidt[1]) mitgetheilten Vorsichtsmaassregeln ausgeführt. Die Intensitätsvariationen gab das transportable Bifilarvariometer (p. 292), die Schwankungen des Stabmagnetismus mit der Temperatur wurden aus dem Temperaturcoëfficienten berechnet, der für den kleinen, resp. grossen Stab 0,00050 und 0,00045 beträgt.

Die Gewichte waren, um einen grossen Werth von Θ und darum geringe Correction zu erzielen, an (weichen) Messingdraht von 0,007 bis 0,018 cm Dicke aufgehängt. Das Trägheitsmoment wurde aus Gleichung (13) p. 289 und (14) p. 291 berechnet, da die Constante λ_1 sehr klein war.

Tabelle 1.

Versuche mit Gewichten an Metalldrähten.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$k_{[cm, g]}$	$K_{[cm, g]}$	d	δ	$l_{(cm)}$	Draht-dicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
8,040	10,5107	6,8752	6367,9	4671,0	−1,2	+1,5	2,0	0,007	1,0	I
8,036	10,5216	6,8867	6361,0	4677,5	+5,3	1,5	2,1	0,007	1,0	I
8,0567	10,6223	6,9399	6394,7	4671,1	1,1	1,4	3,2	0,018	0,4	I
8,0547	10,6190	6,9378	6390,9	4668,5	−3,7	1,3	2,1	0,013	0,5	I
8,0702	13,4357	6,9354	13103,0	4673,6	+1,4	1,3	3,0	0,018	0,5	II
8,0551	10,6170	6,9361	6392,4	4673,8	+1,6	1,4	3,2	0,013	0,8	I
8,0498	13,4007	6,9314	13036,2	4670,9	−1,3	1,4	3,2	0,013	1,0	II
8,0510	10,6137	6,9377	6392,9	4671,9	−0,3	1,3	2,8	0,013	0,6	I
8,0472	13,4140	6,9397	13027,0	4669,9	−2,3	1,5	3,3	0,013	0,9	II
8,0710	10,6314	6,9408	6416,6	4675,1	+2,9	1,4	2,8	0,013	0,7	I
8,0468	13,4104	6,9384	13027,6	4670,9	−1,3	1,4	2,8	0,013	1,0	II
			Mittelwerth	4762,20						

In der vorstehenden Tab. 1 ist

r der halbe gemessene Abstand der beiden Drähte, an denen die Gewichte hingen,

t' die Schwingungsdauer mit Belastung,

t die Schwingungsdauer ohne Belastung,

K das corrigirte Trägheitsmoment des Magnets mit Aufhängestift und Spiegel nach Abzug der Kappen [92,6] p. 293.

1) Goldschmidt, Resultate des magnet. Vereins 1840. p. 131.

δ die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente K und dem aus der gebräuchlichen Rechnungsform hervorgehenden,

d die Abweichung vom Mittelwerthe,

l die Länge des Aufhängedrahtes beider Gewichte.

T die Schwingungsdauer der Gewichte um ihre Axe.

k p. 294.

Zur besseren Erkenntniss der aus Abänderung verschiedener Bestimmungsmittel hervorgehenden Gesetzmässigkeiten werden die Mittelwerthe gebildet:

	Trägheitsmoment Magnet allein
Gewichte I . . .	4672,40
„ II . . .	4671,03
Draht 0,018 cm . .	4672,05
„ 0,013 „ . .	4671,27
„ 0,007 „ . .	4673,95

Versuche mit Gewichten an Seidenfäden. Eine Messung wurde mit an Seidenfäden hängenden Gewichten ausgeführt und gab:

r	t'	t	K'	K	l cm	T	Nr. der Gewichte
8,0336	13,1939	6,9360	4701,0	4671,6	3,0	38	III

K' ist nach der gewöhnlichen Formel ohne Correction (p. 294) berechnet, in K ist der Einfluss der Torsion der Seidenfäden corrigirt.

Der Unterschied zwischen dem uncorrigirten Werthe und denen von Tab. 1 (ungefähr $^1/_{200}$ des Ganzen) zeigt zur Genüge, welch grossen Betrag die Correction bei Aufhängung an Seidenfäden in vielen Fällen erreichen kann. Dass in obiger Bestimmung bei Verwendung von 3 cm langen Seidenfäden der corrigirte Werth dem wahren so sehr nahe kommt, dürfte Zufall sein.

Kurze Aufhängung der Gewichte an Metalldrähten. Um den Einfluss der zweifachen selbständigen Schwingungen noch mehr zurückzudrängen, wurden die freien Längen der Aufhängedrähte durch Entfernung der auf dem

Magnete sitzenden Kappen verkürzt. Statt dieser wurden zwischen das Ende des Magnets und den Draht kleine Messingkeile eingeschoben, deren Trägheitsmoment wegen ihrer Kleinheit leicht mit mehr als genügender Genauigkeit berechnet werden konnte. Die Resultate der folgenden Tab. 2 sind mittelst solcher Keile erhalten. Die Buchstaben haben die Bedeutung von Tab. 1.

Tabelle 2.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$k_{[cm, g]}$	$K_{[cm, g]}$	d	δ	l_{cm}	Draht-dicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
8,1394	13,4977	6,8721	13333,6	4667,4	−3,0	1,1	1,0	0,013	0,6	II
8,0968	13,4393	6,8700	13191,2	4667,6	−2,8	1,0	1,3	0,010	0,5	II
8,0896	10,5994	6,8696	6448,7	4671,8	+1,4	0,9	1,3	0,010	0,6	I
8,1052	13,4635	6,8773	13219,1	4668,1	−2,3	1,1	1,4	0,013	0,5	II
8,1040	13,4652	6,8794	13215,5	4669,1	−1,3	1,1	1,5	0,013	0,5	II
8,0891	10,6047	6,8734	6447,8	4672,0	+1,6	0,9	1,2	0,010	0,6	I
8,0940	10,6038	6,8704	6455,8	4672,1	+1,7	0,9	1,2	0,010	0,6	I
8,1381	13,4960	6,8741	13242,7	4670,7	+0,3	1,1	1,2	0,010	0,6	II
8,1140	10,6373	6,8825	6490,1	4674,1	+3,7	0,8	1,1	0,007	0,9	I
8,1032	13,4506	6,8721	13178,5	4668,1	−2,3	1,0	1,1	0,013	0,5	II
8,0957	10,6090	6,8715	6457,3	4667,7	−2,7	0,8	1,3	0,007	0,7	I
8,0969	13,4358	6,8721	13190,9	4675,6	−4,8	1,0	1,3	0,010	0,5	II
			Mittelwerth	4670,36						

Bestimmungen mit	Mittelwerthe aus Tab. 2	Mittelwerthe aus Tab. 1
Gewichten II (200 g) . . .	4669,2	4671,0
„ I (100 g) . . .	4671,2	4672,4
Draht 0,013 cm Dicke . . .	4667,9	4671,3
„ 0,010 „ „ . . .	4671,3	—
„ 0,007 „ „ . . .	4670,6	4673,9
Gewichten II an Draht 0,013	4667,9	4671,1
„ II „ „ 0,010	4670,0	—
„ I „ „ 0,010	4671,7	—
„ I „ „ 0,007	4670,6	—
„ I „ „ 0,013	—	4672,0
Gesammtmittel	4670,1	4671,9

Die vorstehende Zusammenstellung dient zur Vergleichung verschiedener Mittelwerthe aus Tab. 1 und 2. Alle Werthe gelten für den 16 cm langen Magnet ohne Aufhängestift und Spiegel.

Die Uebereinstimmung der Mittelwerthe aus beiden Beobachtungsreihen in Tab. 1 und 2 könnte besser sein. Die Differenz kommt zum Theil jedenfalls von dem nicht genau zu messenden Trägheitsmoment der beiden Kupferkappen, die bei den Messungen der ersten Tabelle auf dem Magnet sassen. Mit Sicherheit lässt sich ein zweiter Grund aus obigen Werthen feststellen. Infolge der Biegung des Aufhängedrahtes über der Ecke des Keiles oder der Kupferkappe wird derselbe sich nicht senkrecht hängen, sondern je nach der Grösse seines Durchmessers mehr oder weniger geneigt sein. Der gemessene Abstand beider Drähte wird darum kleiner sein als die Entfernung der Schwerpunkte beider Gewichte, was den Werth des berechneten Trägheitsmomentes zu klein erscheinen lässt. Da die Drähte bei den Versuchen der Tab. 1 länger waren, als bei denen der Tab. 2, so zeigt sich dieser Fehler hier auch grösser als dort. Ebendeshalb sind auch die mit den dicken Drähten erhaltenen Werthe im allgemeinen kleiner als die durch Benutzung der dünnen gewonnen. Es lässt demnach auch die bisherige Anwendung von Drähten zum Anhängen der Gewichte, obwohl sie bedeutende Vortheile gegenüber den gebräuchlichen Seidenfäden bietet, manche Unsicherheiten bestehen.

b) Bestimmung durch bifilare Aufhängung.[1]) Zur Controle der erhaltenen Resultate wurde der Magnet mittelst des bifilaren Verfahrens untersucht. Es sei

g die Schwerebeschleunigung,

m die ganze aufgehängte Masse vermehrt um die halbe Masse der Aufhängedrähte,

e_1 und e_2 der obere und untere Abstand der Aufhängedrähte,

l das Mittel aus beiden Drahtlängen, vermindert um $\varrho^2 \sqrt{2\pi E/m}$,

ϱ der Radius des Drahtes,

E der Elasticitätsmodul der Substanz,

---

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. p. 411. — Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

D_2 die Directionskraftsumme beider Drähte.

Die vollständige bifilare Directionskraft ist dann:

$$D = g m \frac{e_1 e_2}{4 l} + \frac{2\pi}{5} \frac{\varrho^4 E g}{l} = g m \frac{e_1 e_2}{4 l} + D_2 ,$$

und das Trägheitsmoment der angehängten Masse:

$$K = \frac{D t^2}{\pi^2} ,$$

t ist die Schwingungsdauer des Apparates.

unbelastet		durch den Magnet belastet	
l =	267,317 cm	l =	267,842 cm
e_1 =	11,972 „	e_1 =	11,972 „
e_2 =	12,036 „	e_2 =	12,036 „

$g = 980{,}99$ [cm, g]
$\varrho = 0{,}043$ cm

Suspension	63,19 g
Magnet . .	216,13 „
Draht . . .	0,13 „
m =	279,45 g

$$D_{\text{ohne Magnet}} = 980{,}99 \,.\, 63{,}32 \frac{11{,}972 \,.\, 12{,}036}{4 \,.\, 267{,}317} + 0{,}7 = 8371{,}1 \text{ [cm, g]},$$

$$D_{\text{mit Magnet}} = 36893{,}2 , \quad t_{\text{unbelastet}} = 0{,}69052 \text{ Sec.}$$

$$t_1 = 1{,}15008 \text{ Sec.}, \quad t_2 = 1{,}18060 \text{ Sec.},$$

t_1 und t_2 sind die Schwingungsdauern des Apparates, wenn der Nordpol des eingelegten Magnets 1) nach Norden, 2) nach Süden gerichtet ist.

Trägheitsmoment der Suspension 404,4 [cm, g]:

$$K = 4669{,}7 \text{ [cm, g]}.$$

c) Trägheitsmoment aus der Form berechnet. Um auch noch ein Urtheil über die Homogenität des untersuchten Stahlstabes zu erlangen, wurden die Dimensionen abgemessen und das Trägheitsmoment unter Voraussetzung der Cylinderform berechnet. Als Dicke des Stabes wurde das Mittel aus 3 Messungen, zwei an den Enden und eine in der Mitte, angenommen. Der Unterschied des Durchmessers an beiden Enden beträgt nur ungefähr 0,01 mm.

Länge des Stabes bei 15°	16,009 cm
Durchmesser	1,480 „
Masse	216,13 g
Masse des Stahles, der die Aufhängeöffnung füllen würde	1,10 „

daraus:

$$K = 4669{,}4 \text{ [cm, g]}.$$

Diesem Werthe kommt natürlich bei der Frage nach dem wirklichen Trägheitsmoment nur sehr geringe Bedeutung zu, doch beweist er, dass grössere Dichteschwankungen des Materiales fehlen.

Die Uebereinstimmung der drei früher gefundenen Werthe ist eine befriedigende.

Mittelwerth aus Tab. 1	4671,9 [cm, g]
" " " 2	4670,1
durch bifilare Aufhängung	4669,7
Hauptmittel:	4670,6 [cm, g].

2. Trägheitsmoment des 20 cm langen Stabes.

a) Gauss'sche Methode. — Da der gemessene Abstand der Schwerpunkte beider Gewichte nach der in Tab. 1 und 2 angewendeten Art der Aufhängung mit einem einseitigen, unbestimmbaren Fehler behaftet ist, so wurde der neu angefertigte längere Magnet an den Enden mit Messingplatten versehen, um den Draht in senkrechter Stellung befestigen zu können. Die einzelnen benutzten Drähte hatten fast genau gleiches Gewicht (im Mittel 0,004 g), und blieben nach Entfernung der Gewichte bei Beobachtung der Schwingungsdauer ohne Belastung an dem Magnet. Das Trägheitsmoment zweier Drähte 0,8 [cm, g] ist deshalb von den Resultaten der Tab. 3_a abgezogen worden.

Tabelle 3_a.

Gewichte an Metalldrähten. Drähte senkrecht festgeklemmt.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{[cm, g]}$	d	δ	$l_{(cm)}$	Drahtdicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
10,0063	11,6071	8,1292	9483,8	+0,4	2,0	1,5	0,007	0,9	I
10,0046	11,6040	8,1283	9486,6	+3,2	2,0	1,2	0,007	0,8	I
10,0049	14,3720	8,1340	9479,4	−4,0	2,6	1,3	0,007	1,3	II
10,0065	11,6139	8,1340	9483,8	+0,4	2,0	1,3	0,007	0,8	I
		Mittel	9483,4						

Um dieses Resultat mit den folgenden vergleichbar zu machen, wird davon subtrahirt:

1) das Trägheitsmoment von Spiegel und Aufhängestift 0,3
2) die Differenz der Trägheitsmomente der Endplatten für die Einklemmung von Draht und Seidenfäden 0,1

0,4

$$K = 9483{,}0\,[\text{cm, g}].$$

Bei den Versuchen der Tabelle 3_b und 3_c waren die Drähte durch doppelte Seidenfäden ersetzt, deren Abstand immer nahe 0,1 cm genommen wurde. Diese Aenderung hatte einen doppelten Zweck. Erstens wurden dadurch die selbständigen Pendelschwingungen der Gewichte möglichst gehindert, und zweitens konnte der Abstand der Gewichte wegen der Feinheit des verwendeten Seidenfadens genauer gemessen werden. Ausserdem ist es dadurch möglich, die Schwingungsdauer der Gewichte um ihre Axe auf eine beliebige Grösse zu bringen. Die Buchstaben der Tabelle 3 haben die gleiche Bedeutung wie in Tabelle 1 und 2.

Tabelle 3_b.

Gewichte an doppelten Seidenfäden.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{[cm, g]}$	d	δ	$l_{(cm)}$	T_{sec}	Nr. der Gewichte
10,0026	11,6195	8,1394	9483,9	+1,4	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3758	8,1384	9483,0	+0,5	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6200	8,1384	9477,5	−5,0	1,7	0,7	1,0	I
10,0025	11,6283	8,1444	9478,9	−3,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0015	14,3759	8,1401	9486,8	+4,3	2,2	0,6	1,3	II
10,0013	11,6260	8,1442	9483,1	+0,6	1,7	0,6	0,9	I
10,0023	14,3879	8,1453	9483,6	+1,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6269	8,1453	9486,1	+3,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3825	8,1427	9484,6	+2,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6251	8,1427	9480,9	−1,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3713	8,1361	9483,6*)	+1,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6141	8,1350	9480,9	−1,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3702	8,1340	9481,9	−0,6	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6284	8,1450	9480,5	−2,0	1,7	0,7	1,0	I
		Mittel	9482,52					

Gew. am gleichen Faden. Unter r ist der Mittelwerth der einzelnen Messungen.

*) Nach dem viertletzten Versuche riss der Aufhängedraht des Magnets.

Von diesem Mittelwerthe ist wieder das Trägheitsmoment des Kupferstiftes und des Spiegels 0,3 [cm, g] abzuziehen:

$$K = 9482{,}3 \text{ [cm, g]}.$$

Mittel der Bestimmungen mit Gewicht I [100 g] 9481,5
" " " " " II [200 g] 9483,9.

Die Genauigkeit der Versuchsresultate mit dem grossen Magnet übertrifft, wie vorauszusehen war, jene mit dem kurzen um fast das Doppelte; die Uebereinstimmung der aus der letzteren Anordnung mit bifilaren Seidenfäden gewonnenen Werthe ist wieder grösser, als die durch Benutzung von Draht gefundene.

Es zeigt dies mit Sicherheit einerseits auf die geringere Verwendbarkeit des Drahtes gegenüber der des Seidenfadens bei bifilarer Anwendung, dann ist es aber auch ein Beweis, dass die auf p. 288 und 289 erwähnten, aus selbständigen Pendelbewegungen entstehenden Fehler einen merkbaren Betrag erreichen. Neben den Vortheilen besteht aber auch die Unbequemlichkeit, dass der Abstand der Aufhängefäden von vorne und von rückwärts gemessen werden muss, am besten in der Nähe der (dünnen) Aufhängehacken. Ausserdem ergibt die Vergleichung der Endresultate aus Tab. 3_a und 3_b, dass bei senkrechter Einklemmung die früher beobachteten einseitigen Fehler fortfallen.

Fehler infolge der Beweglichkeit des Aufhängepunktes.

Es wurde jetzt versucht, ob nicht auch noch die aus der Beweglichkeit des Aufhängepunktes eines schwingenden Magnets entstehenden Unsicherheiten (p. 288) theilweise zu beseitigen möglich sei. Zu diesem Zwecke wurde eine weiche Federfahne über dem Schwingungskasten so festgeklemmt, dass der Aufhängedraht an derselben einen geringen Widerstand bei einer vorkommenden Bewegung finden musste. Die hier beobachtete grössere Dämpfung war sehr wenig von der früheren verschieden. Die Tab. 3_c enthält die gefundenen Resultate unter den gleichen Buchstaben wie früher.

Für die gleiche Combination der Theile wie in Tab. 3_a und 3_b findet man noch, durch Subtraction von 0,3 (Suspension):

$$K = 9481{,}7.$$

Die beiden vorher gefundenen Werthe waren:

9483,0,
9482,3.

Diese Uebereinstimmung ist eine ganz gute.

Tabelle 3_c.

Gewichte an doppelten Seidenfäden, Schwingungsaxe des Magnets unveränderlich.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{(cm,\ g)}$	d	δ	$l_{(cm)}$	T	Nr. der Gewichte
10,0023	11,6228	8,1412	9480,9	−1,1	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	14,3767	8,1389	9483,0	+1,0	1,2	0,6	1,2	II
10,0023	11,6304	8,1467	9482,1	+0,1	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	11,6325	8,1483	9482,6	+0,6	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	11,6391	8,1527	9481,6	−0,4	1,7	0,6	1,0	I
		Mittel:	9482,04					

b) Bestimmung durch bifilare Aufhängung (p.300). — Auch dieser Magnet wurde nach der Bifilarmethode in derselben Weise mit dem von der früheren Messung her unveränderten Apparate untersucht. Die Constanten desselben ohne Belastung waren die gleichen, mit Belastung folgende:

l =	268,010 cm	Suspension	63,189 g
e_1	11,979 „	Magnet .	280,610 „
e_2	12,037 „	Draht . .	0,129 „
		m =	343,853 g

$$t_1 = 1{,}489\,45 \text{ sec} \qquad t_2 = 1{,}444\,26 \text{ sec.}$$

$$K = 9481{,}9 \text{ [cm, g]}.$$

Auch hier ist die Uebereinstimmung mit den früheren Werthen befriedigend.

c) Rechnung aus den Dimensionen. — Die Form dieses 20 cm langen Magnetstabes ist zur Bestimmung des Trägheitsmomentes ungünstiger, als die des früher untersuchten 16 cm langen Magnets. Seine cylindrische Gestalt ist weniger vollkommen, an den Enden sitzen Messingplatten, er ist an beiden Enden zur Befestigung der Platten angebohrt und besitzt 2 Nuten für die Suspension des Bifilarapparates. Ausserdem war der Magnet zum Schutze gegen den Rost mit einer Lackschicht versehen, die bei den vorhergehenden Versuchen mit gemessen wurde, sodass das Resultat der jetzigen Rechnung auf geringere Zuverlässsigkeit Anspruch machen kann, als das von p. 301.

Länge des Stabes bei 15°	20,006 cm
Halbmesser	0,758 „
Gewicht ohne Platten und Schrauben	279,86 g
Gewicht eines Volumens Stahl, das die Aufhängebohrung füllen würde	0,93 „
Gewicht der Messingplatten und Schrauben. .	0,646 „
Halber Abstand derselben	10,05 cm
Gewicht des Weingeistlackes	0,10 g
Trägheitsmoment „	3,3 „

Daraus findet man das Trägheitsmoment unter Annahme der völlig cylindrischen Form:

9474,2 [cm, g];

unter Berücksichtigung des ungleichmässigen Durchmessers (p. 291): 9479,2 [cm, g];

unter möglichster Berücksichtigung aller Unvollkommenheiten der Form: 9479,0 [cm, g].

Man kann die Unsicherheit des berechneten Werthes auf etwa $^1/_{2000}$ schätzen infolge mangelhafter Messung der Schraubenlöcher, Nuten und der Aufhängebohrung. Die Uebereinstimmung macht die Homogenität des Materiales wahrscheinlich.

Einige Vorbereitungsmaassregeln bei Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Eine grössere Anzahl von verschiedenen Verhältnissen, die bei genaueren Messungen des Trägheitsmomentes durch Belastung berücksichtigt werden müssen, stellte Gauss zusammen, und Goldschmidt theilte sie in den „Resultaten des magnetischen Vereins“ p. 131. 1840 mit. Ausser jenen ergaben sich, zum Theil durch die veränderte Aufhängungsweise hervorgerufen, mit der Zeit noch einige Fehlerquellen, deren Beseitigung in den beschriebenen Versuchen angestrebt wurde.

Zunächst muss der Magnetismus des zu messenden Stabes möglichst constant gemacht werden, was nach den Vorschriften von Strouhal und Barus[1]) durch mehrmaliges Magnetisiren mit abwechselndem Kochen erreicht wird. Den Magnet hänge man mittelst eines harten Messingdrahtes von

1) Strouhal und Barus, Wied. Ann. **20.** p. 683. 1883.

solcher Länge auf, dass die möglichen Variationen des Torsionscoëfficienten unter $^1/_{10000}$ bleiben. Ein zu langer Faden erschwert die Beruhigung und bedroht die Stabilität der Drehungsaxe. Die vorher auf Magnetismus zu prüfenden Belastungscylinder sollen mindestens so schwer sein, dass durch dieselben das Trägheitsmoment um mehr als das Doppelte bis zum Dreifachen vermehrt wird. Oft wird ein bedeutend (bis zu zehnmal) grösseres Trägheitsmoment durch Belastung angerathen, doch ist zu berücksichtigen, dass die durch pendelnde Bewegung grosser Belastungsmassen hervorgerufene Inconstanz des Aufhängepunktes meistens vielmehr stören wird, als man an Genauigkeit der Beobachtung dadurch gewinnt. Aus demselben Grunde sind bei gleicher Masse kürzere Cylinder den langen vorzuziehen. Vermindert wird die Störung ferner durch Aufhängung der Belastung an Metalldrähten, statt an den gebräuchlichen Seidenfäden, noch besser durch Anwendung doppelter Seidenfäden, die ein spitzwinkliches Trapez bilden. Ein weicher elastischer Körper, durch den der Aufhängedraht in der Nähe des Magnets mit wenig Reibung geht, drängt den Einfluss dieser Störungen noch mehr zurück.

Die Schwingungsdauer mit Belastung wird direct beeinflusst durch die zweifachen selbständigen Schwingungen der Cylinder. Die pendelnden Schwingungen werden durch die von Beling aufgestellte Gleichung berücksichtigt, die Drehungen um ihre Axe lassen sich ebenfalls leicht, wie aus p. 290 ersichtlich, in Rechnung setzen. Unter zweierlei Umständen weicht der deshalb corrigirte Werth von dem auf gewöhnlichem Wege gefundenen wenig ab, und sind zugleich die Schwingungsdauern mit Belastung leicht genau messbar. Einmal bei Anwendung von Gewichten, deren eigenes Trägheitsmoment gegen das des Magnets klein, während zugleich die Torsionsdirectionskraft ihrer Aufhängefäden (Metallfäden, bifilare Seidenfäden) gross ist. Zweitens durch Benutzung von Gewichten mit grossem Trägheitsmoment bei kleiner Torsionskraft der Aufhängefäden (dünner Seidenfaden). An der Hand der angestellten Versuche könnte man vielleicht für den ersten Fall Cylinder empfehlen, deren

Höhe dem doppelten Durchmesser gleich ist, für den zweiten Fall ist der Durchmesser derselben nur dadurch beschränkt, dass das durch Ausmessung und Rechnung bestimmte Trägheitsmoment der Cylinder um ihre Axe keine den Endwerth beeinflussende Ungenauigkeit enthalten soll. Da Kupfer fast völlig homogen ist, lässt sich die geforderte Grenze ziemlich weit ausdehnen.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten, langjährigen Lehrer Hrn. Prof. F. Kohlrausch, auf dessen Anregung gegenwärtige Untersuchung entstand, meinen besten Dank darbringen für die stetige gütige Förderung vor und während der Arbeit.

Würzburg, phys. Laborat. 1885.

XI. *Die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde;*
von Ernst von Fleischl.

(Aus dem 90. Bde. der Sitzungsber. d. kais. Acad. d. Wiss. II. Abth. vom 18. Dec. 1884 mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Durch Aufstellung der Gleichung der Wellenoberfläche in einem Medium zeigt die Theorie an, dass sie sich der in diesem Medium auftretenden, optischen Phänomene völlig bemächtigt und ihr analytisches Verständniss erledigt hat. Aber auch das anschauliche Verständniss ist kein vollkommenes, und fühlt sich nicht beruhigt, wenn ihm nicht als Basis für seine Constructionen die Vorstellung von der Gestalt und den räumlichen Eigenschaften der betreffenden Wellenoberfläche zu Gebote steht.

Die Gruppe merkwürdiger optischer Eigenschaften, welche viele an und für sich isotrope, feste und flüssige Substanzen während ihres Aufenthaltes in einem magnetischen oder electrischen Felde zeigen, ist unserem analytischen und anschaulichen Verständnisse noch nicht erschlossen, da weder die mathematische Behandlung, noch auch — soviel mir bekannt

ist — eine andere Art der Ueberlegung zur Construction einer Wellenoberfläche geführt hat, aus deren Gestalt die durch das Experiment festgestellten Thatsachen sich erklären.

Wenn in der folgenden Darstellung jene Literatur, welche sich mit der theoretischen Behandlung der Lichtbewegung im magnetischen Felde beschäftigt, ganz und gar unberücksichtigt bleibt, so erklärt sich das, und erscheint selbstverständlich durch den Mangel jeglicher Beziehung zwischen dem, was man in der Optik „Theorie" nennt, und dem, was hier vorgebracht wird. Es handelt sich weder um den Versuch einer Theorie, noch überhaupt um das Bestreben, das Ziel der Theorie auf einem der bisher betretenen oder auf einem anderen Wege zu erreichen, sondern einzig und allein um die Mittheilung einer Muthmaassung über die Gestalt der Wellenoberfläche des Lichtes im magnetischen Felde, und um die Darlegung der Gründe, welche die gemuthmaasste Gestalt als wahrscheinlich — ja sogar sie, oder eine ihr sehr ähnliche Gestalt als die einzig mögliche erscheinen lassen. Ich denke, es versteht sich von selbst, dass durch einen solchen Nachweis, selbst wenn er gelingt, eine Theorie der betreffenden Lichtbewegung weder dargeboten, noch überflüssig gemacht ist, dass vielmehr ein solcher Nachweis nicht den mindesten Zusammenhang mit einer Theorie, keinerlei Beziehung zu einer solchen besitzt. Für ein anschauliches Verständniss der so eigenthümlichen Phänomene im magnetischen Felde, und für die Beseitigung des Zweifels, ob diese Erscheinungen auf Grund derselben Principien erklärbar seien, wie die übrigen optischen Phänomene, mag jedoch die von mir ersonnene Muthmaassung einigen Werth besitzen, und ihre ausführlichere Mittheilung glaube ich auch durch eine überraschende Uebereinstimmung rechtfertigen zu dürfen, welche sich zwischen einer, aus meiner Conjectur durch Rechnung abgeleiteten Function, und den Resultaten früherer, von Verdet angestellter Messungen ergeben hat — eine Uebereinstimmung, welche wesentlich weiter geht, als die zwischen jenen Messungen, und der von Verdet selbst aus ihnen abstrahirten Function.

Bekanntlich besteht die charakteristische Eigenthümlich-

keit der Lichtbewegung im magnetischen Felde, durch welche sie geradezu im Gegensatz zu der unter allen übrigen Bedingungen stattfindenden Lichtbewegung, und somit ganz isolirt ist, darin, dass in einem magnetischen Felde, in welchem die Verbindungslinie der Magnetpole sich von Nord nach Süd erstreckt, ein linear polarisirter Lichtstrahl, welcher das Feld in dieser Richtung durchzieht, und in dem z. B. die Schwingungsebene anfänglich vertical ist, ob er nun von Nord nach Süd, oder ob er von Süd nach Nord geht, in beiden Fällen in solcher Weise eine Drehung der Polarisationsebene erleidet, als würden die Schwingungsbahnen durch einen, nur deren obere Hälften treffenden Wind, der von Ost nach West streicht, um den Strahl als Axe zur Seite gedreht, so dass nach der üblichen Ausdrucksweise dieses Feld, wenn es von Süd nach Nord durchstrahlt wird, gleich einer linksdrehenden Substanz wirkt, aber wenn es von Nord nach Süd vom Strahl durchschritten wird, so wirkt, wie eine ebenso stark rechtsdrehende Substanz. Diese Eigenschaft und ihre unmittelbare Consequenz: eine Verdopplung der Drehung beim Hin- und Rückgang eines Strahles durch ein magnetisches Feld, — statt der bei allen, an und für sich drehenden Mitteln in diesem Falle erfolgenden Aufhebung der Drehung — sind zu bekannt, als dass länger bei ihnen zu verweilen nöthig wäre.

Bei dem innigen, durch die Fresnel'sche Theorie aufgestellten Zusammenhang zwischen Drehung der Polarisationsebene und Doppelbrechung fragt es sich nun, erstens ob die aus der Drehung im magnetischen Felde folgende Doppelbrechung in der üblichen Weise durch eine Wellenoberfläche darstellbar sei, und zweitens, wenn dies der Fall ist, welche Gestalt diese Wellenfläche hat.

Die Beantwortung dieser beiden Fragen ist das Ziel der vorliegenden Schrift. Dass es, wenn die magnetische Drehung der Lichtschwingungen auf Doppelbrechung beruht, einen geometrischen Ort geben muss, an dem die Bewegung zu einer gegebenen Zeit nach der Störung des Gleichgewichtes des Lichtäthers in einem Punkte des magnetischen Feldes anlangt, — darüber kann gar kein Zweifel bestehen.

Solange eine Gestalt im Raume nicht angebbar ist, welche der Bedingung dieses geometrischen Ortes entspricht, kann man etwa vermuthen, dass die magnetische Drehung anders zu Stande komme, als die in circular doppelbrechenden Substanzen. Geht man aber von der Voraussetzung einer magnetischen Doppelbrechung als Grundlage der magnetischen Drehung aus, dann kann man nur mehr fragen, wie die Wellenfläche aussieht, aber nicht, ob sie existirt. Von dieser Voraussetzung aber gehe ich in Folgendem aus.

Um die Gestalt der Wellenfläche im magnetischen Felde zu entwickeln, nehmen wir an, ihr Mittelpunkt, also der Ort, an welchem die Störung im Gleichgewichte des Lichtäthers stattfindet, liege auf der Verbindungslinie zweier punktförmiger Magnetpole (oder — um einen den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Fall zu betrachten, an einer solchen Stelle eines magnetischen Feldes, an welcher die Kraftlinien untereinander merklich parallel verlaufen). — Die Verbindungslinie der Pole wählen wir zur X-Axe eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystemes, dessen Nullpunkt mit dem Punkte, an welchem die Störung stattfindet, zusammenfällt. Vorderhand sei das Feld noch nicht magnetisch, also etwa der den Electromagnet erregende Strom noch nicht geschlossen. Das Licht, dessen Fortpflanzungsweise wir untersuchen, sei linear polarisirtes. Dann ist seine Wellenoberfläche im isotropen Medium natürlich eine Kugeloberfläche; oder wenn wir, einer allgemein bekannten Vorstellungsweise uns bedienend, statt des einen linear polarisirten, zwei circular und einander entgegengesetzt polarisirte Strahlen annehmen, treten an die Stelle jener einen Kugelfläche zwei solche aufeinanderfallende, identische Flächen.

Nun stelle man sich vor, diese beiden Kugeloberflächen erleiden eine und dieselbe homogene lineare Deformation längs der X-Axe; das Maass der Deformation sei: n. — Hierdurch bleiben alle Entfernungen zwischen je 2 Punkten, die in einer zur X-Axe normalen Ebene liegen, unverändert; alle Entfernungen zwischen Punkten, die in einer Geraden liegen, welche zur X-Axe parallel ist, werden mit n multiplicirt — kurz: es werden aus den beiden iden-

tischen Kugeln: zwei identische Rotationsellipsoide, der
gemeinsamer Mittelpunkt der der früheren Kugeln ist. W
müssen uns das Maass der Deformation, n, als eine Za
denken, die nur um sehr weniges grösser ist als 1, so da
die Excentricität der Ellipsoide eine äusserst geringe i
und ihre Brennpunkte (α, β) zu beiden Seiten von O, se
nahe an O liegen. Nun denke man sich ferner das eine d
beiden Ellipsoide längs der X-Axe um ein ganz kleines Stü
aus seiner Anfangslage verschoben; und das zweite Ellipso
um ein ebenso grosses Stück nach der entgegengesetzt
Richtung auf der X-Axe verschoben, sodass die Mittelpunk
der beiden Ellipsoide zu boiden Seiten des O-Punktes glei
weit von ihm entfernt liegen. Man kann noch, um ein
möglichst einfachen analytischen Ausdruck für diese Fläch
zu bekommen, eine Beziehung aufstellen zwischen der Grös
der Deformation, und der Grösse der Verschiebung auf d
X-Axe, und zwar folgende: Man schiebe das Ellipsoid e
weit, bis sein einer Brennpunkt (α_1) mit dem O-Punkt z
sammenfällt, und das Ellipsoid ε so, dass sein Brennpun
(β_2) auf den O-Punkt fällt. Der analytische Ausdruck d
Doppelfläche, welche durch die zum Theil ineinander liegend
Oberflächen beider Ellipsoide gebildet wird, enthält da
ausser dem Halbmesser r der zu Anfang vorhandenen Kugel
und ausser dem linearen Maasse n, der Deformation, welc
diese erlitten haben, keine benannten Constanten; er laute

$$\text{(I)} \qquad \frac{n^2x^2+y^2+z^2}{r^2n^2} \pm \frac{2x\sqrt{n^2-1}}{r} = \frac{n^2+1}{n^2} - n^2.$$

Ich will nun zeigen, dass die hier entwickelte Dopp
fläche alle Eigenschaften der Wellenoberfläche im magne
schen Felde hat, und mich hierzu der Fig. 1 bedienen, welc
den Durchschnitt der Doppelfläche mit der XY-Ebene da
stellt.[1])

Die mit Cursivbuchstaben (x, p, y, p') bezeichnete Ellip
gehört dem Ellipsoide e an, und ist der Theil der Welle

1) Der Deutlichkeit halber ist in dieser Figur die Excentricität d
Ellipsen, ebenso wie ihre Verschiebung auf der X-Axe, im Vergleic
mit den wirklich stattfindenden Verhältnissen sehr stark übertrieben.

fläche, welcher sich auf die rechts circular schwingenden Strahlen bezieht, das heisst: Strahlen rechts circular polarisirten Lichtes erreichen, gleichzeitig von O ausgehend, gleichzeitig die Punkte der Oberfläche des Ellipsoides e; Strahlen links circular polarisirten Lichtes derselben Farbe, welche gleichzeitig mit den anderen von O ausgehen, erreichen in der gleichen Zeit die Punkte der Oberfläche des Ellipsoides ε, dem in der Ebene der Zeichnung die mit griechischen Buchstaben (ξ, π, η, π') versehene Ellipse entspricht.

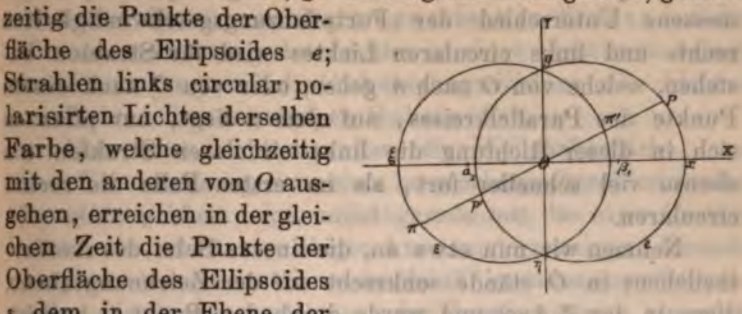


Fig. 1.

Zunächst ist ersichtlich, dass in der YZ-Ebene, in welcher die Ellipsoide einander schneiden, liegende Strahlen (z. B. die in der Y-Axe selbst liegenden Strahlen Oy, $O\eta$), mögen sie rechts oder links circular schwingendem Lichte angehören, die gleiche Geschwindigkeit haben, indem für diese Strahlen die Punkte beider Wellenflächen paarweise zusammenfallen. In Wirklichkeit bleibt die Polarisationsebene von Strahlen linear polarisirten Lichtes, welche in der angegebenen Richtung das magnetische Feld durchsetzen, unverändert.

Ferner geht unmittelbar aus der Figur hervor, dass für Strahlen, welche von O in der Richtung Op ausgehen, die Geschwindigkeit eine verschieden grosse ist, je nachdem sie rechts oder links circular polarisirt sind; erstere gelangen in derselben Zeit bis p, in welcher letztere nur bis π' gelangen. Diese Differenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden entgegengesetzt schwingenden Hälften des, von O aus in der Richtung nach p gehenden, linear polarisirten Lichtes drückt sich in der Beobachtung (durch einen Analyseur) als Drehung der Polarisationsebene aus; in unserem Falle als Drehung „nach rechts". Der Betrag dieser Drehung hängt von der Grösse der Differenz, also von der Länge $\pi'p$ ab, ist also ein und derselbe für alle Strahlen, die von O aus

nach irgend einem Punkte desjenigen Parallelkreises (auf dem Rotationsellipsoid e) hin gehen, auf dem der Punkt p selbst liegt. — Derselbe, durch die Länge $\pi' p = - p' \pi$ gemessene Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten rechts und links circularen Lichtes wird für Strahlen bestehen, welche von O nach π gehen, oder von O nach einem Punkte des Parallelkreises, auf dem π liegt; nur pflanzen sich in dieser Richtung die links circularen Strahlen um ebenso viel schneller fort, als im ersten Falle die rechts circularen.

Nehmen wir nun etwa an, die lineare Bahn des Aethertheilchens in O stände senkrecht auf der Zeichnungsebene, (liege in der Z-Axe) und werde durch den Punkt O halbirt, so dass die eine Hälfte dieser Bahn vor der Ebene der Zeichnung liegt. Stelle ich mich in diese Schwingungsbahn und blicke dem von O nach p gehenden Strahle nach, so werden, nach dem früher Gesagten, die oberen (vor der Zeichnung liegenden) Hälften der Schwingungsbahnen mir um so stärker nach rechts sich zu neigen scheinen, je weiter gegen p zu das Licht fortschreitet. Bleibe ich zwar in O stehen, drehe mich aber um, und blicke dem von O aus nach π fortschreitenden Strahle nach, so werden mir, dem oben Gesagten zufolge, die Schwingungsbahnen der Aethermolecüle mit ihren oberen, vor der Zeichnungsebene gelegenen Hälften sich um so stärker nach links zu neigen scheinen, je weiter sie sich von mir entfernen. Für einen Beobachter jedoch, der nicht, wie ich, im Mittelpunkte der Welle steht, und der sich nicht, wie ich, zwischen den beiden Beobachtungen umdreht, sondern der den ganzen Vorgang von einem irgendwo ausserhalb der Wellenfläche gelegenen Standpunkte aus betrachtet, wird die Drehung der Schwingungsbahnen dem Sinne nach dieselbe sein, beim Fortschreiten des Lichtes von O nach p, wie beim Fortschreiten von O nach π — und wegen der Gleichheit der Längen $\pi' p$ und $p' \pi$, wird auch der Betrag der Drehung sich in beiden Fällen als der gleiche zeigen.

Aus der Voraussetzung dieser Gestalt der Wellenfläche folgt also unmittelbar jene Unabhängigkeit der Drehungs-

richtung der Polarisationsebene von dem Vorzeichen der Richtung des Fortschreitens des Lichtes, welche die charakteristische optische Eigenschaft des magnetischen Feldes ist, da sie die Einwirkung des magnetischen Feldes auf die Schwingungsrichtung des Lichtes in einen Gegensatz bringt zur Einwirkung auf die Schwingungsrichtung des Lichtes von Seiten aller anisotropen Substanzen.

Man sieht leicht ein, dass die Wellenoberfläche, aus deren Voraussetzung diese eben besprochene charakteristische Eigenthümlichkeit folgt, nicht gerade nur die eine Gestalt haben muss, welche der obigen Auseinandersetzung zu Grunde gelegt wurde, sondern dass vielmehr alle geschlossenen Doppelflächen dies leisten, welche aus der Rotation zweier, einander in der YZ-Ebene schneidender Curven um die X-Axe hervorgehen, wenn nur jede der beiden erzeugenden Curven das Spiegelbild der anderen bezüglich der YZ-Ebene ist, und wenn nur jeder ausserhalb der YZ-Ebene liegende Centralstrahl die Doppelfläche viermal schneidet.

Aber nicht blos dieser Verallgemeinerung unterliegt die oben geschilderte Wellenform, wenn sie keiner anderen, als der soeben ausführlich besprochenen Bedingung zu genügen hat, sondern sie lässt auch noch eine Specialisirung und zugleich Vereinfachung zu; indem eine Deformation der, unserer Entwicklung zu Grunde liegenden, identischen Kugelflächen überhaupt nicht nothwendig ist, sondern eine (kleine) Verschiebung der beiden Kugeln in entgegengesetzten Richtungen auf der X-Axe die gestellte Bedingung ebenfalls erfüllt. Der analytische Ausdruck dieser Doppelfläche:

$$\text{(II)} \qquad (x \pm \xi)^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

kann aus der Gleichung, welche oben für die aus Ellipsoiden bestehende Wellenfläche gegeben wurde, nicht abgeleitet werden, da in Gleichung (I) ein Zusammenhang zwischen der Grösse der Deformation und der Grösse der Schiebung vorausgesetzt ist, durch welchen beide gleichzeitig verschwinden, so dass Gleichung (I), wenn man in ihr $n = 1$ setzt, direct in die Mittelpunktsgleichung einer Kugel übergeht, während unsere Fläche (II) aus der früher besprochenen, durch Verschwinden der Deformation allein hervorgeht.

Auf die Frage, welche von allen, der bewussten Bedingung genügenden Doppelflächen die der Lichtbewegung im magnetischen Felde wirklich entsprechende sei, und aus welchen Gründen ich die durch Gleichung (I) dargestellte dafür halte, habe ich folgendes zu antworten:

Die Wellenfläche, welche der Lichtbewegung im magnetischen Felde entspricht, muss folgende Eigenschaften besitzen:

1. Sie muss durch einen Vorgang von stetiger Natur aus der Kugel ableitbar sein, wegen des Ganges der Erscheinungen bei stetig von Null aus wachsender Intensität des Magnetismus.

2. Sie muss die YZ-Ebene nur in einer Curve schneiden, und zwar in einer Kreislinie; also müssen ihre beiden Theile einander ebenfalls in dieser Weise schneiden (oder berühren).

3. Sie muss durch Rotation einer ebenen Figur um die X-Axe entstehen.

4. Es darf nicht, wie bei einaxigen Krystallen, der eine Theil ganz innerhalb des anderen liegen, sondern jeder Theil muss ein ebenso grosses Stück des anderen einschliessen, als von ihm selbst durch den anderen Theil eingeschlossen wird, so dass um die YZ-Ebene nur eine geometrische, aber keine optische Symmetrie besteht.

Durch die Erinnerung an die Rolle, welche das Rotationsellipsoid bei der einaxigen Doppelbrechung spielt, und durch die so nahe liegende Vorstellung, dass Kräfte, die ausschliesslich parallel einer geraden Linie wirken, auch nur Veränderungen an der Gestalt der einfachen Wellenfläche hervorrufen werden, welche durch Bewegungen ihrer einzelnen Punkte in der Richtung dieser Geraden entstehen, wie die lineare Deformation, endlich weil die aus einer solchen Deformation der Kugel hervorgehende Gestalt, nächst dieser selbst, überhaupt die einfachste ist, wurde ich auf die oben vorgetragene Muthmaassung geführt. Warum ich aber, nachdem ich schon dem — so zu sagen unerlaubten — Argumente der „Einfachheit" einen Platz in meiner Betrachtung eingeräumt habe, bei der aus zwei Ellipsoiden bestehenden Wellenfläche stehen geblieben bin; weshalb ich überhaupt

mit einiger Bestimmtheit diese als die wirklich vorhandene Wellenfläche bezeichne, das wird sich aus dem Folgenden ergeben.

Es existirt nämlich noch eine, bisher von uns nicht in Betracht genommene Erfahrungsthatsache in diesem Gebiete von Erscheinungen, welche, sowie sie in der theoretischen Behandlung desselben einen der Hauptausgangs- und Anhaltspunkte der Rechnung bildet, so auch für die hier angestellten Betrachtungen dadurch von grosser Bedeutung ist, dass sie eine Wahl unter den verschiedenen möglichen Gestalten der Wellenfläche ermöglicht; indem sich aus jeder Wellenfläche, welche durch ihre Gleichung ausgedrückt ist, eine Beziehung zwischen zwei Variablen durch Rechnung ableiten lässt, welche mit der aus messenden Beobachtungen folgenden, analogen Beziehung derselben Variablen unmittelbar verglichen werden kann.

Bekanntlich hat M. Verdet in zwei kleinen Abhandlungen[1]) Versuche mitgetheilt, die er angestellt hatte, um zu prüfen, in welcher Weise die Grösse der Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde abhängt von dem Winkel zwischen der Richtung der magnetischen Kraft, und der Richtung der Lichtstrahlen.

Für diese Untersuchung war natürlich die übliche Methode[2]), welche angewendet wird, wenn beide Richtungen zusammenfallen, nicht brauchbar. Verdet beobachtete also an einem Apparate, welcher aus einem fixen optischen Theile, und einem beweglichen, electromagnetischen Theile bestand. Letzterer wurde von einem kräftigen Electromagnet mit verticalen Schenkeln gebildet, auf denen Polschuhe aus weichem Eisen, die einander genähert werden konnten, befestigt waren. Der Magnet war um eine verticale, mitten zwischen den Schenkeln durchgehende Axe drehbar, und seine Drehungen wurden mittelst Nonius und Alhidade abgelesen. Bei der Beobachtung wurde durch die zwischen den Polschuhen

1) M. Verdet, Compt. rend. **39.** p. 548. u. 549. 1854. — Ann. de chim. et de phys. (3) **43.** p. 37—44. 1855.

2) Durchbohrung der Pole oder Polschuhe.

befindliche Substanz in einer Horizontalebene durchgesehen, welche der oberen Begrenzungsebene der Polschuhe parallel und möglichst nahe war. Damit die Forderung eines homogenen Feldes, in dem die Substanz liegen soll, möglichst erfüllt werde, mussten die Polschuhe bestimmte Formen und Dimensionen erhalten, und ich verweile bei der Beschreibung der Verdet'schen Versuchsanordnung absichtlich so lange, um auf eine offenbar auf einem Lapsus calami beruhende, irrthümliche Angabe Verdet's aufmerksam zu machen, die einen so wesentlichen Punkt betrifft, dass ihre ausdrückliche Richtigstellung gewiss nicht überflüssig ist. Wenn nämlich solche Messungen, wie Verdet sie vorgenommen hat, einen Werth besitzen sollen, so muss dafür gesorgt sein, dass bei allen Lagen des magnetischen Feldes gegen die Substanz, diese sich in einem Systeme merklich paralleler Kraftlinien befindet. Dafür hat Verdet durch eine passende Wahl der Länge der einander zugekehrten Polflächen, im Vergleich zu der Länge ihres Abstandes von einander, und auch zu der Länge des durchstrahlten Cylinders oder Prismas der untersuchten Substanz, Sorge getragen, und dies auch in seinen beiden Mittheilungen erwähnt, und zwar in der ganz kurzen Mittheilung in den Comptes rendus in richtiger Weise; in dem ausführlichen Aufsatz aber in den Annales de Chimie et de Physique, in welchem er seinen Apparat sehr genau und mit Angabe aller Dimensionen beschreibt, ist die Rede von „deux lames en fer doux, de 0^m,016 de longueur sur 0^m,04 de largeur et 0^m,005 d'épaisseur“[1]); während die Länge, wie aus der beigegebenen Figur, und aus der entsprechenden Stelle der anderen Abhandlung ganz unzweifelhaft hervorgeht, nicht 16 mm, sondern 16 cm betrug. — Der Abstand der inneren Flächen der Polschuhe von einander war gleich 8 cm, und die geprüften Substanzen wurden in ungefähr 4 cm dicker Schicht von den Lichtstrahlen durchsetzt.

Verdet gibt an, dass er mehrere Reihen von Messungen gemacht hat, an fünf verschiedenen Körpern: An einer Sorte

---

1) l. c. p. 39.

von Flintglas, an Schwefelkohlenstoff, und an drei verschiedenen Proben des schweren Faraday'schen Glases. In dem kurzen Aufsatz in den Comptes rendus theilt er jedoch die unmittelbaren Ergebnisse seiner Messungen gar nicht mit, sondern spricht nur das aus ihnen abstrahirte, bekannte Gesetz aus, dass die Drehung der Polarisationsebene dem Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der magnetischen Kraft, und der Richtung der Lichtstrahlen proportional sei; aber auch in der ausführlicheren Abhandlung theilt Verdet leider nur 2 Messungsreihen mit, und sagt, die übrigen seien diesen beiden ähnlich gewesen. Die Uebereinstimmung der direct abgelesenen Drehungen mit den aus dem Cosinusgesetze berechneten ist in beiden Reihen bekanntlich eine allgemein als hinreichend angesehene.

Die Wichtigkeit solcher Messungen für die Kritik der von mir vorgeschlagenen Wellenflächen ist unmittelbar ersichtlich. Da die letzteren durch ihre Gleichungen gegeben sind, so lässt sich aus diesen leicht für jede solche Wellenfläche berechnen, welches Gesetz sie für die Abhängigkeit der Drehung vom Winkel zwischen Kraftrichtung und Lichtstrahl bedingt. Bei der Berechnung dieses Gesetzes für die aus 2 Rotationsellipsoiden bestehende Wellenfläche habe ich die Annahme, welche der Gleichung (I) zu Grunde liegt, dass nämlich die Verschiebung mit der Deformation in bestimmter Weise zusammenhängt, nicht gemacht; ferner konnte ich mich auf die Betrachtung des Durchschnittes der Wellenfläche mit der XY-Ebene beschränken.

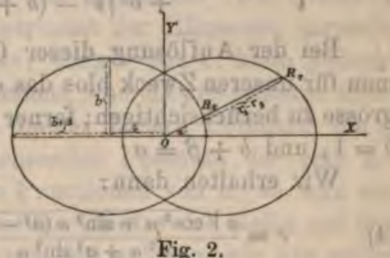


Fig. 2.

Bezeichnet man die kleine Axe der Ellipsen (Fig. 2)[1]) mit $2b$, ihre grosse Axe mit $2(b+\beta)$, die Entfernung ihres

1) Auch in dieser Figur sind, wie in der ersten, die Excentricität der Ellipsen, und ihre Verschiebung auf der X-Axe sehr stark übertrieben dargestellt.

Mittelpunktes von O mit ε, so ist die Gleichung beider Ellipsen:

$$\frac{(x \pm \varepsilon)^2}{(b+\beta)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Um zu dem Gesetze, welches wir suchen, zu gelangen, ist zu bemerken, dass der Betrag der Drehung der Polarisationsebene von der Grösse des Unterschiedes der Geschwindigkeit des rechts circularen und des links circularen Strahles abhängt. Diese Geschwindigkeiten werden durch die, in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege OR_1 und OR_2 für den Strahl, welcher den Winkel α mit der X-Axe einschliesst, gemessen.

Es ist also zu berechnen, wie sich — wenn wir allgemein OR_1 mit r_1, und OR_2 mit r_2 bezeichnen — die Differenz $r_1 - r_2$ mit dem Winkel α ändert.

Die durch Transformation der Gleichung (1) auf Polarcoordinaten gewonnene Gleichung:

$$\frac{(r\cos\alpha \pm \varepsilon)^2}{(b+\beta)^2} + \frac{r^2\sin^2\alpha}{b^2} = 1. \tag{2}$$

lässt sich leicht auf die Form einer nach fallenden Potenzen von r geordneten, quadratischen Gleichung bringen:

$$\left\{\begin{array}{l} r^2\{b^2\cos^2\alpha + (b+\beta)^2\sin^2\alpha\} \pm r \,.\, 2\varepsilon\cos\alpha b^2 \\ \qquad + b^2\{\varepsilon^2 - (b+\beta)^2\} = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach r braucht man für unseren Zweck blos das eine Vorzeichen der Wurzelgrösse zu berücksichtigen; ferner setzen wir der Kürze wegen: $b = 1$, und $b + \beta = a$.

Wir erhalten dann:

$$r = \frac{a\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,(a^2 - \varepsilon^2)}}{\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha} \pm \frac{\varepsilon\cos\alpha}{\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}. \tag{4}$$

Nennen wir den ersten Theil des Ausdruckes, rechts vom Gleichheitszeichen: A, den zweiten Theil: B, so haben wir:

$$r_1 = A + B, \qquad r_2 = A - B. \tag{5}$$

Für die von uns gesuchte Differenz der Geschwindigkeiten erhalten wir:

$$r_1 - r_2 = 2B, \qquad \text{somit:}$$

$$(6)\qquad r_1 - r_2 = \frac{2\varepsilon\cos\alpha}{\cos^2\alpha + (1+\beta)^2\sin^2\alpha},$$

und durch Reduction im Nenner:

$$(7)\qquad r_1 - r_2 = \frac{2\varepsilon\cos\alpha}{1 + 2\beta\sin^2\alpha + \beta^2\sin^2\alpha}.$$

Aus Gleichung (7)[1] geht schon hervor, dass für die aus zwei Kugeln bestehende Wellenfläche, für welche (wegen $\beta = 0$) das gesuchte Gesetz durch die Gleichung $r_1 - r_2 = 2\varepsilon\cos\alpha$ ausgedrückt wird, aus unserer Annahme dieselbe Proportionalität mit dem Cosinus von α folgt, welche von Verdet aus seinen Erfahrungen abstrahirt wurde.

Um zu dem entsprechenden Gesetze für die aus Ellipsoiden bestehende Wellenfläche zu gelangen, muss man die Anfangsglieder der Reihe entwickeln, welche aus der in (7) angezeigten Division hervorgeht, und da erhält man:

$$(8)\left\{\begin{aligned}[2\varepsilon\cos\alpha]:[1+2\beta\sin^2\alpha+\beta^2\sin^2\alpha] &= 2\varepsilon\cos\alpha - 4\varepsilon\beta\cos\alpha\sin^2\alpha \\ &+ 2\varepsilon\beta^2\sin^2\alpha\cos\alpha(4\sin^2\alpha - 1) - \dots\end{aligned}\right.$$

Die Grösse 2ε, durch welche natürlich die ganze Reihe theilbar sein muss, hängt unmittelbar mit der Verschiebung der beiden Theile der Doppelfläche auf der X-Axe, vom O-Punkte nach beiden Seiten hin, zusammen. Die Grösse β, welche ein Maass der Excentricität der Ellipsoide darstellt, wird, der Erfahrung gemäss, ebenso wie ε, klein gedacht werden müssen neben der Einheit, und da die späteren Glieder der oscillirenden Reihe immer höhere Potenzen von β enthalten, neben rasch wachsenden Potenzen der echt gebrochenen trigonometrischen Functionen von α, so wird uns zunächst der Einfluss des zweiten Gliedes der Reihe auf den Gang der Function interessiren, mit welchem wir uns sofort

1) Der Betrag dieser Differenz wäre eigentlich streng genommen nicht — wie hier geschehen ist — an der Wellenoberfläche selbst, sondern an der aus ihr abzuleitenden Hamilton'schen „surface of wave slowness" zu berechnen; jedoch kommt der Unterschied zwischen beiden Resultaten für unseren Fall absolut nicht in Betracht.

beschäftigen wollen.[1]) Betrachten wir also nur die beiden ersten Glieder der Reihe (8), so erhalten wir:

$$(9) \quad r_1 - r_2 = 2\varepsilon \cos\alpha - 4\varepsilon\beta \cos\alpha \sin^2\alpha = 2\varepsilon(\cos\alpha - \beta \sin\alpha \sin 2\alpha).$$

Wie schon oben aus Gleichung (7), so lässt sich auch aus Gleichung (9) das von Verdet aufgefundene Cosinusgesetz ableiten, wenn man $\beta = 0$ setzt, also die Wellenfläche als aus 2 Kugeln bestehend ansieht.

Wenn man aber den Einfluss näher betrachtet, welchen das zweite Glied in der Klammer von (9) auf den Gang der Function nimmt, unter der Voraussetzung, dass β ein kleiner, echter Bruch sei, so bemerkt man, dass, während α von Null bis 90° wächst, das zweite Glied in der Klammer zwar wegen des Factors $\sin\alpha$ stets wachsen würde, wegen des Factors $\sin 2\alpha$ aber nicht nur für $\alpha = 0$, den Werth Null hat, sondern auch für $\alpha = 90^0$ der Null gleich wird, so dass, wenn man dieses zweite Glied berücksichtigt, nicht die von Verdet angenommene einfache Cosinusfunction, sondern eine von der Cosinusfunction bei $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ gar nicht, zwischen diesen beiden Werthen aber dadurch von ihr verschiedene Function herauskommt, dass von den Werthen, welche nach Verdet's Gesetz zu erwarten wären, noch etwas abgezogen werden muss, um auf die wahren Werthe zu kommen. Die gefundenen Grössen der Drehung müssen also, verglichen mit den aus Verdet's Gesetz berechneten, von $\alpha = 0$ bei wachsendem α zu klein werden; und erst wenn α sich 90° nähert, wieder mit dem Cosinusgesetz übereinzustimmen beginnen.

Betrachten wir nun die von Verdet durch Messung gefundenen Werthe. Verdet selbst hat sie mit den von dem Cosinusgesetz geforderten verglichen, indem er, nebst dem Winkel der Drehung der Polarisationsebene, bei jeder Position den Quotienten aus diesem Werthe, dividirt durch den Cosinus des Positionswinkels, angibt. Seine eine Ver-

1) Ein besonderer Beweis für die Convergenz dieser Reihe ist nicht nöthig, nachdem oben auf den Umstand hingewiesen ist, aus dem sich ihre Convergenz von selbst ergibt: dass sie gleichzeitig fällt und oscillirt.

suchreihe, bei welcher das Licht durch eine 44 mm dicke Schicht Schwefelkohlenstoff ging, lautet[1]):

α	Drehung	$\frac{\text{Drehung}}{\cos\alpha}$
0°	5° 58′ 0″	358,0
15	5 45 45	357,25
30	5 7 45	355,25
45	4 9 0	352,0
60	2 58 45	357,50

Man sieht, dass der Gang der Abweichungen der Beobachtungen Verdet's von seinem Gesetze ganz der Voraussetzung entspricht, dass in Gleichung (9) β einen von Null verschiedenen Werth hat, dass also die Wellenfläche nicht aus 2 Kugeln, sondern aus 2 Ellipsoiden besteht; wenn auch die Excentricität derselben nicht gross ist, so reicht sie offenbar aus dafür, dass sich die durch sie bedingten Unterschiede in der Beobachtung deutlich bemerkbar machen.

Auch die zweite von Verdet mitgetheilte Reihe von Messungen, welche an einer 40 mm dicken Schicht schweren Faraday'schen Glases angestellt wurden, entspricht dieser Voraussetzung. Sie lautet[2]):

$$\alpha = \quad 0^\circ \quad 15^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 75^\circ,$$
$$\frac{\text{Drehung}}{\cos\alpha} = 535{,}75 \quad 527{,}25 \quad 531{,}25 \quad 537{,}50 \quad 537{,}50 \quad 539{,}00.$$

Ich sage: sie entspricht der Voraussetzung, weil der Gang der Abweichungen mit dem, von unserer Function geforderten insofern übereinstimmt, als die Werthe des Quotienten: $\frac{\text{Drehung}}{\cos\alpha}$ von einem zwischen den Enden des Viertelkreisbogens gelegenen Punkte, an welchem dieser Werth ein Minimum ist, nach beiden Enden zu stetig wachsen.

Eine viel weiter gehende Uebereinstimmung ist wohl nicht zu erwarten, erstens wegen der nothwendigen Beobachtungsfehler, und dann auch, weil Verdet, wenn er schon aus seinen sämmtlichen Messungsreihen blos zwei zur Be-

1) Verdet, Ann. de chim. et de phys. (3) 43. p. 43. 1855.
2) Verdet, l. c. p. 43.

stätigung seines Gesetzes mittheilt, gewiss diejenigen, welche am besten mit diesem Gesetze stimmen, gewählt haben wird. Besonders wenn man diesen Umstand berücksichtigt, wird man wohl nicht geneigt sein, die in beiden Beispielen hervortretende Uebereinstimmung der Abweichungen mit den von meiner Formel geforderten für einen blossen Zufall, für das Resultat von Beobachtungsfehlern zu halten. Es wäre doch zu wunderbar, wenn die Beobachtungsfehler allesammt gerade in dem Sinne meiner Formel, und in solcher Regelmässigkeit ihr entsprechend, sich durch blossen Zufall eingefunden hätten.

Nach allem diesem glaube ich wohl, sagen zu dürfen:

1. dass die Lichtwellenoberfläche im magnetischen Felde sicher im allgemeinen die von mir beschriebene Gestalt zweier einander schneidender Rotationsflächen hat.

2. dass diese beiden Flächen jedenfalls zwar nur äusserst wenig von der Kugelgestalt abweichen, dass aber dessen ungeachtet

3. die aus Verdet's Cosinusgesetz abzuleitende, und mit diesem Gesetz allen bisherigen theoretischen Forschungen unbewusst zu Grunde gelegte Kugelgestalt beider Theile der Doppelfläche wahrscheinlich nur eine erste Annäherung an die wirkliche Gestalt ist, und

4. dass die Gestalt der Lichtwellenoberfläche im magnetischen Felde eine aus zwei Rotationsellipsoiden, die in der Richtung ihrer grossen Axe so gegeneinander verschoben sind, dass sie grösstentheils ineinander liegen, bestehende Doppelfläche ist.

XII. *Ein neues Electrodynamometer;* *von J. W. Giltay.*

(Hierzu Taf. III Fig. 11—17.)

Der hierunter beschriebene Apparat soll hauptsächlich für die Messung telephonischer Wechselströme dienen. Der von Ader[1]) zu diesem Zweck construirte Apparat wird sich wohl mehr für die Demonstration als für Messungen eignen. Das Electrodynamometer von Kohlrausch[2]) gibt 1 mm Ausschlag bei 2 m Scalendistanz, wenn ein Strom von $^1/_{17000}$ Ampère durchgesandt wird; ungefähr dieselbe Empfindlichkeit hat das Siemens'sche Dynamometer.[3]) Da nun aber nach Bosscha[4]) alternirende Ströme von 77×10^{-8} Ampère noch genügen, um einen deutlichen Ton in einem Bell'schen Telephon hervorzurufen, so ist eine grössere Empfindlichkeit als diejenige der genannten Instrumente für telephonische Messungen sehr gewünscht. Freilich sind die beiden zuletzt genannten Apparate nicht für diesen Zweck construirt.

Bellati[5]) hat ein ganz neues Princip für die Construction des Electrodynamometers angegeben.

Wenn man in einem Galvanometer die Magnetnadel durch einen Eisenstab ersetzt und diesen in der Windungsebene aufhängt, so wird er von einem durch die Windungen gehenden Strom nicht abgelenkt werden, weil er nicht magnetisch ist. Wird der Stab in die Meridianebene und zu gleicher Zeit senkrecht auf die Windungsebene gestellt, so wird er von einem durch die Windungen gehenden Strom magnetisirt, aber er wird ebensowenig wie vorher aus seiner Lage abgelenkt werden, da er schon die Maximalausweichung (90°) hat. Wenn man aber den Stab einen Winkel, der kleiner als 90° ist, mit der Windungsebene machen lässt, so wird er von einem durch die Windungen gehenden Strom sowohl magnetisirt als abgelenkt werden. Da mit der Stromrichtung sich auch die Polarität des Eisenstabes umkehrt,

1) Ader, La Lumière Électrique **10.** p. 159. 1880.
2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **18.** p. 556. 1882.
3) W. Siemens, Electrotechn. Zeitschr. **2.** p. 14. 1881. Beibl. **5.** p. 203.
4) Bosscha, Arch. Neërland. **13.** p. 250. 1878. Beibl. **2.** p. 513.
5) Bellati, Atti del R. Ist. Ven. (6) **1.** p. 563. 1883. Beibl. **7.** p. 617.

so wird die Abweichung stets nach derselben Seite stattfinden, welche auch die Richtung des Stromes sein möge. Hieraus folgt, dass auch alternirende Ströme eine Bewegung des Eisenstabes verursachen werden.

Bellati hat sein Princip nur an einem sehr provisorisch construirten Apparat probirt. Die von ihm erzielten Resultate sind aber so befriedigend, dass ich mich bemüht habe, einen Apparat nach seinem Systeme zu construiren, wovon ich im Folgenden die Beschreibung geben will. Ich muss noch erwähnen, dass schon Vicentini[1]) sich bei seinen Untersuchungen über die Widerstände von Salzlösungen eines Bellati'schen Dynamometers, welches jedoch ohne Spiegelablesung war, bedient hat.

Auf einer runden Holzscheibe (Fig. 11) ist ein Hartgummirahmen *a* befestigt, ganz übereinstimmend mit demjenigen, welcher beim Nobili'schen Multiplicator gebraucht wird. Um den Rahmen sind 2400 Windungen eines 0,1 mm starken Kupferdrahtes gelegt. Dieser Draht ist in 4 Abtheilungen, jede von 600 Windungen, eingetheilt; die beiden Enden jeder Abtheilung sind mit zwei benachbarten Klemmschrauben verbunden und können dadurch auf verschiedene Weise combinirt werden. Wenn sämmtliche Windungen hintereinander verbunden waren, so war der Widerstand meines Instrumentes 408 Ohms.

Der Windungsrahmen wird von einer runden Hartgummiplatte bedeckt, worauf zwei weisse Linien gezeichnet sind; die eine steht senkrecht auf der Windungsfläche, die andere macht einen Winkel von 45° damit. Auf dem metallenen Ring *R* befinden sich 3 Messingsäulen, welche die runde Platte *P* tragen. In diese Platte wird das Messingstück geschraubt, worin die Glasröhre *B* festgekittet ist. Um den Apparat vor Luftströmungen zu schützen, wird ein metallener Mantel (Fig. 12) über die Platte *P* geschoben. Derselbe passt in den Ring *R* und ist von einer seitlichen, durch Spiegelglas verschlossenen Oeffnung versehen. Um der lästigen Re-

---

1) Vicentini, Atti della Accad. R. delle Sc. di Torino (2) **36.** 1884; Beibl. **9.** p. 131.

flexion der Spiegelglasplatte zu entgehen, macht diese letztere einen Winkel von einigen Graden mit der Axe des Mantels.

In Fig. 13 ist das Eisenbündel mit dem Spiegel dargestellt, *cd* ist ein dünnes Hartgummirohr, ein Ganzes bildend mit der Hartgummistange *ab*. In das Rohr *cd* ist ein Bündel sorgfältig geglühter Eisendrähte eingeschoben, deren jeder 18 mm lang und 0,4 mm dick ist; *ef* ist ein aus einem weissem Schweinehaar bestehender leichter der Axe des Eisenbündels paralleler Zeiger. In die obere Seite von *ab* ist ein Messingdraht *gh* eingeschraubt, woran der Planspiegel befestigt ist. Dieser hat einen Durchmesser von 20 mm, ist um die Stange *gh* verstellbar und kann folglich in jede beliebige Verticalebene gebracht werden. Das ganze System hängt an 2 Coconfäden, welche 30 cm lang und etwa 0,3 mm von einander entfernt sind.

Das Instrument wird in der Weise aufgestellt, dass die Windungsebene einen Winkel von 45° mit dem magnetischen Meridian bildet. Der Mantel wird jetzt in eine solche Lage gebracht, dass man durch das Fensterchen diejenige weisse Linie auf der Hartgummiplatte sehen kann, welche einen Winkel von 45° mit den Windungen macht. Durch Drehung des oben in der Glasröhre befindlichen Messingstabes, woran die Coconfäden befestigt sind, kann man Sorge tragen, dass der Zeiger *ef* (Fig. 13) sich gerade über dieser weissen Linie befindet. In diesem Falle bildet das Eisenbündel einen Winkel von 45° mit der Windungsebene und steht senkrecht zum magnetischen Meridian, ist also der Induction des Erdmagnetismus entzogen. Ist dies alles geschehen, so wird der Mantel soweit gedreht, bis die Glasplatte sich dem Spiegel gegenüber befindet.

Die Schwingungszeit des aufgehängten Systems ist etwa 15″, es können also die Umkehrpunkte mit Spiegelablesung sehr bequem wahrgenommen und notirt werden.

Die folgende Messung möge zeigen, dass der Nullpunkt genügend constant ist; der Abstand zwischen Spiegel und Scala war 2 m. In Fig. 14 ist angedeutet, wie die hierzu benutzten Wechselströme erregt wurden. *A* ist ein kleiner Inductionsapparat, wovon der primäre Draht mit einem

Bunsen'schen Elemente B verbunden und der Neeff'sche Hammer in Vibrationen versetzt wird; die secundäre Leitung bleibt ungeschlossen. Einige Centimeter vom Inductor entfernt liegt ein Bell'sches Telephon T[1]). Das jedesmalige Hervortreten und Verschwinden des Magnetismus im Eisenkern des Inductors inducirt Aenderungen im Magnetismus des Eisenkernes des Telephons, wodurch in der Telephonspule Wechselströme entstehen, welche zum Dynamometer D geleitet werden. Die auf diese Weise erregten Ströme sind ziemlich constant, wenigstens wenn die Contactschraube des Hammers ordentlich festgesetzt und der Platincontact gehörig gereinigt ist; für Messungen von längerer Dauer ist die Einrichtung aber ungenügend, da der Neeff'sche Hammer zuweilen plötzlich rascher oder langsamer zu vibriren anfängt, und die Intensität der Inductionsströme sich dadurch ändert.

Es wurden jedesmal fünf aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte notirt und daraus der Schwingungsmittelpunkt bestimmt.

Zuerst wurde der Nullpunkt bestimmt, danach wurden die Wechselströme durch das Instrument geschickt; jetzt wurde die Leitung wieder geöffnet und der Nullpunkt abermals bestimmt u. s. w.

In der erste Columne der untenstehenden Tabelle findet man die verschiedenen Werthe, die ich für den Nullpunkt fand; in der zweiten Columne den Mittelpunkt der Schwingungen, welche der Eisencylinder machte, wenn die Wechselströme durch das Instrument gingen.

Nullpunkt	Mittelpunkt der Schwingungen, wenn der Strom durch den Apparat ging
137,06	
137,23	223,87
136,58	222,72
136,78	222,37
136,68	221,88
136,70	222,32

1) Ein Siemens'sches Telephon kann für dieses Experiment nicht dienen, da dieses einen Hufeisenmagnet mit 2 Drahtspulen enthält. Wenn der Magnetismus im einen Eisenkern verstärkt wird, wird er gleichzeitig im anderen geschwächt, es entstehen also in beiden Spulen entgegengesetzt gerichtete Ströme, welche sich ungefähr aufheben.

Wie man sieht, ändert sich der Nullpunkt nur sehr wenig, es ist aber dazu nothwendig, dass die Zimmertemperatur ungefähr dieselbe bleibe. Bei einer Temperaturerhöhung von 10° C. änderte sich der Nullpunkt um etwa 80 mm und folgte ziemlich regelmässig den Temperaturänderungen des Zimmers.

Die Empfindlichkeit meines Dynamometers möge durch die folgenden Experimente ins Licht gestellt werden. Der Abstand zwischen Scala und Spiegel war wieder 2 m, sämmtliche 2400 Windungen waren hintereinander verbunden. Ein Blake-Mikrophon wurde mit einem Leclanché-Element und dem primären Draht eines kleinen Inductors verbunden, die secundäre Leitung wurde mit dem Dynamometer in Verbindung gebracht. Wurde jetzt auf 30 bis 40 cm Distanz von der Mikrophonmembran gesprochen, so zeigte das Dynamometer einen ersten Ausschlag von etwa 30 mm. Wurde ganz leise in ein Siemens'sches Telephon gesprochen, so gab das Instrument einen ersten Ausschlag von 100 mm. Das Sprechen dauerte bei diesen Experimenten stets etwas länger als die halbe Schwingungszeit des aufgehängten Systems. Da die durch das Sprechen in dem Telephon errregten Ströme jeden Augenblick ihre Intensität ändern, konnte ich nur erste Ausschläge und keine constante Ablenkung notiren. Wurde in das Siemens'sche Telephon ein kräftiges O gerufen, so gab das Dynamometer einen ersten Ausschlag von etwa 90°. Dieser Winkel konnte natürlicherweise nicht mit Spiegelablesung gemessen werden, sondern wurde durch das im Mantel befindliche Fensterchen an der Bewegung des weissen Zeigers wahrgenommen.

Wird das Instrument für Wechselströme, die nicht zu kräftig sind, um mit Spiegelablesung gemessen werden zu können, gebraucht, so wird man vom remanenten Magnetismus des Eisenbündels nichts bemerken. Wird aber ein kräftiger, constant gerichteter Strom durch die Windungen geschickt oder ein kräftiger Magnet dem Apparate genähert, so wird es zuweilen vorkommen, dass das Eisenbündel etwas Magnetismus behält. Dies hat dann stets eine Verschiebung des Nullpunktes zur Folge, weil der Erdmagnetismus

versucht, das Eisenbündel in den magnetischen Meridian zu bringen. Man würde durch Glühen der Eisendrähte ihnen diesen Magnetismus wieder nehmen können, ich habe aber ein einfacheres und ebenso zweckmässiges Mittel dafür ausgedacht. Wir wollen voraussetzen, dass das Eisenbündel durch einen Strom, den wir positiv nennen wollen, remanenten Magnetismus bekommen hat. Wenn wir jetzt einen negativen Strom, der ein wenig schwächer als der vorhergehende ist, durch die Windungen schicken, so wird, nachdem dieser aufgehört hat, das Eisen wieder einigen remanenten Magnetismus behalten, das Bündel wird aber jetzt einen Nordpol haben, wo es früher einen remanenten Südpol hatte, und da der negative Strom schwächer war, als der frühere positive, wird auch jetzt der Magnetismus, den das Bündel behält, schwächer als vorher sein. Wenn man also Wechselströme abnehmender Intensität in das Instrument sendet, wird der remanente Magnetismus stets schwächer werden und zuletzt ganz verschwinden.[1]) Zu dem Zwecke verbinde ich ein Siemens'sches Telephon mit dem Instrument und rufe anfangs laut, aber stets schwächer werdend, den Vocal O. Wenn der Schall endlich ganz aufgehört hat, so hat auch das Eisenbündel seinen remanenten Magnetismus ungefähr völlig verloren. Das folgende Experiment zeigt die Wahrheit dieser Behauptung.

Der Nullpunkt war beim Anfang der Messung 181,5. Jetzt wurde ein kräftiger Inductionsstrom in das Instrument geschickt. Dieser wurde erregt durch das plötzliche Eindrücken der Eisenplatte des Siemens'schen Telephons; bevor die Platte losgelassen, wurde die Leitung schon wieder unterbrochen. Die Scala verschwand ganz aus dem Felde des Fernrohrs; nachdem das Eisenbündel zur Ruhe gekommen, ergab sich, dass der Nullpunkt 126 geworden war, das Eisenbündel zeigte also remanenten Magnetismus. Nun wurde die Leitung wieder geschlossen, und auf die früher beschrie-

---

1) Eine auf dasselbe Princip beruhende Methode ist von Deprez angewendet worden, um Taschenuhren, die durch die Nähe grösserer Dynamomaschinen magnetisirt waren, ihren Magnetismus zu entnehmen. Compt. Rend. **97.** p. 41. 1883.

bene Weise der Vocal O in das Telephon hineingerufen. Das Eisenbündel machte Schwingungen von etwa 180°; nachdem es wieder in die Ruhelage gekommen, war der Nullpunkt 178,5 geworden. Das Telephon wurde jetzt in umgekehrtem Sinne mit dem Dynamometer verbunden, wodurch also auch der Inductionsstrom, durch das Eindrücken der Eisenmembran erregt, in umgekehrter Richtung durch den Apparat ging. War das Eisenbündel durch diesen Strom remanent magnetisirt, so musste es einen Nordpol zeigen wo es früher einen Südpol hatte; dies war auch wirklich der Fall, was sich aus der Thatsache ergab, dass der Nullpunkt jetzt höher geworden war: der Spiegel zeigte in der Ruhelage auf 300. Nachdem abermals ein schwächer werdendes O gerufen war, kam der Nullpunkt wieder zurück auf 179,0.

Wie man sieht, wird der remanente Magnetismus des Eisenbündels auf diese Weise sehr vollständig entfernt. Es passirt aber zuweilen, dass man dieses Experiment einige mal wiederholen muss, bevor der ursprüngliche Nullpunkt wieder eintritt. Die Ursache liegt wahrscheinlich darin, dass das Eisenbündel infolge des O-Rufens sehr grosse Schwingungen macht und dadurch während einer kurzen Zeit in eine den Windungen ungefähr parallele Lage kommt. Solange das Eisenbündel den Windungen parallel ist oder nur einen kleinen Winkel mit denselben bildet, ist es der magnetisirenden Wirkung der durch das Instrument gehenden Ströme entzogen. Kommt es nun nach einiger Zeit wieder in eine solche Lage, dass es einen bedeutenden Winkel mit den Windungen bildet, und also deren magnetisirenden Wirkung wieder ausgesetzt ist, so kann es vorkommen, dass die durch das decrescirende O in dem Telephon erregten Inductionsströme nicht mehr von genügender Intensität sind, um die remanente Polarität umzukehren. Infolge dessen wird das Bündel also eine gewisse Magnetisirung behalten.

Um ein sicheres Resultat zu erzielen, ist es erwünscht, das Eisenbündel senkrecht zu den Windungen zu stellen und danach die Coconfäden herunter zu lassen, bis der Zeiger auf der Hartgummideckplatte liegt.

Für kleine Abweichungen ist die Theorie des Instruments sehr einfach. Nehmen wir an, dass das Eisenbündel, wenn es senkrecht auf die Windungen gestellt ist, durch einen durch das Instrument gehenden Strom i das magnetische Moment $c\mu i$ bekommt. Wird es um einen Winkel γ gedreht, so wird das Moment nur $c_\gamma i\mu . \cos\gamma$ sein.

Das Drehungsmoment, welches von einem Strom i ausgeübt wird auf einen Stab des magnetischen Moments 1, welcher Stab einen Winkel von $90 - \gamma$ mit der Windungsebene bildet, ist proportional $i \sin\gamma$. Das von diesem Strom auf unser Eisenbündel des magnetischen Moments $c_\gamma i\mu . \cos\gamma$ ausgeübte Drehungsmoment ist also:

$$(1) \qquad K = Ci^2\mu . \sin\gamma \cos\gamma .$$

Bei dem Bellati'schen Dynamometer macht das Eisenbündel in der Ruhelage einen Winkel von 45° mit den Windungen. Entsteht nun durch einen durch die Windungen gehenden Strom noch eine Ablenkung α, so wird das Bündel einen Winkel $45 - \alpha$ mit einer auf der Windungsebene senkrechten Linie bilden. Um also das Drehungsmoment, welches von einem Strom i auf unser Eisenbündel ausgeübt wird, zu kennen, müssen wir in (1) den Winkel γ durch $45 - \alpha$ ersetzen:

$$K = Ci^2\mu . \sin(45 - \alpha)\cos(45 - \alpha) .$$

Dieses Drehungsmoment wird durch die Torsion der Aufhängedrähte im Gleichgewicht gehalten, und da diese bei einer Bifilarsuspension dem Sinus der Ablenkung proportional ist:

$$\text{Const.}\, i^2\mu . \sin(45 - \alpha)\cos(45 - \alpha) = \text{Const.} \sin\alpha ,$$

$$i^2 = C\frac{\sin\alpha}{\sin(45 - \alpha)\cos(45 - \alpha)} = C\,\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos 2\alpha},$$

$$i^2 = C\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\alpha)} .$$

Für kleines α kann $\sin^2\alpha$ vernachlässigt werden, und ist also:

$$i^2 = C\sin\alpha ,$$

und weil ebenfalls für kleines α $\sin\alpha$ proportional $\operatorname{tg} 2\alpha$ ist, so ist die an der Scala abgelesene Abweichung dem Quadrate der Stromintensität proportional.

Für grössere Ablenkungen müsste das Instrument graduirt werden, man würde dazu Wechselströme, wovon das

gegenseitige Intensitätsverhältniss bekannt war, durch die Windungen schicken müssen und danach eine Curve construiren. Da mir aber die Hülfsmittel zu diesem Experiment fehlten, habe ich denselben Zweck durch die Anwendung constant gerichteter Ströme zu erreichen gesucht, was mir jedoch nicht gelungen ist, weil in diesem Falle der Erdmagnetismus eine noch grössere Wirkung auf das Eisenbündel ausübt als der durch die Windungen gehende Strom selbst. Der Erdmagnetismus strebt das Bündel in die Meridianebene zu bringen und verstärkt die Wirkung der Windungen oder wirkt ihr entgegen, je nach der Richtung des durch das Instrument gehenden Stromes. Es ergab sich nun, dass nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung der Ablenkung sich mit der Stromesrichtung ändert. Ein Strom von $^1/_{130\,000}$ Ampère wurde in einer bestimmten Richtung in das Instrument geschickt, die Abweichung war 24,8 mm nach rechts. Jetzt wurde der Strom umgekehrt, die Abweichung war nun 22,8 mm nach links. Hieraus ergibt sich, dass der Erdmagnetismus eine bedeutend kräftigere Wirkung auf das Bündel ausübt als der durch die Windungen gehende Strom. Es ist folglich das Graduiren des Instrumentes auf diese Weise nicht möglich.

Man kann das Eisenbündel der erdmagnetischen Wirkung entziehen, wenn man die Windungen so combinirt, dass der Strom in der linken Hälfte des Rahmens in umgekehrter Richtung fliesst als in der rechten. Das Eisenbündel bekommt dadurch 3 Pole, z. B. einen Südpol in der Mitte und an jedem Ende einen Nordpol; bei richtiger Lage und Stärke dieser Pole wird das Bündel astatisch sein. In diesem Fall könnte man also den Apparat mittelst gleichgerichteter Ströme graduiren. Da sich aber jetzt die magnetisirenden und ablenkenden Wirkungen beider Windungshälften gegenseitig entgegenwirken, so war zu befürchten, dass das Instrument bei dieser Windungscombination viel weniger empfindlich sein würde, was sich auch in der That ergab. Es wurden die auf die in Fig. 14 angedeuteten Weise erregten Wechselströme durch das Instrument geschickt; bei der gewöhnlichen Windungscombination war die Ablenkung 155,3 mm, bei der

astatischen Magnetisirung nur 14,9 mm. Da der Apparat also im letzteren Fall viel weniger empfindlich ist, habe ich diese Idee nicht weiter verfolgt.

Es kann also das Instrument nur mittelst Wechselströme graduirt werden. Selbstverständlich kann die Bestimmung der Constante ebenso wenig mit gleichgerichteten Strömen geschehen; dieselbe kann nur gefunden werden, wenn man das Instrument mit einem Dynamometer, dessen Constante bekannt ist, in eine Leitung bringt und durch beide Apparate dieselben Wechselströme schickt.

Ich habe noch versucht, die Empfindlichkeit des Instruments durch das Einschieben zweier Eisenbündel in zwei dazu befindliche horizontale Löcher des Hartgummigehäuses zu steigern. Aus der gegenseitigen Lage der Pole dieser 3 Bündel (Fig. 15) ist zu ersehen, dass die beiden Bündel *BB* das Bündel *C* senkrecht auf die Windungsebene zu bringen suchen, dass sie also der Wirkung des Stromes auf *C* zu Hülfe kommen. Es ergab sich dennoch, dass die Empfindlichkeit des Instruments durch diese Abänderung etwas kleiner wurde; die Ursache davon ist wahrscheinlich, dass der Pol N_2 durch die Nähe von N_1, und ebenso Z_2 durch die Nähe von Z_3 etwas schwächer magnetisirt wird als vorher, wo die beiden Bündel *BB* nicht da waren. Infolge dessen wird auch die ablenkende Wirkung des Stromes auf das Bündel *C* eine geringere sein als früher. Was man also durch diese Aenderung an der einen Seite gewinnt, wird an der anderen Seite wieder verloren.

Eine bessere Einrichtung, die ich aber bis jetzt noch keine Gelegenheit zu erproben hatte, wäre die in Fig. 16 angegebene. *C* ist das aufgehängte Eisenbündel, *BB* sind die festen Bündel, *ab* ist die Ebene der Windungen, zwischen welchen *C* aufgehängt ist. Die Bündel *BB* werden gleichfalls vom Strome umkreist und erhalten die in der Figur angedeutete Magnetisirung. Kehrt die Stromesrichtung um, so ändern sich sämmtliche 6 Pole, und die Richtung der Ablenkung bleibt unverändert dieselbe.

Wie wir früher gesehen, bringt der Erdmagnetismus eine ziemlich grosse Ablenkung hervor, wenn man einen

galvanischen Strom geringer Intensität durch die Windungen sendet. Dies brachte mich auf den Gedanken, zu versuchen, inwiefern das Bellati'sche Dynamometer als Galvanometer würde gebraucht werden können. Das Princip dieses Galvanometers ist ein ganz anderes als das aller anderen Galvanometer. Während bei einem gewöhnlichen Galvanometer der Erdmagnetismus der Ablenkung der Nadel entgegenwirkt, und man deshalb versucht, diesen Einfluss durch Astasiren zu verringern, wird bei meinem Instrument der Erdmagnetismus gerade dazu gebraucht, das Eisenbündel abzulenken, während der Strom ausschliesslich dazu dient, das Eisenbündel zu magnetisiren.

Zu diesem Zweck wurde das Instrument um 45° aus der Lage, worin es sich bis jetzt befand, gedreht, wodurch die Windungsebene in den magnetischen Meridian zu liegen kam. Das Eisenbündel wurde um soviel gedreht, dass der weisse Zeiger derjenigen Linie, die senkrecht auf der Windungsebene steht, parallel war, das Eisenbündel stand also senkrecht zu den Windungen und auch senkrecht zum magnetischen Meridian. Als ich nun einen Strom von 0,000 001 25 Ampère in das Instrument sandte, ergab sich eine Ablenkung von 6,7 mm, bei 1,9 m Distanz zwischen Spiegel und Scala. Obgleich dies für ein Spiegelgalvanometer keine bedeutende Empfindlichkeit genannt werden kann, ist das Resultat für einen so einfachen Apparat doch ziemlich befriedigend. Wenn man annehmen kann, dass die Steifheit der Coconfäden sich nicht bedeutend ändert, so wird die Constante dieses Instruments weniger Aenderungen ausgesetzt sein, als solches bei einem gewöhnlichen Galvanometer der Fall ist, da sich in meinem Instrument keine permanenten Magnete befinden.

Um dieses Galvanometer empfindlicher zu machen, würde man versuchen müssen, der erdmagnetischen Wirkung zu Hülfe zu kommen. Dies könnte auf sehr einfache Weise geschehen durch das Anbringen zweier permanenter Magnete, wie in Fig. 17 angegeben, wo A das aufgehängte Eisenbündel und B und C die festen permanenten Magnete vorstellen. Die Polarität von A hängt natürlicherweise ab von der

Richtung des Stromes, der durch das Instrument geht. Wenn die Magnete B und C kräftig genug sind, wird wahrscheinlich die erdmagnetische Wirkung vernachlässigt, und das Instrument in jeder beliebigen Lage bezüglich des magnetischen Meridians aufgestellt werden können. Dieses Galvanometer hat jedoch einen Nachtheil: Kupferdämpfung kann man nicht anwenden. Weil das Eisenbündel nur sehr schwach magnetisch ist, kann es durch seine Bewegung nur Dämpfungsströme geringer Intensität induciren.

Ich hatte bis jetzt noch keine Gelegenheit, das Galvanometer mit den Verstärkungsmagneten zu probiren.

Die Theorie dieses Galvanometers ohne Verstärkungsmagnete ist für kleine Ausschläge die folgende: Ist μi der von einem Strom i in dem Eisenbündel inducirte Magnetismus, wenn dasselbe senkrecht auf der Windungsebene steht, so wird bei einer kleinen Ablenkung α der inducirte Magnetismus $\mu i . \cos\alpha$ sein. Das vom Erdmagnetismus auf das Eisenbündel ausgeübte Kräftepaar wird dann Const. $\mu . i . \cos^2\alpha$ sein, und da dasselbe durch die Torsion im Gleichgewicht gehalten wird, ist: Const. $\mu . i . \cos^2\alpha =$ Const. $\sin\alpha$.

$$i = C\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = C\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Für kleines α ist $\cos\alpha = 1$: $i = C \operatorname{tg}\alpha$. Ferner kann man für ein kleines α $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$ nehmen, und dann ist also die an der Scala gemessene Ablenkung der Stromintensität direct proportional.

Die richtende Wirkung der Windungen auf das Eisenbündel und der von der Erde im Bündel inducirte Magnetismus sind beide proportional $\sin\alpha$ und können für ein kleines α vernachlässigt werden.

Ich kann noch hinzufügen, dass der oben beschriebene Apparat von der hiesigen Firma P. J. Kipp en Zonen zum Preise von 92 M. fabricirt und geliefert wird.

Delft, 13. Februar 1885.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1885. ANNALEN № 7.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXV.

I. *Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten; von L. Graetz.*

2. Abhandlung.

1. In der ersten Abhandlung unter diesem Titel[1]) wurde eine neue Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung von Flüssigkeiten beschrieben und ihre Anwendung an einigen Beobachtungen mitgetheilt. Die Benutzung der Methode litt damals noch an einigen Schwierigkeiten, da die mathematische Theorie nicht weit genug geführt werden konnte, um die auftretenden Constanten theoretisch zu bestimmen. Im Folgenden wird die Theorie vollständig entwickelt. Es zeigt sich dabei, dass bei den Beobachtungen gewisse Bedingungen festgehalten werden müssen, die in der ersten Abhandlung noch unberücksichtigt geblieben waren.

Es wurde dann von einer Reihe ganz verschiedenartiger Flüssigkeiten die Wärmeleitungsfähigkeit und zum Theil ihre Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt. Dabei zeigte es sich bestätigt, was zuerst H. F. Weber[2]) ausgesprochen hat, dass die Temperaturleitungsfähigkeit ($a^2 = k/\varrho c$) der verschiedenartigsten Flüssigkeiten nur innerhalb verhältnissmässig kleiner Grenzen variirt, dass insbesondere gar kein Zusammenhang zwischen der Leitungsfähigkeit und der Reibung von Flüssigkeiten zu erkennen ist. Eine Glycerinlösung, deren Reibungscoëfficient etwa 1000 mal so gross ist, wie der von Aether, eine Chlorcalciumlösung, deren Reibung etwa 100 mal so gross ist, zeigen nahezu dieselbe Temperaturleitungsfähigkeit. In dieser Beziehung unterscheiden sich also die Flüssigkeiten ganz wesentlich von den Gasen. Wäh-

1) Graetz, Wied. Ann. 18. p. 79. 1883.

2) H. F. Weber, Wied. Ann. 10. p. 316. 1880.

rend bei den Gasen die Wärmeleitungsfähigkeit der Reibung (und der specifischen Wärme) proportional geht, hängt bei den Flüssigkeiten die Wärmeleitung in erster Linie nur ab von der specifischen Wärme und nur unbedeutend von anderen Eigenschaften. Noch in einer zweiten Hinsicht findet in Beziehung auf Reibung und Wärmeleitung ein Unterschied zwischen Gasen und Flüssigkeiten statt. Bei den Gasen wachsen sowohl die Reibung als die Wärmeleitung mit steigender Temperatur, die Wärmeleitung ungefähr so, wie es die Clausius'sche Theorie verlangt[1]), die Reibung etwas rascher. Bei den Flüssigkeiten dagegen nimmt die Wärmeleitung mit steigender Temperatur zu, die Reibung ab.

2. Diese Verschiedenartigkeit des Verhaltens von Flüssigkeiten und Gasen lässt sich aber, wie es scheint, ganz ungezwungen aus den Vorstellungen über die Art der Bewegung der Molecüle ableiten, auch ohne dass wir eine ebenso ausgebildete kinetische Theorie der Flüssigkeiten haben, wie sie für die Gase entwickelt ist. In einem flüssigen Medium bleibt nach Clausius ein Molecül im allge-
en in der Anziehungss phäre seiner Nachbarmolecüle und
diese nur, um dafü r zu andere n Nachbarmolecülen in eine entsprechende Lage zu kommen. Da die Anziehungskräfte zwischen den Molecülen nur auf sehr geringe Entfernungen wirken, so wird jedes Molecül nur beeinflusst von denjenigen Nachbarmolecülen, welche auf einer kleinen um das Molecül gelegten Kugel liegen, und wenn die Flüssigkeit überall gleich dicht und in Ruhe ist, so heben sich in jeder Lage des Molecüls während seiner Bewegung die Anziehungskräfte sämmtlicher Nachbarmolecüle auf (ausser bei den Molecülen an der Oberfläche). Aus dieser Betrachtung hat van

---

1) Graetz, Wied. Ann. 14. p. 232. 1881; Christiansen, Wied. Ann. 14. p. 29. 1881. Auch Winkelmann (Wied. Ann. 19. p. 646. 1883) kommt durch neuere Versuche zu dem Resultat, dass der Temperaturcoëfficient der Wärmeleitung dem von Clausius geforderten nahe steht (0,002 08 und 0,00160 bei verschiedenen Apparaten), bestätigt also in dem Hauptdifferenzpunkt mit mir jetzt das Resultat, welches ich gleichzeitig mit Christiansen gefunden hatte. Auf manche seiner Ausführungen komme ich bei anderer Gelegenheit zurück.

der Waals[1]) geschlossen, dass auch bei Flüssigkeiten die Geschwindigkeit der Molecüle, wie bei den Gasen, mit einem Oberflächendruck N zusammenhängt durch die Gleichung:

$$\sum \frac{1}{2} m V^2 = \frac{3}{2} N v,$$

wenn v das Volumen der Flüssigkeit ist.

Betrachten wir also eine ruhende Flüssigkeit von überall gleicher Temperatur und Dichte, so wird zwar im allgemeinen die Bahn keines Theilchens zwischen 2 Zusammenstössen geradlinig sein, aber wenn wir uns die Bahnen aller Theilchen nach drei rechtwinkligen Coordinaten zerlegt denken, so werden sich zu jeder Zeit die Componenten für sämmtliche Molecüle zusammen aufheben, und wir können daher für diesen Fall uns eine Flüssigkeit durch ein System von geradlinig fortschreitenden Molecülen mit gewisser mittlerer Geschwindigkeit und gewisser mittlerer Weglänge ersetzt denken. Die Anziehung der Molecüle hebt sich im ganzen System auf.

3. Betrachten wir nun die Wärmeleitung, die, wie bei den Gasen, als bestehend in der Uebertragung von kinetischer Energie aufgefasst werden soll. Denken wir uns 2 Ebenen senkrecht zur x-Axe, (die in der oberen Ebene anfange), zwischen ihnen Flüssigkeit, oben von der Temperatur T_1, unten von der Temperatur T_0 ($T_1 > T_0$), und betrachten wir eine Schicht im Abstand x von der oberen Ebene. Zunächst haben die Molecüle auf der wärmeren Seite eine grössere Geschwindigkeit als auf der kälteren. Es geht deshalb eine gewisse positive Energiemenge von der wärmeren Seite zur kälteren, ganz wie bei den Gasen, und es wird sich die Wärmeleitungsfähigkeit, soweit sie aus diesem Vorgang allein besteht, durch eine ähnliche Formel ausdrücken wie bei den Gasen, nämlich:

$$k = \varkappa N m \Omega L c.$$ [2])

Zweitens aber sind auf der wärmeren Seite die Molecüle weiter auseinander als auf der kälteren. Ein jedes Molecül

1) Van der Waals, Ueber die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes. Deutsch von F. Roth, p. 11. 1881.

2) O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase. p. 337.

der Schicht wird daher durch die Molecularkräfte stärker nach der kälteren Seite gezogen. Es tritt also auch dadurch ein Energiezuwachs in Richtung der positiven x-Axe ein. Zu dem Factor $p\varepsilon$ in der Clausius'schen Ableitung[1]) tritt also noch additiv eine Grösse d, welche zwar abhängt von den Molecularkräften, aber nur insofern, als deren Wirksamkeit durch die Aenderung der Dichtigkeit geändert wird. Es treten also nicht die Molecularkräfte selbst wesentlich bei der Wärmeleitung auf, sondern nur ihre Differenzen infolge der Entfernungsänderung der Molecüle bei verschiedener Temperatur.

Ganz anders aber ist das Verhältniss bei der Reibung. Wenn der obersten Schicht in unserem Beispiel eine Geschwindigkeit z. B. nach der y-Richtung ertheilt wird, so wird einerseits zwar auch durch die molecularen Stösse ein positives Bewegungsmoment in Richtung der y-Axe durch die Grenzfläche hindurchgehen und dadurch die zweite Schicht auch in Bewegung kommen. Weit wirksamer noch aber muss in diesem Falle der Einfluss der Molecularkräfte sein. Durch die Anziehungskräfte muss jedes Molecül der zweiten Schicht den durchschnittlichen Bewegungen der ersten in Richtung der y-Axe folgen und so fort in der dritten u. s. w. Schicht. Da die Molecüle durchschnittlich so nahe bei einander liegen, dass ihre Anziehungskräfte wirksam sind, so wird diese Uebertragung der Bewegung von Schicht zu Schicht den Hauptantheil an der Reibung bilden. Die Reibung der Flüssigkeiten also muss wesentlich abhängen von den Molecularkräften, die Wärmeleitung aber nur unwesentlich. Im allgemeinen kann man sagen, dass man bei einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten nur dann auf die Molecularkräfte wesentlich wird Rücksicht nehmen müssen, wenn es sich um eine Aenderung des mittleren Abstandes der Molecüle (also um Volumenänderung) handelt, und wenn von sämmtlichen Molecülen, die auf einer um einen Punkt der Flüssigkeit gelegten kleinen Kugel liegen, die Resultante der Geschwindigkeit von Punkt

1) Clausius, Pogg. Ann. **115.** p. 14. 1861.

zu Punkt variirt. Dies ist aber bei der Reibung der Fall, bei der Wärmeleitung nicht.

4. Aus dieser Auffassung ergibt sich nun einerseits sofort, dass Reibung und Wärmeleitung bei Flüssigkeiten in keiner wesentlichen Beziehung stehen, da sie der Hauptsache nach auf wesentlich verschiedenen Ursachen beruhen. Andererseits erklärt sich auch das Verhalten derselben gegen die Temperatur. Die Geschwindigkeit der Molecüle und die mittlere Weglänge wachsen mit der Temperatur und daher auch die übertragene Energie; also muss die Wärmeleitung mit steigender Temperatur wachsen, da sie hauptsächlich von dieser durch die Stösse vermittelten Energieüberführung abhängt. Dagegen nimmt die Wirkung der Molecularkräfte mit steigender Temperatur ab, weil die Molecüle durchschnittlich weiter auseinander sind. Daher nimmt auch die Reibung mit steigender Temperatur ab, da bei nicht zu hohen Temperaturen dieser Einfluss überwiegt. Da aber der von den Stössen herrührende Theil der Reibung mit der Temperatur wächst, so muss diese Abnahme bei höherer Temperatur geringer werden, wie es der Versuch zeigt.[1]) Ferner stimmt auch damit überein, dass die Reibung mit grösserer Dichte (bei gleicher Temperatur) zunimmt, wie es Warburg und Babo[2]) bei flüssiger und gas-förmiger Kohlensäure beobachtet haben. Auch dass flüssige Kohlensäure von der Dichte 0,8 bei einer zwischen 20 und 32,6° liegenden Temperatur ein Minimum der Reibung hat[3]), lässt sich aus dem Zusammenwirken von molecularem Zug und molecularen Stössen erklären. Uebrigens muss auch bei der Wärmeleitung durch den Uebergang in den gasförmigen Zustand eine Abnahme des Coëfficienten stattfinden, da die Wärmeleitung der Gase kleiner zu sein scheint als die der Flüssigkeiten, obwohl noch keine Substanz im flüssigen und gasförmigen Zustand zugleich untersucht ist.

Ist diese Auffassung richtig, so wird bei einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten die Wärmeleitung uns Aufschluss

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. **2.** p. 387. 1877.
2) Warburg und Babo, Wied. Ann. **17.** p. 421. 1882.
3) Warburg und Babo, l. c. p. 423.

geben hauptsächlich über die moleculare Geschwindigkeit und Weglänge, die Reibung über die molecularen Kräfte und Abstände der Molecüle. Wenn nun im Folgenden gezeigt wird, dass für die untersuchten Flüssigkeiten:

$$k = A \varrho c$$

ist, wo A von Flüssigkeit zu Flüssigkeit nur wenig variirt, so würde, wenn man in erster Reihe von den Molecularkräften absieht, daraus nur folgen, dass das Product aus molecularer Geschwindigkeit und molecularer Weglänge für die verschiedenen Flüssigkeiten nur wenig variirt. Das hätte gar nichts Auffallendes, denn auch bei den verschiedensten Gasen, ausser bei Wasserstoff, variirt dieses Product nur etwa zwischen 1 und 2.[1]) Das braucht aber durchaus kein allgemeines Resultat zu sein. Es ist deshalb auch nicht nöthig, wie Weber es thut, die Wärmeleitung von Quecksilber, bei dem die Constante A etwa 30 mal so gross ist, einen ganz anderen Vorgang, nämlich der inneren Strahlung zuzuschreiben, die für uns ja bis jetzt nur ein Wort ist.

5. Um die Theorie der Versuche zu vervollständigen, führe ich kurz an, dass die Methode darin besteht, dass eine Flüssigkeit von der Temperatur T_1 durch eine enge Röhre, deren Mantel auf der Temperatur T_0 gehalten wird, fliesst, und dass die Mitteltemperatur U und das Volumen W der in bestimmter Zeit ausfliessenden Flüssigkeit im stationären Zustand gemessen wird. Unter Annahme des Poiseuille'schen Gesetzes ergab sich daraus die Differentialgleichung:

$$2\alpha\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Die Lösung dieser Gleichung, zusammen mit den Grenzbedingungen, wurde auf die Form gebracht:

$$u = T_1 \sum C_i e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 \pi z}{2W}} V_i;$$

die Function V_i genügte der Differentialgleichung ($r/R = y$ gesetzt):

---

1) Siehe die Zusammenstellung bei O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, p. 45 u. 142.

$$\frac{d^2 V_i}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d V_i}{dy} + \mu_i^2 (1 - y^2)\, V_i = 0,$$

die Constanten μ_i waren die Wurzeln der Gleichung:

$$V(1) = 0.$$

Durch Reihenentwickelung ergab sich $\mu_1 = 2{,}7043$, $\mu_2 = 6{,}50$.

Die Constanten C_i konnte ich damals noch nicht theoretisch bestimmen. Sie müssen der Bedingung genügen, dass für alle y ist:

$$1 = \sum_i C_i V_i.$$

Um diese Bestimmung auszuführen, müssen von den neuen Functionen V_i zwei Sätze bewiesen werden, analog denen bei Kugelfunctionen und Bessel'schen Functionen.

Satz I. Wenn V_i und $V_\varkappa$ zwei Functionen sind, die den Gleichungen genügen:

$$(1) \qquad \frac{d^2 V_i}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d V_i}{dy} + \mu_i^2 (1 - y^2)\, V_i = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2 V_\varkappa}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d V_\varkappa}{dy} + \mu_\varkappa^2 (1 - y^2)\, V_\varkappa = 0,$$

so ist, falls μ_i und $\mu_\varkappa$ Wurzeln der Gleichung $V(1) = 0$ sind, und $\mu_i \gtrless \mu_\varkappa$ ist:

$$\int_0^1 V_i V_\varkappa y (1 - y^2)\, dy = 0.$$

Es seien μ_i und $\mu_\varkappa$ zuerst zwei beliebige Zahlen. Multiplicirt man dann (1) mit $V_\varkappa dy$, (2) mit $V_i dy$ und integrirt von 0 bis 1, nachdem man sie voneinander subtrahirt hat, so wird:

$$(3) \qquad (\mu_i^2 - \mu_\varkappa^2) \int_0^1 V_i V_\varkappa y (1 - y^2)\, dy = \left(V_i \frac{d V_\varkappa}{dy} - V_\varkappa \frac{d V_i}{dy} \right)_{y=1}.$$

Falls also $V_i(1) = 0$ und $V_\varkappa(1) = 0$ sind, also μ_i und $\mu_\varkappa$ Wurzeln der Gleichung $V(1) = 0$ sind, und falls $\mu_i \gtrless \mu_\varkappa$ ist, so ist Satz I bewiesen.

Satz II. Der Werth dieses Integrals für $i = \varkappa$ bestimmt sich durch:

$$\int_0^1 V_i V_i y (1 - y^2)\, dy = \frac{1}{2\mu_i} \left(\frac{d V_i}{d\mu_i} \frac{d V_i}{dy} \right)_{y=1}.$$

Seien zuerst wieder μ_i und μ_x beliebige Zahlen, dann gilt die Gleichung (3). Setzen wir nun:

$$\mu_x = \mu_i + d\mu_i, \text{ also } V_x = V_i + \frac{\partial V_i}{\partial \mu_i} d\mu_i,$$

so wird unsere Gleichung:

$$2\mu_i \int_0^1 V_i V_i y (1 - y^2)\, dy = \left(\frac{\partial V_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial V_i}{\partial y} - V_i \frac{\partial^2 V_i}{\partial \mu_i \partial y}\right)_{y=1}.$$

Ist nun speciell μ_i eine Wurzel der Gleichung $V(1) = 0$, so folgt:

$$\int_0^1 V_i V_i y (1 - y^2)\, dy = \frac{1}{2\mu_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial V_i}{\partial y}\right)_{y=1}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Mit Hülfe dieser beiden Sätze ergibt sich aus der Gleichung:

$$1 = \sum C_i V_i,$$

durch Multiplication mit $V_i y (1 - y^2)\, dy$ und Integration:

$$\int_0^1 V_i y (1 - y^2)\, dy = C_i \int_0^1 V_i V_i y (1 - y^2)\, dy.$$

Das Integral links ist aber, wie sich aus der Differentialgleichung ergibt:

$$= -\frac{1}{\mu_i^2} \left(\frac{d V_i}{d y}\right)_{y=1},$$

also folgt:

$$C_i = -\frac{2}{\mu_i} \frac{1}{\left(\frac{d V_i}{d \mu_i}\right)_{y=1}}.$$

Es ist: $\left(\frac{d V_1}{d \mu_1}\right)_{y=1} = -0{,}50082, \quad \left(\frac{d V_2}{d \mu_2}\right)_{y=1} = +1{,}12290.$

Wir erhalten so die Temperatur u im Punkte yz:

$$u = -2\, T_1 \sum_i \frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\left(\frac{d V_i}{d \mu_i}\right)_{y=1}} e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 \pi z}{2 W}} V_i(y).$$

Beobachtet wird aber nicht die Temperatur jedes einzelnen Punktes des Endquerschnittes $(z = l)$, sondern die Mitteltemperatur U der ausfliessenden Flüssigkeit. Dieselbe bestimmt sich durch die Gleichung:

$$U = -T_1 \sum_i \frac{8}{\mu_i} \frac{1}{\left(\frac{dV_i}{d\mu_i}\right)_{y=1}} e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 \pi l}{2W}} \int_0^1 V_i y (1 - y^2)\, dy$$

$$= T_1 \sum \frac{8}{\mu_i^3} \left(\frac{\frac{dV_i}{dy}}{\frac{dV_i}{d\mu_i}}\right)_{y=1} e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 \pi l}{2W}}.$$

Es ist: $\left(\frac{dV_1}{dy}\right)_{y=1} = -1{,}01213$, $\left(\frac{dV_2}{dy}\right)_{y=1} = 1{,}25441$,
mithin ergeben sich in der Endgleichung[1]):

$$U = T_1 \sum p_i e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 \pi l}{2W}} \tag{4}$$

die Constanten $p_1 = 0{,}81747$, $p_2 = 0{,}0325$.

In Wirklichkeit hängt sowohl die Wärmeleitungsconstante als die mittlere Geschwindigkeit α von der Temperatur ab. Doch hat diese Methode den Vorzug, dass diese Abhängigkeit aus den Formeln herausfällt, wenn man nur voraussetzt, was sehr angenähert der Fall ist, dass die Temperaturabhängigkeit von a^2 und α dieselbe ist. Dann wäre nämlich die exacte Differentialgleichung:

$$2\alpha_0 (1 + \gamma u)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial u}{\partial z} = a_0^2 (1 + \gamma u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

woraus man erkennt, dass die abgeleitete Gleichung ohne Correction für jede Temperatur angewendet werden kann. Physikalisch beruht das darauf, dass bei höherer Temperatur zwar die Flüssigkeit schneller durch die Röhre fliesst und daher eine geringere Temperaturerniedrigung erleiden wird. Durch die erhöhte Wärmeleitungsfähigkeit bei höherer Temperatur wird aber diese Abnahme wieder ausgeglichen. Aus diesem Grunde ist auch der Umstand ohne Einfluss, dass die einzelnen Flüssigkeitsfäden infolge der Temperaturabhängigkeit der Reibung mit grösserer oder geringerer Geschwindigkeit als der mittleren ihre Wärme durch den Endquerschnitt hindurch transportiren. Dieser Einfluss lässt sich exact berechnen, ist aber nur sehr unbedeutend.

1) Graetz, Wied. Ann. 18. p. 88. 1883.

6. Die Formel (4) ist aber geknüpft an die Gültigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes. Da nun die Röhren nicht zu eng genommen werden durften, weil geringe Verunreinigungen Fluidität und Wärmeleitung entgegengesetzt beeinflussen und sich daher in ihrem Resultat verstärken, so ist die Anwendung der Methode beschränkt auf geringe Druckhöhen. In der That zeigte sich bei Benutzung der Formel (4), dass, wenn man von erheblichen Drucken abwärts ging, der berechnete Werth von a^2 zunahm, bis er bei verhältnissmässig geringen Drucken constant wurde. Andererseits darf man aber auch nicht ganz geringe Drucke anwenden, weil dann zwei theoretische und ein experimenteller Uebelstand eintreten, die die Resultate wieder beeinflussen. Erstens wird nämlich dann die Differenz der Ausflusstemperatur U von der Temperatur des Bades T_0 so klein, dass die zufälligen Schwankungen zu grossen Einfluss erhalten, andererseits ist Einfluss- und Ausflusstemperatur (T_1 und U) so verschieden, dass man nicht den Werth des Wärmeleitungscoëfficienten auf die Temperatur $(T_1 + U)/2$ beziehen darf. Von der experimentellen Schwierigkeit wird bald die Rede sein. Deswegen ist der Versuch auf ein ziemlich enges Druckintervall beschränkt, welches experimentell für die Flüssigkeiten von verschiedener Zähigkeit zu ermitteln war.

Um diesen Einfluss zu zeigen, führe ich folgende Beobachtungen an Alkohol an, die zum Theil verschiedenen Versuchsreihen angehören. Es bedeutet darin t die Zeit in Secunden, in welcher 100 ccm ausgeflossen sind, a^2 die nach der Formel (4) berechneten Werthe und T die Temperatur, auf welche sich a^2 bezieht. (a^2 ist bezogen auf cm g min.)

Einfluss der Geschwindigkeit der Strömung.

Nr.	t	T	a^2	Nr.	t	T	a^2
1	183,0	15,02	0,0542	5	465,6	13,64	0,0659
2	277,2	13,88	0,0603	6	492,8	13,02	0,0635
3	280,8	14,41	0,0634	7	621	13,96	0,0692
4	364	14,57	0,0631	8	743	12,99	0,0658

Man erkennt ein Anwachsen der Zahlen für a^2 mit abnehmender Ausflussgeschwindigkeit bis zur Beobachtung 5. Von da an hält sich a^2 nahezu constant von $t = 465{,}6$ bis $t = 743$. Die unter Nr. 5 bis 8 stehenden Zahlen geben daher die Temperaturleitungsfähigkeit des Alkohols an. Deutlicher noch als bei diesen Zahlen zeigt sich in der folgenden Tabelle, dass eine zu langsame Strömung wieder Abweichungen in demselben Sinne hervorbringt. Es sind Versuche mit einer etwa fünfprocentigen Lösung von chlorsaurem Kali. Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe.

Nr.	t	T	a^2
1	108	28,61	0,0648
2	282	29,25	0,0785
3	296	24,02	0,0763
4	321	29,93	0,0768
5	878	25,21	0,0753
6	1085	24,18	0,0692

Die Beobachtungen 2 bis 5 zwischen $t = 282$ und $t = 878$ gaben also hier nahezu constante Zahlen.

7. Dass bei sehr langsamer Strömung die berechneten Werthe a^2 meistens abweichend ausfallen, hat seinen Grund einerseits in der zu kleinen Differenz zwischen der Temperatur des Bades und der Endtemperatur, andererseits auch darin, dass es während einer längeren Beobachtungsdauer nicht leicht möglich ist, den stationären Zustand zu erhalten, und dies namentlich dann nicht, wenn die Versuche bei höherer Temperatur angestellt werden. Der Hauptgrund liegt aber in der Unmöglichkeit, dabei die Mitteltemperatur genau zu bestimmen. Die enge Röhre, in welcher die Abkühlung geschieht, mündet nämlich in ein weiteres Rohr von ungefähr 1,5 cm Durchmesser, in welchem das Thermometer so befestigt war, dass sein (enges) Gefäss der Oeffnung der Röhre gerade gegenüber stand. Nun haben aber die einzelnen Flüssigkeitsfäden in der engen Röhre ganz verschiedene Temperaturen, in der Mitte die höchsten, am Rande die niedrigste, und bei den Versuchen in höherer Temperatur be-

trägt diese Differenz oft nahe an 20°. Bei schneller Strömung vermischen sich die Fäden beim Austritt und gleichen ihre Temperatur aus. Bei langsamer Strömung aber bilden sich in dem weiten Rohr ganz deutlich Schichten von verschiedener Temperatur, sodass das Thermometer durchaus nicht die Mitteltemperatur angibt. Ich habe diese kaum zu erwartende Störung dadurch zu vermeiden gesucht, dass ich die Flüssigkeit, sowie sie aus der engen Röhre kam, durch ein umgekehrt *s*-förmig (Z) gebogenes Röhrchen erst nach oben fliessen und dann aus dessen Ende in das Ausflussrohr abtropfen, resp. abgleiten liess. Dadurch erzielte ich bei nicht zu geringer Geschwindigkeit wohl eine vollständige Mischung der Flüssigkeit, was sich daran erkennen liess, dass das Thermometer in jeder Lage innerhalb des Ausflussrohres dieselbe Temperatur zeigte. Bei ganz langsamer Strömung aber war auch hierdurch die Schichtung noch nicht ganz beseitigt, vielmehr herrschten in einem Querschnitt des Ausflussrohres Temperaturdifferenzen bis nahe zu einem ganzen Grad. Derartige Versuche sind natürlich nicht brauchbar. Es müssen also auch die ganz geringen Geschwindigkeiten vermieden werden. Es liesse sich dieser Uebelstand ganz beseitigen, wenn man in die ausfliessende Substanz ein kleines Rührwerk hineinbrächte, etwa durch die Strömung selbst ein leichtes Schaufelrädchen treiben liesse. Indes habe ich mich mit den Versuchen bei nicht zu geringer Geschwindigkeit begnügt, da diese schon in ziemlich weitem Intervall constante Werthe von a^2 geben.

Durch diese Einschränkung des brauchbaren Intervalls der Geschwindigkeiten ist die Methode, die ich in meiner ersten Abhandlung zur experimentellen Bestimmung der Constanten p_1 und p_2 angab, ebenfalls beschränkt. Die Methode beruhte darauf, dass man die Flüssigkeit mit drei möglichst verschiedenen Geschwindigkeiten durch die Röhre strömen liess. Die jetzige Untersuchung zeigt, dass man dadurch nicht genaue Werthe der Constanten p_1, p_2 und a^2 bekommen kann, weil man entweder auf ein für Differenzbestimmungen zu kleines Intervall beschränkt war oder Beobachtungen verwenden musste, für welche das Poiseuille'sche Gesetz nicht mehr gilt. Letzteres war bei meinen

früheren vorläufigen Bestimmungen der Fall, deswegen sind die damaligen absoluten Werthe zu gross, und auch einige hundert Beobachtungen, die ich nach der ersten Publication schon angestellt hatte, liessen sich nicht, oder nur für relative Bestimmungen verwerthen, da sie bei zu grosser Geschwindigkeit der Strömung angestellt wurden.

8. Die Beobachtungen wurden im ganzen in derselben Weise angestellt, wie früher. Statt der Messingröhre bei den früheren Versuchen wendete ich Platinröhren an, die die Wärme besser leiten und dem chemischen Angriff nicht ausgesetzt sind. Sie wurden durch sehr gut gebohrte Kautschukstopfen in das Einfluss- und Ausflussrohr befestigt. Bei den Versuchen mit Schwefelkohlenstoff mussten natürlich Korkstopfen genommen werden. Die Versuche, Platinröhren von mehr als 1 mm äusserer Weite direct in das Glas einzuschmelzen, fielen selbst bei sorgfältiger Kühlung nicht befriedigend aus, da wegen der auf engem Raum herrschenden Temperaturdifferenzen selbst das Emailglas leicht Risse bekam.

Kurz vor Erreichung des stationären Zustandes wurden die Temperaturablesungen an den drei Thermometern begonnen und der Versuch so lange fortgesetzt, bis 100 ccm oder 250 ccm der Flüssigkeit ausgeflossen waren. Gewöhnlich trat am Ende der Versuchsreihen schon wieder eine Abkühlung ein, sodass nur die mittelsten Ablesungen, gewöhnlich 6—10 an der Zahl, beim stationären Zustand gemacht wurden. Diese charakterisiren sich sehr deutlich und wurden dann der Berechnung zu Grunde gelegt.

Ich gebe im Folgenden als Beispiel eine Beobachtungsreihe an einer Chlornatriumlösung. Ungefähr alle 40 Secunden wurde eine Ablesung gemacht. Es bedeutet T_1 die Temperatur der Flüssigkeit vor dem Einströmen in die Röhre, U die Mitteltemperatur beim Ausfluss, T_0 die Temperatur des Bades.

Die Beobachtungen zwischen den doppelten Strichen geben gut charakterisirt den stationären Zustand. (Diese Zahlen sind noch nicht mit den Correcturen der Thermometer versehen.) Die Beobachtungen bei niedriger Tempe-

ratur konnten gewöhnlich ohne jede Heizung des Bades angestellt werden, da das fliessende Wasser der Wasserleitung eine um 7—10° niedrigere Temperatur hatte, als das im Zimmer ruhig stehende Wasser.

T_1	U	T_0	T_1	U	T_0	T_1	U	T_0
32,60	18,30	8,30	32,80	18,32	8,32	32,80	18,25	8,30
32,70	18,30	8,30	32,80	18,32	8,30	32,75	18,20	8,31
32,75	18,30	8,31	32,80	18,35	8,30	32,73	18,20	8,30
			32,80	18,35	8,30	32,70	18,18	8,30
			32,80	18,35	8,31			
			32,80	18,30	8,30			

9. In den folgenden Tabellen sind diejenigen Beobachtungen zusammengestellt, aus welchen sich a^2 berechnen lässt. Die Bedeutung der einzelnen Buchstaben ist folgende. Es ist l die Länge der Platinröhre (derjenige Theil der Röhre, der von fliessendem Wasser umspült war; die ganze Länge ist um 1—1,5 cm grösser). T_1 ist die Temperatur der Flüssigkeit vor Eintritt in die Platinröhre, U die Mitteltemperatur beim Austritt, T_0 die Temperatur des Bades, t die Zeit in Secunden, in welcher 100 cm³ der Flüssigkeit ausgeflossen sind, a^2 die Temperaturleitungsfähigkeit, k die Wärmeleitungsfähigkeit, T die Temperatur, auf welche sich a^2 und k beziehen $\left(T = (T_1 + U)/2\right)$. Jede Zahl T_1, U, T_0 ist das Mittel aus 6—10 nahe bei einander liegenden. Daher die dritte Decimale.

I. Alkohol.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,55	15,566	11,712	7,420	465,6	0,0659	0,0325	13,64
7,49	14,814	11,223	7,260	492,8	0,0635	0,0314	13,02
6,35	16,143	11,784	6,643	621,0	0,0692	0,0343	13,96
7,20	15,689	10,295	6,430	743,0	0,0658	0,0326	12,99
				Mittel:	0,0661	0,0327	13,40

Die Dichte ϱ ist $= 0,8204$ bestimmt, die specifische Wärme $c = 0,602$ angenommen[1]), daraus ist $k = a^2 \varrho c$ berechnet.

1) Schüller, Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 116. 1871.

II. Glycerin.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,71	16,740	9,770	7,720	1682	0,0516	0,0377	13,25
7,71	15,946	10,259	7,819	1020	0,0529	0,0388	13,45
				Mittel:	0,0523	0,0382	13,35

Das specifische Gewicht ϱ wurde zu 1,210 bestimmt, die specifische Wärme $c = 0{,}605$ angenommen.[1]) Das Glycerin war etwas mit Wasser verdünnt, weil es sonst nicht zum regelmässigen Fliessen gebracht werden konnte.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,71	36,183	20,035	7,760	729	0,0593	0,0440	28,11
7,71	37,180	15,224	7,920	1306	0,0614	0,0448	26,18
				Mittel:	0,0603	0,0444	27,14

Es wurde gefunden $\varrho = 1{,}20$. Aus diesen beiden Gruppen ergibt sich:

$$k_t = 0{,}0382\big(1 + 0{,}012\,(t - 13)\big).$$

III. Terpentinöl.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
6,145	15,364	11,280	7,752	943	0,0512	0,0200	13,32
6,15	13,725	10,161	7,521	1106	0,0501	0,0190	11,94
				Mittel:	0,0506	0,0195	12,63

Das specifische Gewicht wurde bestimmt zu $\varrho = 0{,}8692$, die specifische Wärme wurde angenommen zu $c = 0{,}43$ (nach Regnault).

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
6,145	30,785	17,790	7,520	966	0,0568	0,0210	24,28
6,145	29,655	12,697	7,520	1863	0,0561	0,0205	21,18
				Mittel:	0,0565	0,0208	22,73

Es wurde gefunden $\varrho = 0{,}864$.

Aus beiden Gruppen ergibt sich:

$$k_t = 0{,}0195\big(1 + 0{,}0067\,(t - 13)\big).$$

1) Weber, Wied. Ann. **10.** p. 313. 1880.

IV. Aether.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,70	15,031	12,215	8,303	407,5	0,0568	0,0222	13,61
7,70	16,210	11,150	7,680	812	0,0582	0,0232	13,65
				Mittel:	0,0575	0,0227	13,63

ϱ wurde zu 0,729 bestimmt, c zu 0,53 angenommen.

V. Chlornatriumlösung.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,70	16,818	11,490	7,957	672	0,0708	0,0666	14,15
7,70	17,089	10,123	7,253	921	0,0726	0,0682	13,60
				Mittel:	0,0717	0,0674	13,87

Die Dichte ist $\varrho = 1,153$, die specifische Wärme nach Thomsen $c = 0,82$.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,70	32,516	17,861	8,020	629	0,0766	0,0720	25,19
7,70	35,146	16,215	7,505	882	0,0759	0,0713	25,63
				Mittel:	0,0763	0,0717	25,41

Es ist $\varrho = 1,1506$.

Aus beiden Gruppen zusammen ergibt sich:

$$k_t = 0,0671\,(1 + 0,0057\,(t - 13)).$$

VI. $KClO_3$-Lösung.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,40	14,260	11,600	7,720	336,7	0,0685	0,0688	12,93
7,40	18,583	12,141	7,720	712	0,0705	0,0708	15,36
				Mittel:	0,0695	0,0698	14,14

Die Dichte wurde bestimmt zu $\varrho = 1,026$, die specifische Wärme angenommen $c = 0,98$.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
7,65	28,157	19,890	7,920	296	0,0763	0,0765	24,02
7,55	35,751	14,660	7,686	878	0,0753	0,0755	25,21
7,40	34,602	23,892	8,062	282	0,0785	0,0787	29,25
7,40	35,859	24,014	7,900	321	0,0768	0,0770	29,93
				Mittel:	0,0767	0,0769	27,10

Die Dichte ist $\varrho = 1,024$.

Aus beiden Gruppen zusammen ergibt sich:

$$k_t = 0{,}0692\big(1 + 0{,}0078\,(t - 13)\big).$$

VII. Schwefelkohlenstoff.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
6,08	12,977	10,689	7,719	623	0,0512	0,0155	11,83
7,40	18,043	11,532	7,422	972	0,0545	0,0164	14,79
				Mittel:	0,0529	0,0160	13,31

Es wurde bestimmt $\varrho = 1{,}2728$, und angenommen $c = 0{,}237$ (nach Regnault).

VIII. Petroleum.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
6,74	13,497	10,250	5,760	506	0,0525	0,0209	11,87
7,15	16,270	10,628	6,120	820	0,0543	0,0216	13,45
				Mittel:	0,0534	0,0213	12,66

Die Dichte wurde bestimmt zu $\varrho = 0{,}7899$, die specifische Wärme $c = 0{,}5$ angenommen.

l	T_1	U	T_0	t	a^2	k	T
6,74	26,850	17,920	6,195	485	0,0584	0,0232	22,39
7,15	29,710	16,434	6,230	758	0,0608	0,0242	23,07
				Mittel:	0,0596	0,0237	22,73

Es war $\varrho = 0{,}784$.

Aus beiden Gruppen zusammen ergibt sich:

$$k_t = 0{,}0212\big(1 + 0{,}011\,(t - 13)\big).$$

10. Die vorstehenden Beobachtungsreihen von acht ganz verschiedenartigen Flüssigkeiten geben die Bestätigung der Behauptung, dass die Temperaturleitungsfähigkeit nur sehr wenig variirt, sie schwankt bei Flüssigkeiten, die so verschieden sind, wie Glycerin, Schwefelkohlenstoff, Aether, Natriumchloridlösung nur zwischen 0,0717 und 0,0523, ist also insbesondere von der Zähigkeit der Flüssigkeiten fast vollständig unabhängig. Dieses Resultat, sowie überhaupt der Verlauf meiner Zahlen mit einer Ausnahme sind, soweit sie sich auf dieselben Flüssigkeiten beziehen, in gutem Einklang mit den von H. F. Weber gefundenen Resultaten.

Um diese Uebereinstimmung zu zeigen, stelle ich die erhaltenen Werthe für die Wärmeleitungsfähigkeit zusammen mit den Zahlen von Winkelmann, Beetz und Weber, und zwar alle bezogen auf Chlornatriumlösung gleich 100. Dabei habe ich bei den Zahlen von Winkelmann nur die mit Apparat I erhaltenen genommen, weil der Einwand von Weber gegen die Berechnung Winkelmann's stichhaltig ist.[1])

	Winkelmann	Beetz	Weber	Graetz
NaCl-Lösung . . .	100	100	100	100
Glycerin	61	79	58	57
Aether	—	107	35	34
Alkohol	45	83	43	48
Schwefelkohlenstoff .	54	119	37	24

Beim Schwefelkohlenstoff findet sich also eine erhebliche Differenz zwischen Weber und mir. Die grosse Diathermansie des Schwefelkohlenstoffs[2]) ist ein Grund, der dieser Richtung wirkt. Bei den Weber'schen Versuchen muss bei diathermanen Körpern von der oberen zur unteren Kupferplatte eine gewisse Wärmemenge durch Strahlung übergeführt werden. Diese Wärmemenge hätte von der beobachteten abgezogen werden müssen, um die durch Leitung übergeführte zu ergeben. Daraus ergibt sich, dass bei diathermanen Körpern die Weber'schen Zahlen zu gross sind. Bei meiner Methode findet keine Strahlung zwischen den Wänden statt, weil die Wand der Röhre ringsum auf derselben Temperatur gehalten wird. Indess ist die Diathermansie nicht ausreichend, um die Abweichung zu erklären. Berechnet man nämlich aus den Weber'schen Versuchen (da für Schwefelkohlenstoff die ausführlichen Zahlen nicht angegeben sind, so nehme ich die Zahlen für das ihm in Bezug auf Wärmeleitung nahestehende Benzin) einerseits die ganze Wärmemenge, welche von der oberen Kupferplatte in der Zeit von $7^h 5'$ bis $7^h 6'$ abgegeben ist $\left(Q_1 = F\varDelta_1 \varrho_1 c_1 (u_1 - u_2)\right)$

1) Dass Weber's Einwände gegen Beetz's Berechnung ausreichend sind, um dessen abweichende Resultate zu erklären, scheint mir aus mehreren Gründen nicht wahrscheinlich.

2) Tyndall, Phil. Mag. (4) 28. p. 81. 1864.

und andererseits die Wärmemenge, welche durch reine Strahlung in 1 Minute von der oberen zur unteren Kupferplatte übergehen würde, nach dem Stefan'schen Gesetz $\left(Q = F\sigma_1(T_{12}^4 - T_0^4)t\right)$, wobei $\sigma_1 = 0{,}12 . 1{,}085 . 10^{-12}$ (bezogen auf Secunden) ist[1]), so findet man $Q_1 = 190$, $Q = 3$, sodass also die Strahlung doch nur kaum 2 Proc. zur gesammten abgegebenen Wärme beiträgt. Dadurch würde der Werth von k bei Weber sinken auf $k = 0{,}0245$ und der relative Werth der Leitungsfähigkeit auf 0,37. Die erhebliche Differenz gegen die von mir gefundene Zahl 0,24 ist also dadurch nicht ausgeglichen.

Sind also bis auf eine Ausnahme die relativen Werthe in guter Uebereinstimmung, so weichen auch die absoluten Werthe wenig von den von Weber direct angegebenen ab. Es ist die Wärmeleitungsfähigkeit von:

	nach Weber	nach Graetz
NaCl-Lösung	0,0692	0,0671
Glycerin	0,0402	0,0382
Aether	0,0243	0,0227
Alkohol	0,0292	0,0327
Schwefelkohlenstoff .	0,0250	0,0160

Indess sind nach den exacten Berechnungen von Lorberg[2]) die Zahlen von Weber zu vergrössern, und zwar bei Wasser (ähnlich auch bei NaCl-Lösung) um 10 Proc. Wie gross die Correction bei den anderen Flüssigkeiten sein muss, gibt Lorberg nicht an. Die von mir bestimmten absoluten Werthe sind also jedenfalls kleiner, als die Weber'schen, abgesehen davon, dass sie sich auf eine um 10 Grad höhere Temperatur beziehen. Mit abnehmender Geschwindigkeit des Strömens werden die Zahlen bei meiner Methode grösser, bis das Poiseuille'sche Gesetz gültig ist. Die angeführten Beobachtungen zeigen, dass bei recht erheblichen Geschwindigkeitsdifferenzen die Zahlen nahezu constant sind, sodass darin die kleineren Zahlen meiner Beobachtungen jedenfalls nicht begründet

1) Graetz, Wied. Ann. **11.** p. 913. 1880.
2) Lorberg, Wied. Ann. **14.** p. 291. 1881.

sind. Es wäre zu wünschen, dass Weber seine Beobachtungen vor allen Dingen mit einer anderen Dicke der Flüssigkeitsschicht wiederholen liesse, da man dadurch den Einfluss der Strahlung erst genau erkennen könnte. Ein Bedenken, das aber jedenfalls gegen die Weber'schen Zahlen zu erheben ist, betrifft die Anwendung der äusseren Wärmeleitungsfähigkeit, einer Grösse, die erstens nicht constant ist, sondern von der Beschaffenheit der Luft in dem abgegrenzten Raume abhängt, und deren Bestimmung durch Weber mir ausserdem seinen Versuchen nicht zu entsprechen scheint, selbst wenn man von den Unregelmässigkeiten der strömenden Luft absieht. Weber hängt nämlich seine Platte in der auf 0° abgekühlten Hülle auf und beobachtet die Abkühlung. Dabei findet aber ein Unterschied zwischen der oberen Seite der Platte und der unteren statt. Auf der oberen Hälfte müssen starke Luftströmungen entstehen, während in der unteren Hälfte primär die Abkühlung durch Strahlung und Wärmeleitung durch die Luft vor sich geht. Der erhaltene Werth von h muss also zu klein sein, da bei den späteren Versuchen die Platte sich nur nach oben in der Luft abkühlt, also stets Strömungen auftraten. Das wirklich für die Beobachtungen zu benutzende h ist also grösser, als das angegebene, folglich auch q_1^2 in der Weber'schen Formel[1]), und daher muss k kleiner werden, als er es gefunden hat. Diese Correctur dürfte vielleicht ausreichen, die Unterschiede zwischen seinen und meinen Zahlen zu beseitigen.

11. Was die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur betrifft, so ergibt sich bei den darauf hin untersuchten Flüssigkeiten eine Zunahme, und zwar ist der Temperaturcoëfficient in der Nähe von 13° für:

Glycerin . .	0,012	$KClO_3$-Lösung	0,008
Terpentinöl .	0,007	Petroleum . .	0,011
ClNa-Lösung .	0,006		

Diesen Zahlen lege ich keine weitere Bedeutung bei, als dass sie positiv sind und eine Zunahme der Leitungsfähigkeit zwischen $^1/_2$ und 1 Proc. pro Grad ergeben. Es ist

1) Weber l. c. p. 127.

in dem Intervall von 13 bis 30° nicht möglich, ausser durch sehr grosse Häufung von Beobachtungen sichere Zahlen für die Temperaturzunahme zu gewinnen. Bei Flüssigkeiten zeigen sich noch mehr wie bei Gasen zuweilen unvermeidbare Schwankungen, die sich nur durch Mittelwerthe aus grossen Reihen von Beobachtungen eliminiren liessen. Mit Wasser habe ich überhaupt keine gut übereinstimmenden Beobachtungen erzielen können. Zum Schluss stelle ich für die untersuchten Flüssigkeiten die gefundenen Zahlen von k und a^2 zusammen, wobei die Ordnung der Flüssigkeiten die der k ist. Die Zahlen beziehen sich auf die Temperatur 13° und haben als Einheiten Centimeter, Gramm, Minute.

	k	a^2
$KClO_3$-Lösung	0,0695	0,0692
NaCl-Lösung	0,0671	0,0714
Glycerin	0,0382	0,0523
Alkohol	0,0327	0,0661
Aether	0,0227	0,0575
Petroleum	0,0213	0,0534
Terpentinöl	0,0195	0,0506
Schwefelkohlenstoff . . .	0,0160	0,0529

Die Untersuchungen werden von anderer Seite im hiesigen Laboratorium fortgesetzt.

München, März 1885.

II. *Die Genauigkeit der Wägungsmethode für die Bestimmung der relativen Dampfspannung und die Anwendung derselben zum Vergleiche von chemischer Affinität und mechanischer Adhäsion; von W. Müller-Erzbach.*

Aus der Gewichtsabnahme wasserhaltiger Verbindungen im Vergleiche zu der des unverbundenen Wassers konnte ich die relativen Verdampfungsgeschwindigkeiten und daraus die Dampfspannungen mit unter einander gut übereinstim-

menden Resultaten bestimmen.[1]) Die in einer verschlossenen Flasche gegebene Verdampfungsatmosphäre wird durch Schwefelsäure trocken gehalten, und es erschien zur grösseren Genauigkeit erforderlich, den mittleren Gegendruck des während des Vorganges noch unabsorbirt in dem Versuchsgefässe vorhandenen Wasserdampfes zu ermitteln. Nach früheren Beobachtungen war derselbe zwar gering und auf die vorher erwähnten Vergleiche der Dampfspannungen ohne merklichen Einfluss, aber er durfte natürlich von vornherein nicht vernachlässigt werden. Um nun die entsprechende Correctur auszuführen, habe ich die von Regnault[2]) über die Dampfspannungen der verschieden concentrirten Schwefelsäuren angegebenen Zahlen benutzt. Ich ermittelte die Gewichtsverluste von destillirtem Wasser und verdünnter Schwefelsäure in offenen und gleich grossen Glasröhren, welche in der durch concentrirte Schwefelsäure trocken gehaltenen Luft aufgestellt waren. Die so gefundene relative Spannung der verdünnten Schwefelsäure sei r, die von Regnault für dieselbe Temperatur beobachtete absolute Spannung der Schwefelsäure s_1 und des Wassers s, der Gegendruck des in der Versuchsflasche nicht absorbirten Wasserdampfes x, so ergibt sich die Gleichung $(s_1 - x)/(s - x) = r$, aus welcher dann für das benutzte Gefäss und die angewandte Temperatur der mittlere Gegendruck berechnet werden kann. Die nach dieser Rechnung erhaltenen Werthe für x zeigten sich von der Höhe der benutzten Flaschen nur wenig abhängig, aber sie nahmen bedeutend zu, wenn durch häufigeres Oeffnen des Versuchsgefässes die Feuchtigkeit der äusseren Luft öfter eindringen konnte. Bei sechstägigem Verschluss und einer mittleren Temperatur von 6° C. berechnete sich der Gegendruck in einer Flasche von 7 cm Durchmesser auf weniger als $^1/_4$ mm, während er bei täglichem Oeffnen und einer Temperatur von 20° über 1 mm ausmachte. Nachstehend sind nun zunächst die nach beiden Methoden erhaltenen Beobachtungswerthe ohne Berechnung des Gegendruckes zusammengestellt. Die Concentration der von mir benutzten Schwefelsäure wurde am Anfange des

1) W. Müller-Erzbach, Wied. Ann. **23.** p. 607. 1884.

2) Regnault Ann. de chim. et de phys. (3) **15.** p. 129. 1845.

Versuches nach dem specifischen Gewichte und zur Controle am Schluss durch chemische Analyse bestimmt, sodass sie als zuverlässig ermittelt angesehen werden darf.

Mittlerer Gehalt von H_2SO_4 in Procenten	Versuchsdauer	Mittlere Temperatur (annähernd)	Relative Dampfspannung nach der Gewichtsabnahme	Dieselbe nach Regnault
19,9	4 Tage	$19^1/_2$° C.	0,89	—
21,4	6 „	$16^1/_4$	0,87	—
25,4	7 „	$15^1/_2$	0,82	0,83
28,1	6 „	$13^2/_3$	0,76	0,79
31,1	4 „	$12^1/_4$	0,70	0,735
35,2	5 „	15	0,66	0,67
39,1	4 „	$15^1/_2$	0,59	0,59
43,4	6 „	$14^1/_2$	0,49	0,48
48,36	6 „	$14^1/_2$	0,39	0,40
53,6	$6^1/_4$ „	$14^1/_4$	0,28	0,30
57,8	$5^3/_4$ „	$13^2/_3$	0,195	0,21
61,7	7 „	$13^2/_3$	0,15	0,16
64,1	8 „	$13^1/_4$	0,09 (0,12)	0,135
66,3	5 „	$13^1/_2$	0,08 (0,11)	0,11
68,2	8 „	10	0,057 (0,098)	0,09
70,0	7 „	6	0,045 (0,09)	0,075

Die von mir gefundenen Zahlen sind allgemein etwas kleiner, als die Angaben von Regnault, und das erkläre ich mir durch die Wirkung des Gegendruckes der restirenden Feuchtigkeit, weil dadurch der kleinere Zähler des Bruches für die relative Spannung verhältnissmässig stärker verringert wird als der Nenner. Trotzdem ist die Uebereinstimmung beider Versuchsreihen für die Schwefelsäure bis zu einem Gehalt von 62 Proc. eine ganz befriedigende. Erst bei stärkerer Concentration wird durch die Abnahme der Dampfspannung jener Fehler für eine genaue Bestimmung zu beträchtlich. Nimmt man den nach Regnault's Angabe für den Versuch mit der 66procentigen Schwefelsäure gefundenen Gegendruck von 0,4 mm für die vier letzten Versuche allgemein an, so erhält man die eingeklammerten Werthe 0,12 — 0,11 — 0,098 und 0,09, welche von den entsprechenden Messungen Regnault's schon nicht stärker abweichen, als die einzelnen Beobachtungen desselben unter einander. Doch lässt die Wägungsmethode wahrscheinlich noch eine grössere Genauigkeit zu, wenn man durch Vergrösserung der Oberfläche von der absorbirenden Schwefelsäure den Gegendruck

vermindert, seine mit sinkender Temperatur vermuthlich stattfindende Abnahme bestimmt und mit berücksichtigt. Da von der Schwefelsäure weniger verdunstet als vom Wasser, so muss die Entfernung von der Oberfläche der Flüssigkeiten bis zum offenem Ende der Röhre bei jeder Wägung neu gemessen und in Rechnung gebracht werden, wenn die Röhren am geschlossenen Ende nicht stark erweitert sind. Auch ist es für genaue Versuche sogar bei ganz gleich erscheinenden Röhren unerlässlich, den Wasserverlust durch die Verdunstung wenigstens eine Woche lang zu vergleichen, da bei Unterlassung dieser Vorsichtsmaassregel ziemlich bedeutende Abweichungen entstehen können, selbst wenn die beiden Messröhren unmittelbar hinter einander aus demselben Stück genommen sind. Das Ausmessen der Röhren mit Quecksilber allein bietet, besonders wegen der Abweichungen im Querschnitt an der geschlossenen Seite, durchaus nicht genügende Sicherheit.

Gewöhnlich habe ich, um den Druck des abströmenden Dampfes gleichmässig zu erhalten, am geschlossenen Ende kugelförmig aufgeblasene Versuchsröhren benutzt. Sind diese Erweiterungen von grösserem Querschnitt, so können die Veränderungen im Abstande der verdunstenden Flüssigkeit von dem offenen Ende der Röhren ganz unberücksichtigt bleiben, weil dann allein die Länge der engeren eigentlichen Röhre entscheidet. So hatte ich, um die Verminderung der Dampfspannung durch aufgelöstes Kochsalz zu bestimmen, 2 Röhren von 8,9 mmDurchmesser und 98 mm Länge hinter der Erweiterung. Die kugelförmige Erweiterung in der einen war bei einem Durchmesser von 19 mm fast doppelt so gross als in der anderen mit 15 mm Durchmesser, aber trotzdem verloren beide in 26 Tagen fast gleiche Wassermengen, die erste $389^1/_2$ mg, die zweite $386^1/_2$ mg, sodass in diesem Falle nur eine geringe Correctur wegen ungleicher Verdunstung erforderlich wurde. Meine so wesentlich vereinfachte und recht bequeme Methode war von dem Fehler, der die barometrischen Vergleichungen von Salzlösung und Wasser störenden ungleichen Luftabsorption frei, und es erschien mir deshalb von Interesse, nach derselben die von Hrn. Wüll-

ner[1]) angegebene Formel für die Verminderung der Dampfspannung einer neuen Prüfung zu unterwerfen. Das Resultat dieser Prüfung ergibt sich aus der nachstehenden Tabelle, in welcher die mittlere Temperatur nach der Verdunstung des reinen Wassers bestimmt ist.

Mittlerer Gehalt von NaCl auf 100 Wasser	Mittlere Temperatur	Gewichtsverlust des Wassers	Gewichtsverlust der Kochsalzlösung	Beobachtete Verminderung der Dampfspannung	Nach Wüllner's Formel berechnet	Nach Wüllner's Beobacht. bei 19,9° für d. vorstehenden Temp. ber.
7,86	$11^1/_5$°	102 mg	97 mg	0,49 mm	0,47 mm	0,73
8,55	$13^1/_2$	195 „	187 „	0,46 „	0,57 „	0,89
9,51	12	116,5 „	111 „	0,49 „	0,59 „	0,86
10,07	$8^4/_5$	72 „	69,5 „	0,33 „	0,51 „	0,72
10,53	6	98 „	90,5 „	0,53 „	0,44 „	0,54
11,89	$12^1/_5$	179 „	165 „	0,82 „	0,75 „	1,02
13,42	$12^1/_2$	106 „	96,5 „	0,97 „	0,87 „	1,17
15,10	$13^3/_5$	146,5 „	131,5 „	1,20 „	1,05 „	1,51
17,55	$13^4/_5$	131 „	116 „	1,35 „	1,24 „	1,91
20,89	$14^1/_4$	452,5 „	131 „	1,70 „	1,51 „	2,22
25,28	$13^8/_9$	115 „	96 „	1,95 „	1,78 „	2,37 (bis 2,58)
31,78	$13^1/_5$	190 „	144 „	2,73 „	2,17 „	2,86
36 gesätt.	$13^7/_8$	181 „	134 „	3,05 „	2,53 „	3,28

Aus dieser Vergleichung ergibt sich mit aller Bestimmtheit, dass die für die Spannungsverminderung durch Chlornatrium von Hrn. Wüllner für die Spannkraft T und 1 Proc. Salz abgeleitete Formel $V = 0{,}006\,T$ bei niederen Temperaturen mit meinen Beobachtungen besser übereinstimmt als mit denjenigen der barometrischen Methode. Die aus Wüllner's Beobachtungen berechneten Abweichungen sind sämmtlich positiv und in keinem einzigen Falle geringer als bei den von mir gefundenen Zahlen, die bald über, bald unter dem Formelwerth stehen. Die Formel erscheint aber noch den Beobachtungen in höherer Temperatur durchaus berechtigt, und man wird deshalb darauf hingewiesen, dass für derartige geringere Spannungsdifferenzen bei gewöhnlicher Lufttemperatur die Wägungsmethode gegenüber der barometrischen nicht nur bequemer ist, sondern auch genauer und zuverlässiger. Für die Messung ganz geringer Spannungen ist sie ausserdem die einzige überhaupt mögliche.

1) Wüllner, Pogg. Ann. **103**. p. 529. 1858.

Dass die Dampfspannung des gebundenen Wassers, welche für die chemische Verwandtschaft desselben einen brauchbaren Maassstab[1]) abgibt, trotzdem nicht direct die Energie der Anziehung nach Quecksilberhöhen bestimmen lässt, folgt schon daraus, dass der die Verdampfung aufhebende Druck des in der Atmosphäre vorhandenen Wassers nicht durch den Druck eines anderen Gases ersetzt werden kann, sondern er muss gerade vom Wasserdampf ausgeübt werden. Daher kann man natürlich auch eine Quecksilbersäule nicht an seine Stelle setzen. Indirect hat Hr. van't Hoff[2]) in einer interessanten Weise die Ermittelung des der chemischen Anziehung äquivalenten mechanischen Druckes dadurch versucht, dass er die Verminderung der Spannkraft des Wassers in einer Lösung mit dem endosmotischen Druck des durch eine poröse Wand in die Lösung eindringenden Wassers vergleicht. Allerdings geht er dabei von der nicht unbedenklichen Annahme aus, dass bei den zu Grunde liegenden Versuchen von Hrn. Pfeffer[3]) die besonders hergestellte poröse Scheidewand als ein durch seine chemische Beschaffenheit den Vorgang gar nicht beeinflussendes Sieb angesehen werden könnte, und deshalb ist die Vergleichung nicht einwurfsfrei. Die abgeleitete Gleichung heisst $D = 10{,}5\, T \log Se/Sz$, wobei D den gesuchten Druck in Atmosphären bedeutet, Se den Dampfdruck des reinen Wasser, Sz den der Salzlösung und T die vom absoluten Nullpunkt an gezählte Temperatur. Für eine einprocentige Zuckerlösung erhält Hr. van't Hoff nach der von ihm aus der Gefrierpunktserniedrigung gefolgerten Dampfspannung dieser Lösung für verschiedene Temperaturen nach seiner Formel Zahlenwerthe, welche mit Pfeffer's Beobachtungen hinreichend übereinstimmen, benutzt man jedoch in der Formel die von Hrn. Wüllner an der Zuckerlösung direct beobachtete Dampfspannung, so werden die Resultate um $^1/_3$ höher. Freilich gehen auch die letztgenannten Abweichungen nicht wesentlich über die

1) Müller-Erzbach, Wied. Ann. **23.** p. 612. 1884.
2) Van't Hoff, Études de dynamique chimique, p. 181. 1884.
3) Pfeffer, Osmotische Untersuchungen, Leipzig, p. 85. 1877.

Grenze der Versuchsfehler hinaus, aber es ist doch unter solchen Umständen nicht zu übersehen, dass nach der gegenwärtigen Kenntniss jener Constanten eine genauere experimentelle Prüfung der Formel unmöglich ist. Obgleich hiernach der der Dampfspannung entsprechende mechanische Werth der chemischen Verwandtschaft mit Bestimmtheit noch nicht anzugeben ist, so konnte dagegen die relative Grösse der Verwandtschaften bei allen durch Dissociation zersetzbaren Wasserverbindungen aus den Spannungsunterschieden mit Sicherheit abgeleitet werden, weil die Resultate durch die vorliegenden Erfahrungen sowohl bei der Zerlegung der Salze als auch bei ihrer Bildung bestätigt wurden.

In ähnlicher Weise lassen sich die Dampfspannungen benutzen, um die Stärke der Adhäsion bei der Absorption von Wasserdampf zu messen, und es wird dadurch möglich, die Kraft der Absorption mit der der Affinität in eigentlichen chemischen Verbindungen direct zu vergleichen. Das Resultat dieser Vergleichung veranschaulicht einerseits das vielfach analoge Verhalten beider Kräfte, und andererseits bestätigt es durch bestimmte Angaben die aus früheren Versuchen abgeleiteten Folgerungen über die starke Anziehung, welche feste Körper auf die sie berührenden Gasschichten ausüben. Meine bisherigen Versuche beschränkten sich zwar hauptsächlich auf die Absorption von Wasserdampf unterhalb seines Siedepunktes, aber die Aufnahme desselben erfolgt genau unter den bekannten Erscheinungen der Absorption, anfangs viel lebhafter, wird sie in baldiger Abnahme von einer gewissen Grenze an fast unmerklich, und deshalb liegt kein Grund vor, diese Adhäsion des Wasserdampfes von der Absorption der für gewöhnlich gasförmigen Stoffe zu unterscheiden. Schwefelkohlenstoff wird unter analogen Erscheinungen unterhalb seines Siedepunktes absorbirt, die Aufnahme seines Dampfes erfolgte nach den bis jetzt angestellten Beobachtungen nur wesentlich schneller und in grösseren Mengen. Auch Aetherdampf verhält sich ähnlich, und alle diese Dämpfe gewähren für das Studium der Absorption den grossen Vortheil, dass die Einzelheiten des Vorganges an den Gewichtsveränderun-

gen leicht verfolgt werden können. Wie bei der Bildung und Zerlegung der wasserhaltigen Salze habe ich die Grösse der Absorptionskraft auf zweierlei Weise bestimmt, erstens aus der Geschwindigkeit der Wasseraufnahme in einem mit Wasserdampf nahezu gesättigten Raume, und zweitens aus der Geschwindigkeit der Verdunstung des aufgenommenen Wassers in einer durch concentrirte Schwefelsäure trocken gehaltener Atmosphäre. Bei dieser Verdunstung erwies sich die Dampfspannung nicht constant wie bei der Zersetzung der Salze innerhalb bestimmter Grenzen der Zusammensetzung, sondern sie nahm stetig ab, aber dennoch liessen sich für die nacheinander abgegebenen Wassermengen mittlere Spannungen ermitteln, die denjenigen gewisser wasserhaltigen Molecülverbindungen gleich gesetzt werden konnten. Werden aber die auf der einen Seite durch Absorption und auf der anderen durch chemische Verwandtschaft gebildeten wasserhaltigen Stoffe unter gleicher Spannung des verdunstenden Wassers zerlegt, so ist die Annahme begründet, dass die Anziehungskräfte in beiden Fällen sich ebenfalls gleich sind. Die Absorption, welche auf der Anziehung heterogener Stoffe beruht, und welche ich als eine Vorstufe der chemischen Verbindung bezeichnen möchte, lässt sich demnach auch mit der Affinität durch dasselbe Maass messen, und es ist unbedenklich, dieses zunächst der Dampfspannung entnommene Maass durch eine bekannte chemische Verwandtschaft zu ersetzen. Nur muss man, um möglichst zahlreiche Fälle vergleichen zu können, eine Verbindung wählen, die zahlreiche Abstufungen der Verwandtschaft unterscheiden lässt, z. B. die Verbindung von Schwefelsäure mit Wasser. Wenn die relative Spannung einer Schwefelsäure von angegebenem Procentgehalt mit der Spannung eines absorbirten Dampfes oder eines durch Dissociation sich zersetzenden Salzes übereinstimmt, so sind die mit solcher Spannung verdunstenden Wassermengen als durch gleich grosse Anziehungskräfte gebunden anzusehen. Die neun letzten Molecüle Wasser der krystallisirten Soda z. B. verdampfen nach meinen Versuchen mit der relativen Spannung 0,67, welche nach Regnault's Messungen auch der 35,4procentigen Schwefelsäure eigen-

thümlich ist. Daher sehe ich die chemische Affinität jener 9 Molecüle Krystallwasser und der aus der 35,4 procentigen Schwefelsäure zuerst verdampfenden Wassermenge als gleich gross an. In derselben Weise findet man dann die Verwandtschaft des kohlensauren Natrons mit dem ersten Wassermolecül fast gleich mit der der 85 procentigen Schwefelsäure.

Da der Wasserdampf von einigen Oxyden sehr lebhaft und in beträchtlicher Menge angezogen wird, so möchte ich nach meinen Versuchen vorschlagen, die besonders hygroskopischen Pulver, wie namentlich Thonerde, nur nach dem Erhitzen in einer Glasröhre zu wägen, da sie in einem offenen Tiegel kaum vor der Aufnahme erheblicher Wassermengen geschützt werden können. Ob die einzelnen Metalloxyde den Wasserdampf stärker oder schwächer anziehen, suchte ich zunächst mit Proben, wie ich sie käuflich haben konnte, durch Vorversuche festzustellen, machte sich dabei ein stärkeres Absorptionsvermögen bemerklich, so führte ich dann die weiteren Versuche mit möglichst rein dargestellten Präparaten aus.

0,389 g von schwach ausgeglühtem Kupferoxyd nahmen in einer 65 mm langen Glasröhre von 7 mm Durchmesser in 24 Stunden aus ganz feucht gehaltener Luft 3 mg Wasserdampf auf, am folgenden Tage $1^1/_2$ mg und dann in 3 Tagen noch $^1/_2$ mg, im ganzen 5 mg. Im Vergleiche mit anderen Oxyden war es weniger, als ich erwartet hatte, und bei einer anderen Darstellungsmethode ist das Kupferoxyd auch vielleicht hygroskopischer. In die durch concentrirte Schwefelsäure ausgetrocknete Flasche gebracht, verlor die Röhre in den drei ersten Stunden 2 mg mit einer Spannung, die von der des freien Wassers nicht merklich abwich, in den folgenden 3 Stunden gab sie unter etwas geringerer Spannung $1^1/_2$ mg ab, aber von den letzten $1^1/_2$ mg verdunstete selbst in 4 Tagen keine irgend erkennbare Menge, während sie beim schwachen Glühen leicht verdampften. Der letzte Rest des Wassers ist demnach fester gebunden als das Wasser in 80 procentiger Schwefelsäure oder als das zweite Molecül Wasser in der Verbindung $CaCl_2 + 2H_2O$.

1,250 g Bleiglätte nahmen in 2 Tagen nur $2^1/_2$ mg Wasser auf, von denen sich $1^1/_2$ mg fester gebunden erwiesen.

0,260 g Zinkoxyd wurden in dem analogen Versuche selbst bei längerer Berührung mit ganz feuchter Luft nur $2^1/_2$ mg schwerer, dagegen zeigten sich Eisenoxyd und besonders Thonerde viel hygroskopischer, und sie wurden deshalb einer genaueren Untersuchung unterworfen. Das käuflich erhaltene Aluminiumoxyd fand ich nach schwachem Erhitzen viel hygroskopischer als nach vollem Rothglühen, aber dieser Unterschied war fast unmerklich, als ich das möglichst rein dargestellte Oxyd verwandte. Ich hatte dazu das durch kohlensaures Natron gefällte Hydrat sorgfältig ausgewaschen durch Salzsäure gelöst, nach dem Fällen mit Ammoniak wieder gut ausgewaschen und erhitzt. Trotzdem es dabei hell rothglühend geworden war, blieb seine Absorptionskraft, nach der Lebhaftigkeit der Aufnahme von Wasserdampf zu schliessen, fast ebenso gross wie die eines anderen, das bei einer nicht über 400° C. hinausgehenden Temperatur dargestellt war. Auch hat ja H. Rose[1]) bereits angegeben, dass die Schwierigkeit, die Thonerde genau zu wägen, erst durch das Glühen im Porzellanofen beseitigt werden könnte. Vielleicht ist bei dem nicht vollständig ausgewaschenen Aluminiumoxyd das an der Oberfläche haftende kohlensaure Natron oder ein anderes in der Glühhitze schmelzendes Salz die Ursache, dass das von demselben dadurch überzogene Pulver seine Anziehung zum Wasserdampf verloren hat. Die meisten Versuche machte ich mit dem Oxyde, welches eine Stunde lang bei ungefähr 400° erhitzt war, aber doch noch $15^1/_2$ Proc. Wasser enthielt, welche es beim Erhitzen bis zur vollen Rothgluth verlor. Wurde es mit nachher absorbirtem Wasser nur auf 300° erwärmt, so war dieses Wasser in kurzer Zeit verschwunden, während, wie bemerkt, das chemisch gebundene zurückblieb. Die Absorptionsgeschwindigkeit konnte nach den für gleiche Zeitabschnitte bestimmten Gewichtszunahmen an gleichmässig feuchter Luft ermittelt werden. Sie nahm im allgemeinen mit zunehmender Dicke der Absorptionsschicht ab, doch war sie ausserdem wie die

1) H. Rose, Pogg. Ann. 74. p. 430. 1848.

Dichte des in der feuchten Luft vorhandenen Wasserdampfes von der Temperatur innerhalb ziemlich enger Grenzen stark abhängig. Das Absorptionsvermögen scheint in diesen Grenzen der gewöhnlichen Luftwärme mit steigender Temperatur weniger abzunehmen, als die Dampfdichte zunimmt, wenigstens wurde wiederholt bei höherer Temperatur eine relativ grössere Gewichtszunahme beobachtet. Damit nicht durch Temperaturdifferenzen an der Innenwand der Glasröhre oder an der Thonerde selbst Wasserdampf verdichtet würde, war die Versuchsflasche oben blos mit dickem Papier zugebunden, sodass die Luft nur bis ungefähr zu 97 Proc. mit Feuchtigkeit gesättigt war. Diese Vorsichtsmaassregel war vollständig ausreichend, um für die Wasseraufnahme einen bestimmten Abschluss herbeizuführen. Die Gewichtszunahme betrug nun beispielsweise bei 280 mg Thonerde am ersten Tage $7\frac{1}{2}$ mg, am zweiten $6\frac{1}{2}$ mg, nach 2 Wochen noch täglich 3 mg, nach 4 Wochen 2 mg, nach 5 Wochen 1 mg, nach 54 Tagen $\frac{1}{2}$ mg und nach 59 Tagen war im Laufe von 5 Tagen nichts mehr aufgenommen. Im ganzen hatte die wasserhaltige Thonerde $44\frac{1}{3}$ Proc. ihres Gewichts an Wasser gebunden, durch stärkeres Glühen mehr entwässert 48,9 Proc., ganz wasserfreies und $\frac{1}{2}$ Stunde rothglühend erhaltenes Aluminiumoxyd aber 47,3 Proc., während in den vorhergehenden Versuchen auf 100 Theile des wasserfrei gerechneten Oxyds über 52 und über 53 Gewichtstheile Wasser absorbirt waren. Man könnte diesen grösseren Procentsatz dem Umstande zuschreiben, dass die absorbirenden Oxyde weniger stark erhitzt waren, aber ich bin der Meinung, dass man nicht so ohne weiteres vergleichen darf, sondern dass es näher liegt, im ersten Falle nicht das Aluminiumoxyd allein, sondern sein Hydrat als absorbirenden Körper anzusehen. Vielleicht wird ein Theil des zuerst absorbirten Wassers bei längerer Berührung fester gebunden[1]) und dringt in die oberste Schicht der Thonerde hinein, sodass dadurch nachher eine neue schwächere Absorption möglich ist. Bei einer solchen Annahme liesse sich die auffallend lange Dauer des Absorptionsvorganges erklären, doch hätte man nach dem analogen

1) Neesen, Verhandl. d. phys. Ges. in Berlin. 1885. p. 32.

Verhalten des Schwefelkohlenstoffes zu Thonerde und Eisenoxyd jedenfalls nur eine geringe Menge von Wasser als in das Innere der festen Körper eingedrungen anzusehen. Die Dämpfe des Schwefelkohlenstoffes und des gewöhnlichen Aethers brauchen übrigens zur Absorption durch Thonerde viel weniger Zeit, denn das Gewicht wurde bei ähnlicher Versuchsanordnung schon nach wenigen Tagen ziemlich constant, die Absorption von Schwefelkohlenstoff durch Eisenoxyd dauert dagegen wieder länger, und es scheint demnach jene Verlängerung des Vorganges von dem chemischen Verhalten der Dampfbestandtheile zu der absorbirenden festen Substanz abhängig zu sein. Ob dabei, wie in Bunsen's Versuchen, eine adhärirende Wasserschicht von Einfluss ist, habe ich bisher nicht untersucht.[1])

Die durch die Ungleichheit in der Geschwindigkeit der Wasseraufnahme schon angezeigte Verschiedenheit in der Stärke der Wasseranziehung erkennt man aus der relativen Dampfspannung in der nachstehenden Tabelle mit voller Bestimmtheit.

a	*W*	*s*	*w*	*a*	*W*	*s*	*w*
0,280[1])	0,124	0,77	42,5	—	—	(0,0017)	(7,2)
—	—	0,60	38,9	—	—	(in 30 Tagen nichts verloren)	(7,0)
(0,129[1])	(0,0565)	0,55 (0,55)	35,7 (34,5)	0,176[2])	0,086	0,73	46,0
—	—	0,51	32,5	—	—	0,60	40,4
—	—	0,47 (0,48)	29,4 (29,1)	—	—	0,55	35,9
—	—	0,44	23,9	—	—	0,51	30,7
—	—	0,38	19,3	—	—	0,44	26,1
—	—	0,29 (0,26)	17,2 (17,4)	—	—	0,22	16,5
—	—	0,21	14,3	—	—	0,09	12,9
—	—	0,11 (0,12)	13,2 (13,6)	—	—	0,05	12,5
—	—	0,08	11,4	—	—	0,03	10,8
—	—	0,05	10,2	—	—	0,014	9,4
—	—	0,025 (0,03)	9,3 (11,1)	—	—	0,003	9,1
—	—	0,014	8,6	—	—	0,003	8,6
—	—	0,006 (0,005)	8,0 (7,5)				

1) Mit 15½ Proc. Hydratwasser. 2) Mit 8½ Proc. Hydratwasser.

In dieser Tabelle ist *a* das Gewicht der Thonerde in Grammen, *W* das Gewicht des absorbirten Wassers in Grammen, *s* die relative Dampfspannung und *w* der der Dampfspannung entsprechende mittlere Wassergehalt in Procenten. Der mitt-

1) R. Bunsen, Wied. Ann. **24.** p. 321.

lere Wassergehalt ist dabei nach der Formel $\left((p_1+p_2)/2a\right)100$ berechnet, wenn a das Gewicht der Thonerde, p_1 und p_2 das Anfangs- und Endgewicht des Wassers bezeichnen.

Die eingeklammerten Werthe in der ersten Versuchsreihe beziehen sich auf 0,129 g einer Thonerde von gleichem Gehalt an Hydratwasser ($15^1/_2$ Proc.). Das geringere Gewicht lässt stärkere Abweichungen zu, und es sind deshalb die nicht eingeklammerten Zahlen als die genaueren anzusehen. Auch die Abweichungen bei dem letzten Versuche können auf denselben Grund zurückgeführt werden, und so findet sich in allen Versuchsreihen eine ganz befriedigende Uebereinstimmung. Vom letzten Fünftel des absorbirten Wassers an zeigte sich eine rasche Abnahme der Dampfspannung, und die letzten 8 Proc. sind fester gebunden als das letzte Wasser der 84 procentigen Schwefelsäure, sodass unter dieser Grenze die weitere Wasserabscheidung durch concentrirte Schwefelsäure ganz wie bei den festesten chemischen Verbindungen unmöglich wird. Dass die Anziehung zwischen absorbirten Gasen oder Dämpfen und festen Körpern sehr stark ist, konnte nach früheren Versuchen nicht auffallen, nachdem z. B. Jamin und Bertrand[1]) festgestellt hatten, dass die Luftpumpe einen beträchtlichen Theil des absorbirten Gases dem pulverisirten Glase nicht zu entziehen vermag, dass aber die Wasseranziehung noch über die des Chlorcalciums zum zweiten Wassermolecül hinausgeht, war mir eine unerwartete und interessante Thatsache. Die in meinen Versuchen zuerst beobachtete grösste Dampfspannung war ungefähr der der 30 procentigen Schwefelsäure gleich, doch ist dieses Resultat der Durchschnitt unter sich verschiedener Spannungen, sodass man den Anfangswerth jedenfalls höher annehmen muss.

Reines Eisenoxyd absorbirte 3 Proc. an Wasserdampf, von denen 0,3 bis 0,4 Proc. so fest gebunden waren, dass in 3 Tagen keine bestimmbare Gewichtsmenge an die ganz trockene Luft abgegeben wurde.

Mit zunehmender Entfernung von der absorbirenden Oberfläche nimmt die Anziehung des absorbirten Wassers

1) Jamin u. Bertrand, Compt. rend. **36.** p. 994. 1852.

ab, doch erfolgt diese Abnahme nach einer annähernden Berechnung der Entfernungsverhältnisse, die ich später mittheilen will, wenigstens für das letzte Drittel des Wassers nicht schneller, sondern wesentlich langsamer als nach dem Quadrate der Entfernung. Absorbirter Schwefelkohlenstoff oder Aether liessen ebenfalls eine zunehmende Dampfspannung in den obersten Schichten erkennen; aber zu weiteren Schlüssen über das Gesetz der Abnahme gaben die bisherigen Versuchsresultate dieser Absorptionen keine Berechtigung.

Allotropische Modificationen derselben Verbindung absorbiren ganz ungleiche Mengen von Dämpfen, ein in Säuren leicht lösliches Eisenoxyd, z. B. das fünffache Gewicht von Schwefelkohlenstoff im Vergleiche zu dem schwer löslichen caput mortuum. Die Absorption hat demnach mit dem chemischen Process grosse Aehnlichkeit, aber sie unterscheidet sich davon wesentlich in zwei Punkten, die durch Absorption vereinigten Stoffe sind in ihren einzelnen Theilen mit sehr ungleicher Festigkeit verbunden, und die verdichteten Gase oder Dämpfe liegen erweislich[1]) wenigstens grösstentheils an der Oberfläche der festen Körper. Die Anziehung ist in beiden Vorgängen anscheinend gleichartig und theilweise von grosser Intensität, aber es fehlt bei der Absorption durch feste Substanzen die leichte Beweglichkeit der Molecüle, und deshalb ist die wirksame Molecularkraft nicht im Stande, auch in das Innere der festen Körper die Gruppirung der heterogenen Wassertheilchen weiter zu tragen.

Die wichtigsten der vorstehend mitgetheilten Ergebnisse sind demnach die folgenden:

1. Durch den Gewichtsverlust bei dem Verdampfen können geringe Unterschiede in der Dampfspannung von unverbundenem und von chemisch gebundenem Wasser sicherer und genauer erkannt werden als durch barometrische Messung.

2. Für die Bestimmung ganz geringer Dampfspannungen ist die Wägungsmethode die allein brauchbare.

3. Einzelne Metalloxyde absorbiren beträchtliche Mengen

1) W. Müller-Erzbach, Verhandl. d. phys. Ges. in Berl. 1882. p. 33.

von Wasserdampf, und die Anziehung derselben kann nach der Dampfspannung mit der der chemischen Verbindung verglichen werden.

4. Von reiner Thonerde werden 8 Proc. an absorbirtem Wasser fester gebunden als das Wasser in der 84 procentigen Schwefelsäure.

Bremen, im April 1885.

III. *Ueber den Gebrauch des siedenden Sauerstoffs, Stickstoffs, Kohlenoxyds, sowie der atmosphärischen Luft als Kältemittel; von Sigmund von Wroblewski.*[1]

(Hierzu Taf. IV Fig. 1 u. 2.)

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über das Giessen der verflüssigten Gase.

Die Verflüssigung der sogenannten permanenten Gase und die genaue Ermittelung der Verflüssigungsbedingungen hat die Darstellung dieser Gase als Flüssigkeiten in grösseren Mengen und ihre Benutzung als Kältemittel möglich gemacht. Hiermit war auch die Möglichkeit geboten, die Temperaturerniedrigungen hervorzubringen, die alle bis jetzt erreichbaren Kältegrade bei weitem übertreffen, uns zu dem Temperaturminimum, welches mit den irdischen Stoffen überhaupt zu erreichen ist, führen und uns nur unweit von dem absoluten Nullpunkt stehen lassen.

In der vorliegenden Abhandlung will ich einen Theil der Methoden der Darstellung und Benutzung dieses Kältemittels so vollsändig beschreiben, dass jeder im Stande sein wird, diese Versuche nachzumachen und sich dieser neuen Kältequelle zu bedienen.

Zu diesem Zwecke beginne ich mit einigen Bemerkungen

---

1) Auszug des Hrn. Verf. aus der in der Sitzung am 12. März 1885 der Wiener Akademie der Wissenschaften vorgelegten und im 91. Bande der Wien. Ber. veröffentlichten Abhandlung.

über das Giessen der verflüssigten Gase im allgemeinen und des Aethylens insbesondere, da die Erscheinungen, die hier auftreten, massgebend für die mitzutheilenden Methoden sind. Es versteht sich von selbst, dass diese Betrachtungen nur für Gase gelten, welche beim Uebergange aus dem Recipienten[1]), in welchem sie flüssig gehalten werden, unter dem atmosphärischen Druck, nicht erstarren.

Soll ein verflüssigtes Gas als Kältemittel benutzt werden, und sollen die Vorgänge in dem mit Hülfe dieses Gases abzukühlenden Apparate direct mit dem Auge verfolgt werden, so muss dieser Apparat in einem Glasgefäss sich befinden, in welches auch das verflüssigte Gas als Kältemittel hineinkommt. Dies bedingt schon eine gewisse Beschränkung der Aufgabe, da man dem Glasgefässe nicht eine beliebige Grösse geben kann. Je weiter das Gefäss ist, desto grösser ist die Gefahr des Zerspringens beim Giessen des Gases infolge der ungleichmässigen Abkühlung des Glases. Ausserdem vergast in diesem Falle der aus dem Recipienten austretende Strahl des verflüssigten Gases, ehe er die Wand des Gefässes erreicht, auf welcher er herunterfliessen kann.

Die bequemste Form für das Gefäss, welches das verflüssigte Gas als Kältemittel aufnehmen soll, ist die Form eines weiten Reagensgläschens.[2])

Die Menge des Gases, welche aus dem eine bestimmte Menge Flüssigkeit enthaltenden Recipienten in ein solches Gefäss hineingegossen werden kann, hängt in erster Linie von der Temperatur ab, bis auf welche das verflüssigte Gas in diesem Recipienten abgekühlt ist. Je mehr diese Abkühlung sich der Temperatur nähert, welche das verflüssigte

---

1) Der Kürze wegen werde ich hier immer unter dem Recipienten die Condensationsflasche der Natterer'schen Pumpe verstehen, in welcher Gase, wie Kohlensäure, Stickstoffoxydul und Aethylen flüssig gemacht und im flüssigen Zustande gehalten werden können.

2) In der Fig. 1 ist ein solches Gefäss *a* schematisch dargestellt, *b* ist das Kupferröhrchen, welches von dem das flüssige Gas enthaltenden Recipienten ausgeht, *c* ist eine feine, seitlich angebrachte Oeffnung, durch welche der flüssige Strahl heraustritt. Der Kautschukpfropfen *d* mit der Oeffnung *e* ist punktirt angegeben.

Gas beim Heraustreten aus dem Recipienten unter dem atmosphärischen Druck annimmt, desto grösser ist die Menge, welche in das Gefäss hineingegossen werden kann. Andererseits hängt diese Menge wesentlich von der Form und der Tiefe des Gefässes, sowie von dem Umstande ab, ob das Gefäss oben mehr oder weniger offen ist.

Von dem Nachtheil einer zu grossen Breite war schon die Rede. Ist das Gefäss zu eng, so wird die an seinem Boden sich sammelnde Flüssigkeit durch den spiralförmig an der Wand herunterfliessenden Strahl herausgeblasen, und dies geschieht auch in dem Falle, wenn der aus dem Recipienten heraustretende Strahl annähernd senkrecht auf die Wand des Gefässes gerichtet ist. Für Versuche mit dem Aethylen ist die beste Weite 5 bis 6 cm. Je tiefer das Gefäss, desto weniger Flüssigkeit wird durch das Herausblasen verloren. Die im Gefäss sich sammelnde Flüssigkeit kann aber ein gewisses Niveau nicht übersteigen. Kommt nämlich das Niveau des hineingegossenen Gases in die Distanz von einigen Centimetern von der Oeffnung, aus welcher der flüssige Strahl austritt, so wird jede weiter hinzukommende Flüssigkeit herausgeblasen.

Einen sehr wesentlichen Einfluss hat der Umstand, ob das Gefäss oben ganz oder nur theilweise offen ist. Bleibt das Gefäss oben offen, so ist der Flüssigkeitsverlust beim Giessen infolge der Vergasung und des Herausblasens sehr gross. Ist das Gefäss durch einen mit einem Loch versehenen Kautschukpfropfen verschlossen, so ist der Verlust schon geringer. Muss aber das aus der Flüssigkeit entstehende Gas durch eine ein paar Meter lange Bleiröhre hindurchgehen, ehe es in die Atmosphäre kommt, so erreicht der Verlust sein Minimum, da in diesem Falle der flüssige Strahl beim Heraustreten aus dem Recipienten unter einem etwas grösseren Druck als der atmosphärische sich befindet.

Auch die Geschwindigkeit, mit welcher der flüssige Strahl aus dem Recipienten heraustritt, ist hier nicht ohne Einfluss, da bei zu geringer Geschwindigkeit die Gefahr der Vergasung, bei zu grosser die Gefahr des Herausgeblasenwerdens eintritt. Diese Geschwindigkeit muss durch das Drehen der

Ablassschraube im Recipienten regulirt werden und dies lässt sich nur dann erfolgreich machen, wenn man den heraustretenden Strahl sieht. Aus diesem Grunde ist es fast unmöglich, das verflüssigte Gas in ein Metallgefäss hineinzugiessen, und dieser Umstand bildet eine von den Haupteinschränkungen der Methode.

Gehen wir jetzt zu den sogenannten permanenten Gasen, d. h. zu Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd und atmosphärischer Luft über, so ist ihre Darstellung im flüssigen Zustande fest an die Benutzung des Aethylens als Kältemittel gebunden. Obgleich Raoul Pictet und neulich Dewar[1]) den Sauerstoff in den Zustand einer statischen Flüssigkeit mit Hülfe der im Vacuum verdampfenden Kohlensäure gebracht haben, so wird man doch dazu immer das Aethylen vorziehen, einmal weil man mit diesem Gase bei weitem niedrigere Temperaturen als mit der Kohlensäure erzielt und folglich die Verflüssigung des Sauerstoffs unter bedeutend niedrigerem Drucke zu Stande bringt, und zweitens, weil die Verflüssigung der anderen permanenten Gase mittelst der Kohlensäure unmöglich ist.

Es wird mithin durch die Bedingungen, unter welchen allein das Hineingiessen des Aethylens in ein Glasgefäss möglich ist, die Menge eines permanenten Gases, welche verflüssigt werden kann, erheblich eingeschränkt.

Andererseits hat der Versuch ergeben, dass, wenn die Verflüssigung eines permanenten Gases in einer Glasröhre stattfindet, welche von dem unter der Wirkung der Luftpumpe siedenden Aethylen abgekühlt ist, die Säule des flüssigen Gases das Niveau des Aethylens nie mehr als ein paar Centimeter überragen kann. Der Grund dieser Erscheinung liegt darin, dass, während der Theil der Glasröhre, welcher in das Aethylen eingetaucht ist, die Temperatur des Aethylens hat, der oberhalb dieser Flüssigkeit befindliche Theil in dem Grade höhere Temperatur aufweist, in welchem man sich von der Oberfläche des Aethylens entfernt. In der Distanz von ein paar Centimetern hat die Röhre bereits

1) Dewar, Phil. Mag. (5) 18. p. 210. 1884.

die Temperatur, welche für das verflüssigte Gas die kritische ist, und über diese Stelle steigt die Säule des verflüssigten Gases nicht empor.

Wenn man dabei noch berücksichtigt, dass etwa ein Drittel des Aethylens mittelst der Luftpumpe verdampft werden muss, ehe die Verflüssigung eines permanenten Gases beginnt, so kommt man zur Ueberzeugung, dass die verflüssigbare Gasmenge keine sehr grosse ist, und dass bei der auf diesem Wege erzielten Verflüssigung keine Rede vom Uebergiessen der permanenten Gase aus einem Apparate in den anderen sein kann. Denn man ist nicht im Stande, mit der verflüssigten Gasmenge erst Zuleitungsröhren und den Apparat, in welchen das betreffende Gas als Kältemittel gelangen soll, abzukühlen und dann noch eine hinreichende Menge vom flüssigen Gase hineinzugiessen.

Aus diesem Grunde wurde folgender Weg[1]) gewählt: Der Sauerstoff oder ein anderes permanentes Gas soll in das Gefäss, in welchem es als Kältemittel benutzt wird, nicht hineingegossen, sondern erst in ihm verflüssigt werden. Dadurch kommen alle Ausgaben für die Abkühlung des Apparates, in welchem er eingeschlossen ist, in Wegfall. Dafür aber wird der Maassstab des Versuches in hohem Grade eingeschränkt. Da die Verflüssigung der permanenten Gase bei der Benutzung des Aethylens als Kältemittel erst bei ziemlich hohen Drucken stattfindet, so ist es unmöglich, sehr weite Glasröhren zu nehmen, weil sie bei diesen Drucken nicht fest genug wären. Daraus folgt die Nothwendigkeit, die Verflüssigung der permanenten Gase bei möglichst niedriger Temperatur und demzufolge bei möglichst niedrigem Druck zu bewerkstelligen, damit die Glasröhre möglichst weit und die verflüssigte Gasmenge möglichst gross ist.

§ 2. Eintheilung der Aufgabe. Das Comprimiren, Reinigen und Aufbewahren der comprimirten Gase.

Die Darstellung der permanenten Gase als Flüssigkeiten in grösseren Mengen setzt eine gute Compressionspumpe voraus. Als solche benutze ich die vom Mechaniker A. Schultz

1) v. Wroblewski, Compt. rend. **97.** p. 1553. 1883.

in Wien construirte Natterer'sche Pumpe. Bei der neuesten im verflossenen Sommer zu Stande gebrachten Construction sind alle im Laufe der letzten Zeit gemachten Erfahrungen berücksichtigt worden. Mit dem für mich vorzüglich ausgeführten Exemplar, welches speciell zum Motorbetrieb und für hohe Drucke eingerichtet ist, wurde im Laufe dieser Arbeit wiederholt der Wasserstoff in einer auf 300 Atmosphären geprüften Stahlflasche bis auf den Druck von über 200 Atmosphären gebracht.

Bei den alten Natterer'schen Pumpen hatte der Kolben eine Lederkappe, welche fest an die Wände des Kolbencylinders andrückt. Dieser Umstand führte zu grossen Unannehmlichkeiten, besonders beim Comprimiren des Sauerstoffes. War nämlich die Lederkappe mit Oel befeuchtet, so folgte bei höherem Drucke bei jedem Pumpenschlag eine kleine Explosion, da die Oeldämpfe sich in dem comprimirten Sauerstoff entzündeten. Ich musste deshalb fast ganz trockene Lederkappen nehmen, wobei ihre Abnutzung so rasch war — sie wurden ganz schwarz und zerplatzten schliesslich —, dass man oft sechs- bis siebenmal die Lederkappe wechseln musste, wenn der Sauerstoff auf den Druck von 120 Atmosphären gebracht werden sollte.

Die Ersetzung der Lederkappe durch Asbest erwies sich als sehr vortheilhaft und hat die Arbeit wesentlich erleichtert. Der gut eingerichtete Asbestkolben hält sehr hohe Drucke aus. Ist er undicht geworden, so wird die kleine Mutter, welche den Asbest zusammenpresst, etwas losgeschraubt, ein wenig Asbest dazugewickelt und die Mutter nach und nach etwas fester nachgeschraubt. Der Kolben wird sehr wenig mit Knochenöl befeuchtet, beim Sauerstoffcomprimiren fast trocken gehalten.

Die Pumpe wird mittelst einer Transmission durch einen zweipferdigen Gasmotor in Gang gehalten. Für gewöhnlich macht der Kolben 60 bis 65 Hin- und Herbewegungen in einer Minute, beim Comprimiren des Sauerstoffes 45. Der Cylinder der Pumpe ist kurz. Die Hubhöhe beträgt nur 29 cm.

Zur Aufbewahrung der comprimirten Gase dient fol-

gender nach meinen Angaben durch Hrn. Schultz construirter Apparat: *a* und *b* (Fig. 2) sind zwei eiserne auf 150 Atmosphären Druck geprüfte Compressionsflaschen von der Natterer'schen Pumpe, eine jede von ca. 600 ccm Inhalt. Jede Flasche hat ausser dem gewöhnlichen Schraubenhahn *e*, *f* noch einen anderen an dem Boden der Flasche angebrachten *c*, *d*. Beide Flaschen sind mit dem abschraubbaren Kopfstück nach unten gekehrt und mittelst des Kupferrohres *gg* miteinander und mit dem Metallmanometer *h* verbunden. Sie sind mit Hülfe einer Metallleiste *i* in einem starken Kasten von Zinkblech *k* befestigt. Der Boden des Kastens ist mit zwei sechskantigen Oeffnungen versehen, in welche die gleichfalls sechskantig geformten Kopfstücke der Flaschen hineingehen. Soll das Comprimiren des Gases bei niedriger Temperatur vorgenommen werden, so kann der Boden durch entsprechend geformte Lederstücke wasserdicht gemacht und dann der ganze Kasten mit Eis gefüllt werden. *l* ist ein kupfernes, etwa 3 m langes Rohr, welches zu der Natterer'schen Pumpe führt. Die Flaschen können mittelst der Schraubenhähne *cdef* sowohl von der Pumpe wie voneinander und von dem Manometer getrennt werden. Der ganze Apparat lässt sich mit grösster Leichtigkeit in einzelne Theile auseinander nehmen. Als Material zur Dichtmachung dient überall Blei.

Der Schraubenhahn *e* ist mittelst der Kupferröhre *m* mit dem Stahlstück *n* verbunden, welches das Innere des Compressionsapparates sowohl mit dem Apparate, in welchem das permanente Gas verflüssigt wird, wie mit einem Luftmanometer *o* in Verbindung zu setzen gestattet.[1]) Der Schraubenhahn *p* dient zum Absperren des Manometers. Damit das Stahlstück *n* unbeweglich bleibt, wird es mittelst einer eisernen Stange *q* an den Tisch fest angeschraubt.

In die erste Flasche *a* wird das Gas nur bis zu dem Verflüssigungsdruck gepumpt, welcher für alle permanenten Gase — mit Ausschluss des Wasserstoffes — nicht grösser als 40 Atmosphären zu sein braucht. In der zweiten Flasche

1) In der Figur ist nur das Zuleitungsrohr zum Manometer angegeben.

b, welche als Vorrathsflasche für die erstere dient, wird das Gas bis zu dem Drucke von 100 bis 120 Atmosphären comprimirt.[1])

Atmosphärische Luft und Sauerstoff und besonders der letztere, wenn sie so comprimirt werden, enthalten Spuren von Kohlensäure und Wasserdampf, welche beim langsamen Verbrennen der Oeldämpfe während des Pumpens entstehen. Soll der Sauerstoff zur Abkühlung von Gegenständen, die durchsichtig bleiben müssen, wie z. B. Glasröhren, benutzt werden, so ist die Anwesenheit der Kohlensäure sehr störend, da beim raschen Verdampfen des flüssigen Sauerstoffes auf den abzukühlenden Gegenständen ein undurchsichtiger fester Niederschlag sich bildet. Das Gas muss deshalb noch nach der Compression gereinigt werden. Dies erreiche ich dadurch, dass ich in jede der Flaschen *a* und *b* ein kleines cylindrisches, mit Aetzkali und Chlorcalcium gefülltes Gefäss aus Drahtnetz hineinlege und das Gas erst mehrere Stunden nach der Compression zu den Versuchen benutze.

§ 3. Temperaturen, die man mit Hülfe des Aethylens hervorbringt.

Aus dem Vorhergehenden ist es klar, dass die ganze Frage sich jetzt um die Erniedrigung der Siedetemperatur des Aethylens dreht. Bei den Versuchen, welche ich in der Abhandlung „Ueber die Verflüssigung des Sauerstoffs, Stickstoffs und Kohlenoxyds"[2]) beschrieben habe, diente eine alte nach dem Princip Bianchi's construirte Luftpumpe. Mit dieser Pumpe, wenn sie nur mit dem Manometer verbunden war, konnte man im besten Falle die Verdünnung von 1 cm Quecksilberdruck erreichen. Verdampfte man das Aethylen, so blieb noch immer die Dampfspannung von 2,5 bis 3 cm übrig. Die Temperatur, welche dann das Aethylen zeigte, war — wie man weiss —136° C.

---

1) Will man mit sehr grossen Gasmengen operiren, so wird noch eine dritte Flasche als Reserve — in der Figur nicht angegeben — genommen. Für gewöhnliche Versuche reichen aber 2 Flaschen vollständig aus.

2) v. Wroblewski u. Olszewski, Wied. Ann. 20. p. 243—257. 1883.

Bis ich bessere Pumpen erlangen konnte, suchte ich durch die Anwendung der Dämpfe des Aethylens zur Kühlung der dampferzeugenden Flüssigkeit die Siedetemperatur des Aethylens herunter zu bringen.

Wie man sich erinnern wird, bestand das in der bereits citirten Abhandlung beschriebene, zur Aufnahme des Aethylens bestimmte Gefäss aus einem Reagenzgläschen, welches in einem etwas Chlorcalcium enthaltenden Cylinder luftdicht sass. Das verdampfende Aethylen wurde durch eine Glasröhre, welche durch den das Reagenzgläschen verschliessenden Kautschukpfropfen hindurchging, herausgepumpt. Es ist klar, dass bei dieser Versuchsanordnung von der niedrigen Temperatur der Aethylendämpfe gar kein Gebrauch gemacht wird. Da andererseits das Reagenzgläschen von dem warmen Glascylinder umschlossen bleibt, ist der Einfluss der Wärmestrahlung viel zu gross, um das Sinken des Dampfdruckes des Aethylens über einen gewissen Grad sowie die entsprechende Abnahme der Temperatur zuzulassen.

Die im folgenden Paragraphen beschriebene Form des Apparates gestattet, sowohl die Umhüllung wie das Gefäss mit dem flüssigen Aethylen durch die Aethylendämpfe abzukühlen. Der Einfluss dieser Abänderung zeigte sich so gross, dass die Siedetemperatur des Aethylens bei der Benutzung der alten Pumpe gleich auf -144^0 C. herunterging.

Unterdessen hat Mechaniker P. Stückrath in Berlin sowohl die alte Pumpe, wie eine zweite ebenso mangelhafte, die mir zu den Versuchen diente, als jene den Dienst gänzlich versagte, umgearbeitet, mit Babinet'schen Hähnen versehen und zum Motorbetrieb eingerichtet.

Die beiden Pumpen[1]) sind nebeneinander aufgestellt und werden durch den Gasmotor jede besonders in Gang gehalten. Die Transmission ist so eingerichtet, dass die Pumpen mit ungleicher Geschwindigkeit gehen. Auf 20 Umdrehungen einer Pumpe kommen 21 der anderen. Die 13 mm im Lichten haltenden kurzen Schläuche y' z' beider Pumpen vereinigen sich zu einem Rohr unweit vom Apparate.

1) Der Durchmesser des Pumpenstiefels beträgt 6,2 cm, die Hubhöhe 26,2 cm.

Am Regulator des Motors habe ich einen Hebel anbringen lassen, welcher mit Gewichten belastet werden kann, wodurch man im Stande ist, die Geschwindigkeit des Motors in sehr weiten Grenzen zu variiren. Sie kann von 120 bis auf 220 Umdrehungen pro Minute gebracht werden. Beim Normalgang macht der Motor 180 Umdrehungen. Dank diesem Umstande kann auch der Gang der Pumpen entsprechend geändert werden.

Bei der Benutzung beider Pumpen zugleich[1]) sinkt die Dampfspannung des Aethylens auf 1 bis 0,95 cm und seine Temperatur bis auf -152^0 C.

Durch diese Temperaturerniedrigung ist es möglich geworden, Stickstoff, Kohlenoxyd und atmosphärische Luft direct mit Hülfe des Aethylens und ohne Zuhülfenahme eines schwieriger verflüssigbaren Gases, wie z. B. des Sauerstoffs — wie ich es früher gemacht habe[2]) — zu verflüssigen, da die kritische Temperatur dieser Gase[3]) oberhalb dieses Minimums sich befindet.

§ 4. Der Verflüssigungsapparat.

Der Verflüssigungsapparat besteht aus einer Glasröhre *r*, welche etwa 13 mm im Lichten und 4 mm Wandstärke hat.[4]) Diese Röhre ist dem Bedürfnisse des Versuches entsprechend 42 bis 46 cm lang, unten zugeschmolzen und oben in eine Messingfassung *s* eingekittet. Die Fassung ist mit einer konischen Vertiefung versehen, zu welcher ein messingener Deckel *t* mit einem konischen Ansatz genau passt und mit Hülfe von 4 Schrauben *uu* luftdicht angelegt werden kann. Der Deckel enthält je nach Bedürfniss zwei oder mehrere Löcher zum Durchlassen des das Gas zuleitenden Rohres, des Thermometers und des abzukühlenden Apparates. In der

1) Der Babinet'sche Hahn erwies sich bei diesen Versuchen als unbrauchbar, da das Anwachsen des Druckes durch Verdampfung des Aethylens schneller vor sich geht, als die Wirksamkeit der Pumpen, wenn der Hahn nach Babinet's Art gestellt wird.

2) v. Wroblewski, Compt. rend. **98.** p. 982—985. 1884.

3) Näheres darüber in § 7.

4) Solche Röhren halten selten den Druck von 60 Atmosphären aus. Die meisten zerplatzen bereits unter dem Druck von 50 Atmosphären.

Figur sind der Einfachheit der Zeichnung wegen nur zwei solche Löcher angegeben. Das eine *v* setzt mittelst des Kupferröhrchens *w* das Innere des Apparates mit dem Apparate zum Aufbewahren des comprimirten Gases in Verbindung. Das zweite *x* lässt ein thermoelectrisches Paar hindurch. Die Röhre *r* ist in den zum Hineingiessen des Aethylens bestimmten Apparat hineingesetzt, welcher in erster Linie aus einer 55 bis 60 cm langen, 6 bis 6,5 cm im inneren Durchmesser und 0,2 cm in der Wandstärke haltenden Glasröhre *y* besteht. Diese Röhre ist von beiden Enden ein wenig erweitert und mit schwach konischen, 4,5 cm hohen Pfropfen aus grobkörnigem, wenig weichem Kautschuk *z* und *a′* luftdicht verschlossen.[1])

Der obere Pfropfen hat 2 Löcher: durch das eine geht das Rohr *r* luftdicht hindurch, durch das andere ein kurzes Glasröhrchen *b′*, welches dazu dient, das Kupferröhrchen *c′* aufzunehmen, das aus dem Recipienten *d′* das flüssige Aethylen zuführt. Soll gleichzeitig mit anderen Versuchen die Temperatur des Aethylens gemessen werden, so gehen die Drähte von dem dazu bestimmten thermoelectrischen Paar zwischen der Glasröhre *b′* und der Kautschukwand hindurch.[2])

Der untere Pfropfen *a′* hat ebenfalls 2 Löcher. Durch das eine seitlich angebrachte Loch *e′* geht das zum Abführen der Aethylendämpfe dienende Glasrohr *f′*. Das andere Loch, welches nur gerade eng genug ist, um den starken Stahldraht *g′* hindurchzulassen, ist durch die Mitte des Pfropfens geführt, erweitert sich oben ein wenig und enthält in der Erweiterung ein dünnes Glasröhrchen *h′* mit ein paar Tropfen Knochenöl.

Dieses Röhrchen dient als Schmiervorrichtung für den

1) Die Herstellung dieser Röhren ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, da fast alle, nachdem sie abgekühlt worden sind, gleich oder einige Tage nachher an der erweiterten Stelle der Länge nach sich spalten. Sie wurden zuletzt in der Glashütte angefertigt, zweimal geglüht, mit glühendem Sand ganz bedeckt und so 2 Tage lang im geschlossenen Raume abgekühlt.

2) In diesem Falle muss die Stelle, wo die Drähte aus dem Pfropfen *z* herausragen sorgfältig mit dem Kitt zugeschmiert werden, damit der Verschluss luftdicht bleibt.

Draht *g'* und macht möglich, dass man ihn — obgleich er luftdicht durch den Pfropfen geht — mittelst des Griffes *i* hinauf und hinunter schieben kann. Unweit von seinem oberen Ende ist dieser Draht mit einem Kreuz *k'* aus dünnem aber festem Messingstreifen versehen, welches ihm nicht gestattet, aus der centrischen Lage herauszukommen. An seinem oberen Ende trägt der Draht ein 1 cm langes cylindrisches Stück von Ebonit *l'*. Der Zweck dieses Stückes wird gleich erläutert werden.

Das eigentliche, zur Aufnahme des flüssigen Aethylens dienende Gefäss ist das 34 bis 38 cm lange, unten geschlossene Glasrohr *m'*. Es ist von sehr dünnwandigem Glas gemacht, und sein Durchmesser ist so gewählt, dass zwischen ihm und der äusseren Röhre *y* eine Distanz von 2 mm frei bleibt. Dieses oben sorgfältig abgeschliffene Rohr ruht nur auf dem soeben beschriebenen Ebonitstück. Damit keine Berührung zwischen dieser Röhre und der Röhre *y* möglich ist, werden auf die Röhre *m'* an 2 Stellen, welche in der Figur punktirt sind, 2 Ringe aus dünnem Messingblech — jeder Ring mit 4 Flügeln — geschoben.

Damit zwischen dem Rohr *m'* und dem Pfropfen *z* ein möglichst guter Verschluss sei, hat man in dem Pfropfen eine kreisförmige, 5 mm tiefe und 3 mm breite Rinne ausgebrannt und dann mit Aether ausgewaschen. Das Rohr *m'* passt in diese Rinne genau, und wenn man den Draht *g'* nach oben schiebt, so wird er in ihr festgehalten. Damit die Aethylendämpfe Platz zum Entweichen haben, ist oben bei *n'* in dem Glasrohr *m'* ein 9 mm im Durchmesser haltendes Loch ausgebohrt und mit einem 5 mm hohen, aus sehr dünnem Messingblech gemachten Ring versehen.

Der Apparat wird folgender Weise zusammengesetzt. Nachdem alle Glastheile mit peinlichster Sorgfalt gereinigt worden sind, wird zuerst der Pfropfen *z* mit der Röhre *b'* auf die Röhre *r* hinaufgeschoben und die Röhre *r* nochmals mit Fliesspapier gereinigt. Dann schiebt man die Röhre *y* auf denselben Pfropfen, legt die Röhre *m'* und das kleine Drahtgefäss *o'* mit frisch getrocknetem Chlorcalcium hinein, und zuletzt fügt man den Pfropfen *a'* mit allem, was er

enthält, hinzu. Dann wird das Rohr *b'* mit einem Stöpsel vorläufig geschlossen, *f'* in Verbindung mit den Luftpumpen gebracht und beide Pfropfen durch Luftdruck in die Röhre *y* hineingezogen.[1])

Ist alles vollständig luftdicht, so befestigt man den ganzen Apparat auf dem schweren Dreifuss *p'* und legt um den Apparat einen aus gefirnisster Pappe angefertigten, mit zwei langen Glasfenstern versehenen und unten und oben sich eng an die Röhre *y* anschliessenden Kasten *q'*. Im unteren Theile des Kastens befinden sich zwei halbkreisförmige Papptröge und in dem oberen 2 Drahtnetzgefässe mit frischgetrocknetem Chlorcalcium.[2]) Der Pappkasten hat zum Zweck, keine Feuchtigkeit auf die äussere Fläche der Röhre *y* zuzulassen und die Wärmestrahlung von aussen abzuhalten. Der Versuch hat gezeigt, dass dieser Zweck erreicht wird, wenn der Kasten etwa 15 cm im Durchmesser beträgt.

Ist man soweit mit der Zusammenstellung, so wird der Deckel *t* mit allem, was zu ihm gehört, auf seinen Platz gelegt und mit den Schrauben *uu* luftdicht befestigt, der Stöpsel aus der Röhre *b'* herausgenommen und an seine Stelle das Kupferrohr *c'* mittelst eines auf ihm befindlichen Stückes von Kautschukschlauch luftdicht befestigt. Dieses Kupferrohr ist 3 m lang und spiralförmig zweimal zusammengewickelt. Es befindet sich in einem mit Doppelwand versehenen, zur Aufnahme der festen Kohlensäure und des Aethers bestimmten Blechgefässe *r'*. Das andere Ende dieser Spirale gabelt sich und führt zu den beiden[3]) das flüssige Aethylen enthaltenden Recipienten *d'*, von denen jeder in einem Blechgefässe mit Eis und Kochsalz sich befindet. Die in den Recipienten enthaltene Menge Aethylen beträgt 500 bis 540 g.

1) An der Stelle, wo der Contact zwischen Glas und Kautschuk stattfindet, werden die Pfropfen *z* und *a'* ein wenig mit Vaseline befeuchtet. Damit die Pfropfen beim Giessen des Aethylens aus der Röhre nicht hinausgeworfen werden, bindet man sie mittelst eines 0,9 mm dicken, längs der Röhre *y* geführten Kupferdrahtes aneinander.

2) In der Figur nicht angegeben.

3) In der Figur ist nur ein Recipient gezeichnet.

Nachdem der Apparat so zusammengestellt worden ist, wird er 20- bis 30-mal leer gepumpt und mit trockener Luft angefüllt. Zum Einlassen der trockenen Luft dient der Hahn s'.

Ist man mit allen diesen Vorbereitungen zu Ende, so wird das Blechgefäss r' mit fester Kohlensäure und Aether so gefüllt, dass die Kohlensäure wie Brei dick ist.[1]) Dann wird durch die passende Stellung des Hahnes t' das Innere des Apparates in Verbindung mit der Atmosphäre gebracht und das Aethylen zuerst aus dem einen Recipienten und dann aus dem anderen herausgelassen. Die Flüssigkeit sammelt sich im Rohr m', die Dämpfe gehen durch die Oeffnung n' und dann zwischen den Wänden beider Gefässe ins Rohr f' zu dem Hahn t'. Beim zu schnellen Giessen geht auch etwas Flüssigkeit durch das Loch n' und fällt tropfenweise auf den Pfropfen a'. Um diesen Verlust auf das Minimum zu bringen, sitzt im Loch n' der bereits erwähnte Blechring und zwingt die Flüssigkeit, wieder herunterzufliessen. Das Heruntertropfen des Aethylens, hat übrigens keine übeln Folgen, und wenn das Rohr m' 34 cm lang ist, so kann mit Leichtigkeit eine Aethylensäule von 25 cm Höhe hineingegossen werden.

Das flüssige Aethylen in einer solchen Menge zeigt alle Eigenschaften einer sehr stark überhitzten Flüssigkeit, und beim kleinsten Anlass wird es nach oben geworfen und durch das Loch n' herausgegossen. Es genügt die geringste Berührung zwischen dem Rohr m' und der äusseren Röhre y, um das ganze Aethylen in gewaltsames Kochen zu bringen. Zuerst als der Pappkasten nur 10 cm im Durchmesser hatte, war schon eine Berührung des Glasfensters mit der Hand genügend, um sofort das Emporschleudern des Aethylens in die Höhe zu veranlassen. Die unangenehmsten Folgen hatte jedoch früher der Umstand, dass der Stahldraht g' oben nicht mit Ebonit versehen war. Das Aethylen kam fast nie aus dem heftigen Kochen, und bei der Berührung des Drahtes mit der Hand wurde es in die Höhe geschlendert.

1) Zu diesem Zwecke reicht ein Recipient von 500 bis 600 g flüssiger Kohlensäure aus.

Erst die Erweiterung des Kastens bis 15 cm im Durchmesser und die Benutzung des Ebonits setzten den Explosionen ein Ziel.

Es kommt oft vor, dass, wenn das Aethylen hineingegossen worden ist, von der Röhre *r* Luftbläschen aufsteigen. In diesem Falle wird später beim Pumpen fast alles Aethylen herausgeworfen, da dann die Blasen sehr gross werden und die ganze Flüssigkeit emporschleudern. Um dies zu vermeiden, verfahre ich auf folgende Weise. Es wird zuerst Aethylen nur etwa bis 5 cm Höhe eingegossen, der Apparat durch passende Stellung des Hahnes *t'* von der Atmosphäre getrennt und die Flüssigkeit vorsichtig gepumpt. Nach ein paar Minuten hört die Blasenbildung auf. Jetzt kann man ruhig — nachdem man in dem Apparat durch den Hahn *s'* die trockene Luft eingelassen und die Verbindung mit der Atmosphäre mittelst des Hahnes *t'* wieder hergestellt hat — den ganzen Inhalt aus beiden Recipienten hineingiessen. Die Blasenbildung wird nur im oberen Theil der Flüssigkeitssäule eine Zeit fortdauern, was ohne Nachtheil für den Versuch ist.

Das Aethylen wird zuerst nur mit einer Pumpe gepumpt, welche blos ca. 30 Umdrehungen pro Minute macht. Beginnt das Manometer *u'* zu sinken, so wird die zweite Pumpe in Gang gesetzt, und dann durch entsprechende Aenderungen am Regulator des Gasmotors die Geschwindigkeit allmählich bis 60 Umdrehungen pro Minute gesteigert.

Ist ein Drittel von der Aethylenmenge verdampft, so hat man schon eine Abkühlung, welche für Verflüssigung des Sauerstoffes hinreichend ist. Will man mit flüssigem Stickstoff operiren, so muss etwa die Hälfte des Aethylens verdampft werden.

§ 5. Die Verflüssigung des Gases und seine Ueberführung auf den atmosphärischen Druck.

Ist die Temperatur des Aethylens hinreichend gesunken, und kann die Verflüssigung beginnen, so setzt man die Flasche *a* in Verbindung mit dem Inneren des Verflüssigungsapparates und lässt das Gas unter dem Drucke von

40 Atmosphären ein. In dem Grade, wie es sich verflüssigt, und der Druck abnimmt, wird das Gas aus der zweiten Flasche *b* zugelassen. Steht das verflüssigte Gas etwas höher oder auf demselben Niveau wie das Aethylen, so wird die Flasche *a* abgesperrt. Auf diese Weise kann mit Leichtigkeit eine Flüssigkeitssäule von 10 bis 12 cm Höhe erhalten werden.

Jetzt handelt es sich darum, das verflüssigte Gas unter den atmosphärischen Druck zu bringen und es unter diesem Drucke möglichst lange zu erhalten. Oeffnet man den Hahn *v'*, so verdunstet die Flüssigkeit sehr schnell, da der Unterschied zwischen der Temperatur des Aethylens und der Siedetemperatur des Gases sehr gross ist. Das verflüssigte Gas muss deshalb — nachdem es auf den atmosphärischen Druck übergeführt worden ist — der erwärmenden Einwirkung des flüssigen Aethylens entzogen werden. Dies suchte ich zuerst dadurch zu erreichen, dass ich den Draht *g'* und zugleich die auf ihm ruhende Röhre *m'* nach unten zog, ohne dabei an der Arbeit der Pumpen irgend etwas zu ändern, und erst dann den Hahn *v'* aufmachte. Die gewählte Construction des Apparates hatte zum Zweck, diese Manipulation zu ermöglichen. Der Versuch hat aber ergeben, dass dadurch sehr wenig erreicht wird, da die erwärmende Einwirkung der Glasröhre *r* selbst noch viel zu stark ist. Es musste deshalb noch diese Einwirkung beseitigt werden.

Ich habe dies dadurch erreicht, dass in die Glasröhre *r* eine zweite aus dem dünnsten Reagenzglase geblasene, unten spitzig zugeschmolzene Glasröhre gelegt wurde. Diese Röhre ist 10 bis 15 cm lang, und ihr Durchmesser ist so gewählt, dass sie nirgends an die Wand der Röhre *r* sich anlegt, wozu der am oberen offenen Ende etwas nach aussen umgebogene Rand beiträgt. Sie ruht deshalb nur auf der Spitze und auf irgend einem Theile des Randes. Verflüssigt man das permanente Gas, so füllt sich mit ihm sowohl diese Röhre, wie der Zwischenraum zwischen ihr und der Röhre *r*. Wird der Hahn *v'* vorsichtig aufgemacht, so verdampft zuerst die Flüssigkeit, welche im Zwischenraume zwischen beiden Röhren sich befindet. Dadurch wird die dünnwandige Röhre mit der Flüssigkeit von der Röhre *r* isolirt. Die Flüssigkeit

wird der erwärmenden Einwirkung der Röhre *r* entzogen, und, nachdem sie sich abgekühlt hat, verdampft sie jetzt nur sehr langsam.

Auf diese Weise kann die in der dünnwandigen Röhre enthaltene Sauerstoffmenge eine Viertelstunde lang nicht nur unter dem atmosphärischen Druck, sondern — wie man weiter sehen wird — im Vacuum erhalten werden. Bei der Ueberführung auf den atmosphärischen Druck geht gewöhnlich die Hälfte des verflüssigten Gases verloren.

Diese Methode macht das Herunterziehen der Röhre *m'* mit Aethylen überflüssig.

Ist das verflüssigte Gas verdunstet, so kann der Versuch wiederholt werden, solange der Vorrath des comprimirten Gases es gestattet. Das einmal abgekühlte Aethylen verdampft nachher sehr langsam und kann als Verflüssigungsmittel 1 bis 2 Stunden dienen.

Zum Schlusse eine Bemerkung als Warnung. Obgleich die Röhre *r* noch vor dem Gebrauch auf den Widerstand gegen Druck geprüft wird, so ist doch jeder Verflüssigungsversuch in hohem Grade gefährlich und kann bedenkliche Explosionen zur Folge haben. Aus diesem Grunde sind alle Vorsichtsmaassregeln geboten, und sowohl meine Assistenten, die Herren Aleksandrowicz, Kosminski und Novak, wie auch ich selbst, bedienen uns stets bei jedem Versuche der den ganzen Kopf bedeckenden Drahtmasken. Ich benutze diese Gelegenheit, um den genannten Herren, die mir bei diesen Untersuchungen geholfen, meinen besten Dank auszusprechen.

§ 6. Die Methode, die niedrigen Temperaturen zu messen.

Schon bei den ersten Bestimmungen der Verflüssigungsdrucke bei dem Sauerstoffe zeigte sich, dass das Wasserstoffthermometer bei solchen Versuchen nur im beschränkten Maasse benutzt werden kann. Die Angaben dieses Thermometers sind nur dann sicher, wenn die Temperatur des zu untersuchenden Mediums hinreichend lange constant bleibt. Diese Bedingung ist bei den verflüssigten Gasen sehr schwer zu erreichen. So zum Beispiel zeigt das flüssige Aethylen,

selbst wenn es in beträchtlicher Quantität in ein Glasgefäss hineingegossen worden ist, kleine Temperaturschwankungen, die nicht ohne Einfluss auf die vorzunehmende Messung sind und nicht rasch genug mit einem Wasserstoffthermometer verfolgt werden können. Noch schwieriger werden die exacten Messungen dort, wo die verflüssigte Gasmenge klein ist, und wo man die Thermometerkugel auch klein machen muss. In diesem Falle treten noch andere Fehlerquellen hervor, wie z. B. die Unsicherheit in der Bestimmung der Temperatur der Capillare, welche die Thermometerkugel mit dem Manometer des Thermometers verbindet, und die Unsicherheit der Einstellung des Quecksilberfadens auf die Marke. Man kann diese Thermometer nicht mit einer Glasspitze versehen, auf die man das Quecksilberniveau immer einstellen könnte, wie dies z. B. beim Jolly'schen Luftthermometer der Fall ist. Bei den ersten Thermometern, welche ich bei den ersten Versuchen mit dem flüssigen Sauerstoff benutzte, war auf dem mit dem Manometer verbundenen Schenkel der Capillare eine einfache Marke angebracht und der Quecksilberfaden immer auf diese Marke gestellt. Eine solche Einstellung ist sehr unsicher, da man nur mit dem Finger an der Capillare zu klopfen braucht, um die Lage des Quecksilberfadens sofort zu verändern. Ganz unbrauchbar ist das Wasserstoffthermometer dort, wo die Temperatur sich rasch ändert.

Aus diesem Grunde habe ich mich entschlossen, an die Stelle des Wasserstoffthermometers ein Thermoelement zu setzen.

Die von mir gewählte Methode beruht auf der Benutzung eines aperiodischen, sehr empfindlichen Spiegelgalvanometers von hohem Widerstande. Ist der Widerstand in dem Schliessungsbogen im Vergleich zu demjenigen des Galvanometers verschwindend klein, so sind die Angaben des Galvanometers direct proportional der durch die Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen hervorgerufenen electromotorischen Kraft. Kennt man einmal den Zusammenhang zwischen der electromotorischen Kraft und der Temperatur bei dem gewählten Paare, so hat man ein Mittel zur Messung jeder Temperatur gefunden.

Als thermoelectrisches Paar habe ich galvanoplastisches Kupfer und Neusilber gewählt. Zur Wahl dieses Paares hat mich nicht sowohl seine Stellung in der thermoelectrischen Reihe, als vielmehr der Umstand bewogen, dass hier die electromotorische Kraft zwischen + 100 und 0° C. fast genau der Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen proportional ist. Die Versuche ergaben, dass bei den niedrigeren Temperaturen die electromotorische Kraft langsamer als die Temperaturdifferenz wächst. Dessenungeachtet bleibt auch hier der Zusammenhang zwischen diesen beiden Grössen so regelmässig, dass man im Stande ist, wie man es gleich sehen wird, mit Hülfe der empirischen Gleichung, welche diesen Zusammenhang zwischen + 100 und − 130° C. darstellt, noch die in der Nähe von − 200° C. befindlichen Temperaturen mit Sicherheit aus den Angaben des Galvanometers abzuleiten.

Bei den ersten Versuchen wurde die Empfindlichkeit des Galvanometers so gewählt, dass, während eine Löthstelle in Eis und die andere in Wasser von der Temperatur von + 99,21° C. sich befand, der Scalenausschlag des Galvanometers im Mittel 14,164 cm betrug. Um zu sehen, inwieweit die Angaben des benutzten Galvanometers der electromotorischen Kraft proportional sind, wurde ein dreifaches Paar genommen. Der Scalenausschlag war in diesem Falle genau dreimal so gross, und dadurch wurde die vollständige Proportionalität innerhalb der angegebenen Grenzen zwischen der electromotorischen Kraft und dem Scalenausschlag bewiesen.

Diejenige Stellung des Galvanometerspiegels, bei welcher die beiden Löthstellen sich im Eise befanden, wurde als Null angenommen. Die Ausschläge im Sinne der höheren Temperaturen als 0° wurden positiv, dagegen die entgegengesetzten negativ gerechnet. Als Vergleichstemperaturen zwischen dem Wasserstoffthermometer und Galvanometer zur Feststellung der Temperaturgleichung wurden zuerst folgende 4 Temperaturen gewählt: erstens die Siedetemperatur des Wassers; zweitens die Schmelztemperatur des Eises; drittens die Siedetemperatur des Aethylens unter dem atmo-

sphärischen, und viertens die Siedetemperatur des Aethylens unter dem Druck von etwa 3 cm Quecksilberdruck.

Das Kugelgefäss des Wasserstoffthermometers hatte cylindrische Form und fasste bei 0° C. 260,838 g Quecksilber, die Capillare dagegen nur 0,66 g. Das Verhältniss des Volumens der Capillare zu demjenigen des Kugelgefässes betrug also nur 0,00253.

Zu den Versuchen mit dem Aethylen wurden zwei thermoelectrische Paare benutzt, von denen das eine an dem oberen und das untere an dem unteren Theil des Kugelgefässes durch Seidenfäden befestigt war. Ein besonders dazu eingerichteter Commutator gestattete, die Angaben der beiden Paare gleich nacheinander abzulesen. Dadurch war es möglich, sich zu überzeugen, ob das ganze Kugelgefäss des Thermometers in einem Medium von derselben Temperatur sich befände.

Um einen Begriff von dem Gange der Beobachtungen zu geben, wird hier ein vollständiges Protocoll eines Versuches, welches sich auf die Siedetemperatur des Aethylens unter dem atmosphärischen Drucke bezieht, mitgetheilt.

	Abgelesen an der Scala bei beiden Stellungen des Commutators		Der Ausschlag in cm
Unteres Paar . .	12,86	34,39	−10,765
" " . .	12,79	34,41	−10,81
Oberes Paar . . .	12,90	34,38	−10,74
" " . .	12,90	34,39	−10,745
Unteres Paar . .	12,88	34,45	−10,785
" " . .	12,87	34,42	−10,775
Oberes Paar . . .	12,89	34,40	−10,775
" " . .	12,90	34,39	−10,745
		Mittel	−10,765

Temperatur am Wasserstoffthermometer = −102,4° C.

Folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der vier an vier verschiedenen Tagen angestellten Versuche.

Hier wie in den folgenden Tabellen ist der Ausschlag des Galvanometers in Centimetern mit w, die Temperaturen mit θ bezeichnet.

w	− 10,765	− 10,8025	− 10,729	− 10,729	Mittel − 10,763
θ	−102,4	−103,25	−103,3	−102,4	Mittel −102,84° C.

Nachstehende Tabelle enthält die Ergebnisse der Versuche bei der Siedetemperatur des Aethylens unter dem Drucke von etwa 3 cm Quecksilberdruck.

w	− 12,86	− 12,89	− 12,875	− 12,88	− 12,755
θ	−130,1	−131,2	−130,9	−131,2	−131,2
w	− 12,86	− 12,88	Mittel − 12,857		
θ	−130,9	−131,4	Mittel −130,986° C.		

Stellt man alles zusammen, so hat man:

w	+ 14,164	±0	− 10,763	− 12,857
θ	+ 99,21	±0	−102,94	−130,986° C.

woraus die Lagrange'sche Interpolationsformel liefert:

$$\theta = 7{,}3256\, w - 0{,}12749\, w^2 + 0{,}007\,399\,8\, w^3.$$

Diese Gleichung gilt selbstverständlich zuerst nur für das Temperaturintervall von 230° zwischen +99 und −131°. Die Bestimmung der Siedetemperatur des flüssigen Sauerstoffs und Stickstoffs unter dem atmosphärischen Druck zeigt aber, dass die nach dieser Gleichung gerechnete Temperatur noch bei −193° C. identisch ist mit der am Wasserstoffthermometer abgelesenen.

Dies ergab sich aus folgenden Versuchen. Beobachtete ich den Ausschlag des Galvanometers, während eine Löthstelle im Eis und die andere in dem unter dem atmosphärischen Drucke siedenden Sauerstoff oder Stickstoff sich befand, so lieferte die obige Interpolationsformel folgende Temperaturen:

Sauerstoff.

w	− 16,27	− 16,27	− 16,17	− 16,22	
θ	−184,8	−184,8	−183	−183,9	Mittel −184,1

Stickstoff.

w	− 16,74	− 16,78	− 16,74	− 16,74	
θ	−193,0	−193,7	−193,0	−193,0	Mittel −193,2

Die directe Bestimmung dieser Temperaturen mittelst Wasserstoffthermometer ergab genau dieselben Werthe.[1])

1) Der zu diesen Versuchen benutzte Sauerstoff war durch Luft verunreinigt. Der Siedepunkt des stickstofffreien Sauerstoffs (§ 7) liegt bei etwa −181,5° C.

Diese Thermometerversuche wurden auf folgende Weise ausgeführt.

Durch ein drittes Loch in dem Deckel des Verflüssigungsapparates wurde von unten eine sehr feine Capillare von 60 cm Länge durchgeführt. Am unteren Ende war sie zugeschmolzen und zu einem länglichen, starkwandigen Thermometergefäss aufgeblasen. Das Volumen dieses Gefässes betrug 0,358 ccm. Die Wandstärke wurde so gewählt, dass das Thermometer nicht zerdrückt werden konnte. Der obere Theil der Röhre wurde nachher zweimal umgebogen, die ganze Röhre mit Wasserstoff gefüllt und dann mit dem Schlauch des Jolly'schen Thermometers verbunden. Als Einstellungsmarken dienten zwei in verschiedener Höhe angebrachte Ringe. Man konnte das Quecksilber auf beide Marken einstellen und daraus den Einfluss der unentbehrlichen Correction auf das Resultat der Messung berechnen. Hatte man alle Correctionen angebracht, so stimmte das Resultat überein.

Diese merkwürdige Uebereinstimmung ist aus doppeltem Grunde wichtig. Erstens zeigt sie, dass der Wasserstoff bis zur Temperatur von -193^0 C. noch als thermometrische Substanz benutzt werden kann. Zweitens ergibt sich, dass wir in einem Kupferneusilberpaar ein äusserst feines Messinstrument besitzen, welches das Wasserstoffthermometer innerhalb der angegebenen Grenzen vollständig ersetzt. Und da diese Uebereinstimmung sich auf ein so grosses Temperaturintervall wie $+100^0$ und -193^0 C. erstreckt, so scheint mir die Schlussfolgerung nicht unberechtigt zu sein, dass bei noch niedrigeren Temperaturen, bei welchen das Wasserstoffthermometer seine Dienste zu versagen beginnt[1]), die aus den Angaben des zwischen $+100^0$ und -193^0 C. calibrirten Kupferneusilberpaares gerechnete Temperatur den Angaben eines mit einem idealen Gase gefüllten Thermometers entspricht.

Ich benutze jetzt zum Calibriren des Thermoelements folgende 4 Temperaturen: Schmelzpunkt des Eises und Siede-

---

1) Näheres darüber in § 8.

punkt des Wassers, Aethylens und Stickstoffes — alles unter dem atmosphärischen Druck.

§ 7. Der kritische Zustand und die Spannkraftscurven der Dämpfe des flüssigen Stickstoffs, Kohlenoxyds und Sauerstoffs. Das Verhalten der atmosphärischen Luft.

Es wurde bereits im § 1 erwähnt, dass die Säule des verflüssigten Gases nicht über eine gewisse, höchstens 1—2 cm von dem Niveau des Aethylens entfernte Stelle gehen kann, da an dieser Stelle die Glasröhre *r* eine Temperatur hat, welche für das betreffende Gas die kritische ist. Je schwieriger verflüssigbar das Gas ist, desto näher an dem Niveau des Aethylens befindet sich diese Stelle. Sucht man durch Vergrösserung des Druckes, unter welchem das Gas sich befindet, die Flüssigkeitssäule zu erhöhen, so wird der Meniscus flacher, dann verschwommen, und zuletzt verschwindet er. Macht man jetzt den Druck durch Herauslassen von Gas etwas kleiner, so kommt der Meniscus nahezu an derselben Stelle, auf welcher er verschwunden war, wieder zum Vorschein.

Da ich in einer besonderen Abhandlung die Erscheinungen, welche die Gase beim Uebergange durch den kritischen Punkt darbieten, zu behandeln beabsichtige, so will ich hier nur anführen, dass das Verschwinden des Meniscus in dem soeben beschriebenen Falle lediglich eine optische Erscheinung ist und nur dadurch entsteht, dass die Dichtigkeit des Gases in der unmittelbar auf der Flüssigkeit liegenden Schicht sich der Dichtigkeit der obersten Schicht der Flüssigkeit nähert. Das Verschwinden des Meniscus ist, wie gesagt, nicht momentan. Er wird zuerst verschwommen und undeutlich, und nachdem er verschwunden ist, kann noch die Stelle, wo er sich befindet, leicht mit blossem Auge erkannt werden, wenn man hinter den Apparat eine angezündete Kerze bringt, dann das Auge etwas unter- oder oberhalb der Meniscusstelle hält und durch diese Stelle nach oben oder nach unten sieht. Wird der Versuch in meinem alten Apparate[1]) in der engen Glasröhre gemacht, so sieht

1) v. Wroblewski u. Olszewski, Wied. Ann. **20**. p. 246. 1883.

man es noch besser, da infolge der verschiedenen Lichtbrechung die Röhre oberhalb und unterhalb dieser Stelle einen anderen scheinbaren inneren Durchmesser hat. Erst nachdem der Gasdruck um ein paar Atmosphären grösser geworden, ist nichts zu unterscheiden. Wir haben nichtsdestoweniger unten die Flüssigkeit, deren Dichte mit der Höhe der Säule von Schicht zu Schicht abnimmt, dann an einer Stelle der Röhre eine Schicht, wo die Flüssigkeit wahrscheinlich continuirlich in das Gas übergeht und schliesslich das Gas mit der von Schicht zu Schicht abnehmenden Dichtigkeit. Die Abnahme der Dichtigkeit im Gas ist durch die Temperaturvertheilung in der Röhre *r* veranlasst.

Aus diesem Grunde ist eine exacte Ermittelung des kritischen Druckes von grosser Schwierigkeit und viel schwieriger als diejenige der kritischen Temperatur.

Das zu den definitiven Versuchen benutzte Manometer wurde von Hrn. Alvergniat in Paris nach dem Princip des bei meinen Untersuchungen über das Hydrat der Kohlensäure benutzten Manometers[1]) geblasen und von mir mit grösster Sorgfalt calibrirt. Die Länge der in Millimeter getheilten Capillare betrug 80,92 cm. Das Volumen des unteren, fünfmal olivenförmig aufgeblasenen Theiles der Röhre entsprach einer Länge von 848,7 cm. Hiermit functionirte das ganze Manometer wie ein 9,296 m langes Rohr und gestattete, die Messungen von 13 Atmosphären aufwärts vorzunehmen. Als Maass des Druckes diente der auf 0° reducirte umgekehrte Werth des Volumens einer Luftmenge, indem das Volumen dieser Menge bei dem Druck einer Atmosphäre = 1 gesetzt wurde. Bei der Berechnung des Druckes im Apparat wurde die Höhe der Quecksilberkuppe in der Manometerröhre über dem Quecksilberniveau in dem mit dem Manometer communicirenden Gefäss, sowie die Capillardepression in der Manometerröhre berücksichtigt. Das Manometerrohr war von Wasser umgeben, in welchem ein empfindliches Thermometer hing. Das Manometer gestattete also, unter dem Drucke von 30 Atmosphären noch $^1/_{100}$ Atmosphäre direct abzulesen.

1) v. Wroblewski, Wied. Ann. 17. p. 111. 1882.

Dem Galvanometer wurde eine solche Empfindlichkeit gegeben, dass sein Ausschlag im kochenden Wasser von 99,65° C. +23,305 cm, im Aethylen bei —103,03° C. —17,723 cm und im siedenden Stickstoff —27,944 cm betrug. Die Temperatur des Aethylens wurde direct mit dem Wasserstoffthermometer ermittelt, diejenige des Stickstoffes den früheren Bestimmungen entsprechend gleich —193° C. gesetzt. Sollte sich vielleicht später ergeben, dass diese letzte Temperatur um einen Bruchtheil eines Grades unrichtig ist, so gebe ich hier an, dass diese Messung bei dem Barometerstand von 74,195 cm geschah und damit wird man im Stande sein, alle hier mitzutheilenden Temperaturen zu corrigiren. Zur Berechnung der Temperatur diente die Gleichung:

$$\theta = 4{,}5749\,w - 0{,}046\,357\,w^2 + 0{,}001\,327\,2\,w^3,$$

wo θ die Temperatur und w den Ausschlag des Galvanometers bedeuten. Man konnte also etwa ein Zehntel Grad direct ablesen. Die Messungen geschahen auf folgende Weise.

Dem thermoelectrischen Paar wurde eine solche Länge und Lage gegeben, dass die Löthstelle in der Glasröhre r nur etwa $^1/_2$ cm vom Boden der Röhre entfernt war und nirgends die Wand berührte. Nachdem man durch Vorversuche eine Vorstellung von der kritischen Temperatur des zu untersuchenden Gases sich verschafft hatte, wurde der Gang der Pumpen so lange regulirt, bis das Aethylen eine nicht stark davon verschiedene Temperatur hatte. Jetzt wurde das Gas unter etwas grösserem Druck als der kritische eingelassen, und nachdem es sich hinreichend abgekühlt hatte, durch eine kleine Expansion verflüssigt. War die Flüssigkeitssäule um ein Beträchtliches zu hoch, so wurde mittelst des Hahnes v' ein Theil des Gases langsam herausgelassen und die Flüssigkeit dadurch so weit verdampft, dass die ganze Flüssigkeitssäule nicht mehr als 1 bis 1,5 cm hoch war, mit anderen Worten, dass die Entfernung des Flüssigkeitsniveaus von der eingetauchten Löthstelle nicht mehr als $^1/_2$—1 cm betrug.

Wollte man den unteren Theil der Spannkraftcurve studiren, so wurde entweder der Gang der Pumpen beschleunigt, oder der kleine Hahn v' weniger fest zugemacht, damit

das Gas aus dem Apparate sehr langsam entweichen konnte. Der Hahn v' wurde gewöhnlich so gestellt, dass das Quecksilber im Manometer pro Minute um ein paar Millimeter herunterging, mit anderen Worten, dass der Druck höchstens um ein paar Zehntel Atmosphäre per Minute sich änderte. Wollte man den oberen Theil der Curve studiren, so wurde der Hahn v' fest zugemacht und der Pumpengang verlangsamt, ja sogar eine Pumpe ausgeschaltet. Genügte dies nicht, so wurde das Gas langsam aus der Flasche a zugelassen. Es versteht sich von selbst, dass nur denjenigen Bestimmungen Zutrauen geschenkt wurde, bei welchen das Aethylenniveau hoch über dem Niveau des verflüssigten Gases stand.

Der Verlauf des Versuches wurde gleichzeitig von 4 Beobachtern verfolgt, während der Gehülfe die ausgerufenen Zahlen notirte. Während ich dicht am Apparate sitzend die Vorgänge in der Röhre r beobachte und den Commutator umlegte, las Hr. Novak auf ein von mir durch die Glocke gegebenes Zeichen den Galvanometer und Hr. Kosminski das Manometer ab, während Hr. Aleksandrowicz den Druck regulirte.

Jede Ablesung am Galvanometer wurde mit zwei nächstfolgenden combinirt und daraus der Ausschlag berechnet. Um einen Begriff von dem Gange der Beobachtung zu geben, schreibe ich hier den Anfang des Protocolls eines Versuches aus. Dazu wähle ich

Versuche mit Stickstoff.

Stickstoff wurde aus atmosphärischer Luft mit Hülfe von in Glühhitze erhaltenen Kupferspähnen bereitet. Die ersten Versuche lieferten viel höhere Drucke als die in dieser Abhandlung mitgetheilten, bis mich eine Bemerkung Jolly's[1]) belehrte, dass die Fehlerquelle in dem durch die Kupferspähne absorbirten Wasserstoffgase lag. Diese Fehlerquelle wurde beseitigt und das Gas wurde zuerst nur in die dritte (in der Figur nicht angegebene) und zweite Flasche des Condensationsapparates gepumpt, in welche man frisch ge-

1) v. Jolly, Wied. Ann. 6. p. 529. 1879.

trocknetes, noch heisses Chlorcalcium vorher hineingelegt hatte. Nachdem das Gas die übrig gebliebene etwaige Feuchtigkeit dort zurückgelassen hatte, wurde es in die erste Flasche *a* geleitet, welche Natrium in Stücken enthielt. Dort konnte es die etwaigen Spuren von Sauerstoff abgeben.

Aus dem nachfolgenden Anfang des Protocolls eines Versuches kann man sich eine genaue Vorstellung von der ganzen Methode verschaffen.

Ablesung am Galvanometer in cm	Der aus 3 Ablesungen berechnete Ausschlag in cm	Der mittlere Ausschlag in cm	Entsprechende Temperatur in Graden Celsius	Ablesung am Manometer in cm	Entsprechender Druck in Atmosphären	Der mittlere Druck in Atmosphären
59,54				52,10	30,84	
13,25	23,135			52,05	30,80	
59,50	23,133			52,00	30,76	
13,22	23,143	23,143	−147,2	51,95	30,71	30,704
59,51	23,15			51,90	30,65	
13,20	23,153			51,84	30,60	
59,50	23,155			51,78	30,53	
13,18	23,165			51,72	30,47	
59,52	23,165	23,161	−147,4	51,66	30,40	30,408
13,20	23,16			51,60	30,34	
59,52	23,16			51,54	30,30	
13,20	23,168			51,49	30,23	
59,55	23,17			51,42	30,17	
13,22	23,163	23,175	−147,5	51,35	30,09	30,102
59,54	23,178			51,30	30,03	
13,15	23,198			51,24	29,99	

u. s. w.

Von den nachfolgenden Zahlen bildet eine jede — mit Ausnahme der Zahlen, welche den kritischen Zustand charakterisiren — den Mittelwerth aus zehn nacheinander folgenden Ablesungen — wo nicht das Entgegengesetzte bemerkt ist — bei sehr langsam sinkendem Drucke. Der horizontale Strich zwischen den Zahlen bedeutet, dass der Versuch an dieser Stelle entweder unterbrochen, oder dass eine neue Flüssigkeitsmenge zur Beobachtung genommen wurde, oder auch dass die neue Reihe von einem anderen Beobachtungstage herrührt.

Kritischer Zustand.

Hat man das Gas bei etwa -146^0 verflüssigt und dann durch den höheren Gasdruck die Flüssigkeit unsichtbar

gemacht, so wird bei sehr langsamer Abnahme des Druckes der Meniscus sichtbar bei der Temperatur von $-146,25$ bis $-146,45^0$ und unter dem Druck von 32,29 bis 32,73 Atmosphären. Beim Hinzulassen des Gases wird der Meniscus undeutlich bei den Drucken von 33 bis 34 Atmosphären. Man erkennt aber das Vorhandensein der Flüssigkeit noch unter dem Drucke von 35 Atmosphären. Die Temperatur steigt dann bis $-145,5^0$.

In den folgenden Tabellen bezeichnet θ die Temperatur, d den Druck in Atmosphären.

Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes.

θ	d	θ	d	θ	d	θ	d
−146,35	32,08	−146,85	31,47	−150,9	24,896	−154,85	18,573
		147,3	30,556	151,01	24,465	155,04	18,193
−146,45	32,40	147,67	29,945	151,2	23,578		
146,55	32,28	148,02	29,322	151,55	23,217	−157,675	15,46[1]
146,5	32,14	148,205	28,657			158,125	15,26
146,7	31,98	148,91	27,465	−151,79	23,087	158,85	14,93
		149,15	26,867	151,925	22,877	159,61	14,48
−146,81	31,25					150,22	14,09
147,0	30,905	−149,925	26,414	−153,24	21,462		
147,45	30,59	150,05	25,93	153,46	21,103	−157,54	15,395[2]
147,65	30,305	150,4	25,093	153,67	20,672	158,57	15,00
147,72	30,025			153,95	19,521	159,51	14,605
				154,15	19,027	160,06	14,07
				154,35	18,693		

Die Zahlen für Spannkräfte, welche man beim aufsteigenden Drucke erhält, das heisst wenn die Flüssigkeit wärmer wird, sind ein wenig grösser, wie man es aus der nachfolgenden Reihe sieht:

θ	−147,5	147,45	147,35	147,2
d	30,845	30,945	31,04	31,145.

Bei einem Versuche konnte die Auflösung der Flüssigkeit in Gas sehr scharf beobachtet werden. Die Flüssigkeit wurde unweit unterhalb -146^0 erhalten und dann durch Verlangsamung des Ganges der Pumpen und Hinzulassung des Gases immer wärmer gemacht. Nachdem das Galvanometer $-145,2^0$ und das Manometer 33,7 Atmosphären zeigten und die Flüssigkeit nur durch die Lichtbrechung erkannt werden konnte, wurde der Hahn v' so gelassen, dass der Druck ganz

1) Beobachtungen beim ansteigenden Druck.
2) Ebenso.

langsam abnahm, während die Temperatur der Flüssigkeit infolge der erwärmenden Einwirkung des Aethylens noch immer stieg. Nun wurde beobachtet:

θ	$-145{,}2$	145,15	144,9° C.	
d	33,67	33,62	33,55	33,47.

Von der Flüssigkeit sah man dann nichts. Einen Augenblick nachher ging durch den Theil der Röhre, welcher die Flüssigkeit enthielt, ein Schimmer, der Meniscus wurde deutlich, das Niveau der Flüssigkeit sank tief hinunter, indem der grösste Theil in eine dicke Dampfwolke verwandelt wurde. Das Manometer zeigte 33,33 Atmosphären. Die ganze Umwandlung vollzog sich also ohne Druckänderung. Sofort begonnene Bestimmungen zeigten, dass die Temperatur des übrig gebliebenen Restes der Flüssigkeit sank, und man beobachtete weiter:

θ	$-145{,}2$	145,1	145,2	145,25	145,3	145,55	145,85° C.
d	33,3	33,28	33,27	33,25	33,24	33,21	33,34

bis zuletzt gleich nach der letzten Ablesung alle Flüssigkeit verdampft war.

Die kleinen Abweichungen zwischen den einzelnen Versuchen werden wohl ihren Grund — abgesehen von der eventuellen ungleichen Verunreinigung des Gases — in dem Umstande finden, dass man nicht immer mit einer gleich grossen Menge der Flüssigkeit zu thun hat und dass demzufolge die Druckänderung und die Aenderung der Temperatur nicht immer mit der gleichen Geschwindigkeit vor sich gehen. Die definitive Feststellung der Spannkraftscurve muss deshalb einer künftigen Untersuchung vorbehalten werden.

Versuche mit Kohlenoxyd.

Das Kohlenoxyd wurde durch Erhitzen von Ameisensäure mit concentrirter Schwefelsäure erhalten. Dieses Gas verflüssigt sich leichter als der Stickstoff.

Der kritische Zustand.

Bei sehr langsamer Abnahme des Druckes wurde der Meniscus sichtbar bei $-141{,}1^{0}$ und unter dem Drucke von 34,6 bis 35,2 Atmosphären. Beim Hinzulassen des Gases konnte die Flüssigkeit durch Lichtbrechung erkannt werden

und verschwand zuletzt unter dem Drucke von 39 Atmosphären, wobei das Galvanometer $-140{,}2^{0}$ zeigte.

Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes.

θ	d	θ	d	θ	d	θ	d
−141,26	34,42	−146,08	26,55	−150,85	19,98	−155,80	15,54
141,53	33,67	146,53	25,12	151,15	19,74	156,31	15,19
142,1	32,97	147,50	24,1	151,29	19,39	156,58	14,83
142,62	32,00	147,73	23,58	151,6	18,91	156,78	14,65
143,2	31,31	148,25	22,97	151,95	18,6	157,43	14,38
143,55	30,63	148,63	22,38			157,96	13,95
143,87	29,99	149,1	21,92			158,23	13,47
144,47	29,27	149,25	21,6	−154,73	16,21	159,15	13,14
145,17	28,09	149,63	20,84	154,84	16,12	159,7	12,80
145,55	27,42	150,03	20,80	155,10	15,87		
		150,38	20,48	155,35	15,70		

Das Kohlenoxyd siedet unter dem atmosphärischen Druck bei -190^{0} C.

Versuche mit Sauerstoff.

Die exacte Ermittelung der Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes beim Sauerstoff ist mit viel grösseren Schwierigkeiten als diejenige des Stickstoffs verbunden, da man reinen Sauerstoff viel schwieriger als reinen Stickstoff erhält. Denn der Sauerstoff wird durch die Spuren der Luft, welche im Wasser des Gasometers bleiben, und durch eventuelle undichte Verschlüsse viel mehr als der Stickstoff verunreinigt. Durch diese Verunreinigung wird die Spannkraft des Dampfes erhöht. Aus diesem Grunde ist auch der Siedepunkt des Sauerstoffs unter dem atmosphärischen Drucke viel grösseren Schwankungen als derjenige des Stickstoffs unterworfen und eignet sich viel weniger zur Vornahme der Calibrirung eines Thermoelementes als derjenige des Stickstoffs. Verflüssigt man den durch die Luft auf ungleiche Weise verunreinigten Sauerstoff, so erhält man eine ganze Reihe von Curven, die umsomehr sich derjenigen der Luft nähern, je unreiner das Gas ist.

Die nachstehenden Zahlen beziehen sich auf den Theil der Curve zwischen $-123{,}7$ und $-145{,}89^{0}$ C. Den übrigen Theil werde ich demnächst in einem Nachtrag zu dieser Abhandlung veröffentlichen.

Der kritische Druck beim Sauerstoff liegt, wie ich bereits früher angegeben habe, bei 50 Atmosphären, die kritische Temperatur in der Nähe von -118^0.[1])

Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes.

θ	d	θ	d	θ	d	θ	d
−123,7	43,5	−129,0	36,61	−133,2	31,675	−142,48	19,97
124,3	42,4	129,2	36,22	134,1	30,51	142,97	19,39
124,85	41,47	129,3	35,91	135,1	29,46	143,27	19.10
125,2	41,15	129,5	35,55	135,85	28,395	143,85	18,61
125,4	40,75	129,8	35,28	136,8	27,35	144,17	18,22
125,55	40,34	130,1	34,86	137,65	26,45	144,4	17,98
125,9	39,91	130,05	34,65	138,15	25,65	144,63	17,74
126,3	39,41	130,8	34,32	138,7	25,04	144,97	17,38
126,8	39,09	131,1	34,07			145,2	17,20
127,1	38,68	131,45	33,75	140,46	23,28	145,3	17,02
127,5	38,25	131,7	33,49	140,69	22,09	145,52	16,83
127,85	37,94	131,8	33,19	141,17	21,21	145,72	16,62
128,0	37,53	132,0	32,94	141,58	20,63	145,89	16,37
128,6	37,03	132,3	32,65				
		132,6	32,4				

Der Sauerstoff siedet unter dem atmosphärischen Druck (beim Barometerstand = 74 cm) bei $-181,5^0$ C.

In Bezug auf die Siedetemperatur der permanenten Gase unter dem atmosphärischen Druck ist dieselbe Bemerkung zu machen, welche ich in Bezug auf das Aethylen bereits gemacht habe.[2]) Hat man nämlich das verflüssigte permanente Gas unter den atmosphärischen Druck gebracht, so ist die Siedetemperatur im ersten Augenblicke tiefer als im weiteren Verlaufe des Versuches.

Die hier angegebenen Siedetemperaturen beziehen sich immer auf das erste Stadium des Versuches.

1) v. Wroblewski, Compt. rend. **97.** p. 309—310. 1883. Ich habe dort die kritische Temperatur als erste Näherung zu -113^0 C. angegeben. Die Fehler der Bestimmung lag in dem bereits in Wied. Ann. **20.** p. 255. 1883 angegebenen Grunde, und zwar darin, dass das Wasserstoffthermometer ausserhalb des Verflüssigungsapparates im Aethylen sich befand. Mit demselben Fehler sind die dort mitgetheilten Verflüssigungsdrucke behaftet.

2) v. Wroblewski u. Olszewski, Wied. Ann. **20.** p. 251. 1883.

Das Verhalten der atmosphärischen Luft.

Bei der oberflächlichen Betrachtung verhält sich die atmosphärische Luft wie ein einfaches Gas. Ihr gesättigter Dampf scheint seine eigene Spannkraftscurve zu haben, die der Zusammensetzung der Luft entsprechend viel näher an die Curve des Stickstoffes als an diejenige des Sauerstoffes kommt und sich nur wenig von derjenigen des Kohlenoxydes unterscheidet. Die nähere Betrachtung zeigt aber, dass hier viel complicirtere Erscheinungen auftreten, deren Beschreibung ich mir für eine besondere Publication vorbehalte.

Unter dem atmosphärischen Druck siedet die Luft nicht so ruhig wie Sauerstoff und Stickstoff, und die rasche Aenderung der Siedetemperatur deutet darauf hin, dass die Flüssigkeit immer stickstoffärmer wird.

Dies sieht man am besten aus folgenden 2 Versuchen. w_1 ist die Ablesung am Galvanometer in Centimetern und w der aus 3 Ablesungen berechnete Ausschlag in Centimetern. Barometerstand = 74,11 cm.

Erster Versuch			Zweiter Versuch		
w_1	w	θ	w_1	w	θ
11,70	—	—	11,60	—	—
67,42	27,79	−191,4	67,20	27,73	−190,8
11,98	27,69	190,4	11,90	27,62	189,7
67,30	27,68	190,3	67,10	27,57	189,2
12,08	27,61	189,6	12,00	27,54	188,9
67,30	27,59	189,4	67,06	27,50	188,5
12,18	27,54	188,9	12,10	27,47	188,15
67,22	27,52	188,7	67,04	27,47	188,15
12,18	27,52	188,7	12,10	27,47	188,15
67,22	27,51	188,6	67,04	27,47	188,15
12,22	27,49	188,4	12,10	27,46	188,05
67,18	27,47	188,2	67,00	—	—
12,25	27,45	188,0			
67,10	27,40	187,45			
12,35	27,37	187,1			
67,08	—	—			

Ist die Luft nicht kohlensäurefrei, oder haben sich beim vorhergehenden Verdampfen der Luft die Kohlensäurekrystalle auf dem Boden der Verflüssigungsröhre gebildet, so schäumt die flüssige Luft unter dem atmosphärischen Druck ganz gewaltig und wird infolge der in der ganzen Flüssigkeit stattfindenden Schaumbildung vollständig undurchsichtig.

§ 8. Die Erscheinungen im Vacuum. Erstarrbarkeit der Gase. Die Grenze für die Brauchbarkeit des Wasserstoffthermometers.

Lässt man die permanenten Gase unter der Luftpumpe verdampfen, so sinkt ihre Siedetemperatur — wie ich bereits früher gezeigt habe[1]) — unter −200° C. Zu diesem Zwecke wird zuerst das Luftmanometer o abgesperrt, und dann der kleine Hahn v' mit dem Dreiweghahn w' durch ein weites Bleirohr verbunden. Durch die passende Stellung des Hahnes w' wird die zweite Bianchi'sche Pumpe von dem Apparate mit dem Aethylen getrennt.

Während auf diese Weise die erste Pumpe immer das Aethylen verdampft, kann die zweite zum Verdampfen des permanenten Gases benutzt werden. Man hat dazu nur den Hahn v' vorsichtig aufzumachen. Nach einigen Pumpenumdrehungen sinkt die Spannkraft des permanenten Gases auf ein paar Centimeter Quecksilberdruck. Zur Messung dieses Druckes dient das zweite kleine Manometer x', welches ganz nahe am Apparate angebracht ist.

Folgende Tabelle, in welcher d — ebenso wie in allen Tabellen des § 8 — die Spannkraft in Centimetern Quecksilberdruck bedeutet, enthält:

Versuche mit Sauerstoff.

d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
74,0	−181,5	7,8	−192,13	5,9	−195,13	4,0	−197,7
16,0	190,0	7,7	192,3	5,8	195,3	3,8	198,0
14,0	190,05	7,6	192,31	5,6	195,44	3,6	198,3
10,0	190,5	7,4	192,53	5,4	195,5	3,2	198,7
9,0	190,8	7,1	192,71	5,2	196,0	3,0	198,7
8,6	191,35	6,8	193,1	5,0	196,2	2,8	199,25
8,4	191,6	6,4	193,58	4,7	196,3	2,6	199,4
8,2	191,88	6,2	194,2	4,4	196,6	2,2	199,95
8,0	191,98	6,0	194,4	4,2	197,5	2,0	200,4

Das Gas bis zu diesen Verdünnungen behält den flüssigen Zustand und bleibt, sofern es durch Kohlensäure nicht verunreinigt ist — durchsichtig. Das lebhafte Sieden und Blasenbilden hört bei sehr niedrigen Drucken ganz auf, und die Flüssigkeit verbleibt ganz ruhig. Es unterliegt keinem Zweifel, dass bei weiterer Evacuirung die Temperatur des Sauerstoffes noch um ein paar Grad sinken wird.

1) v. Wroblewski, Compt. rend. **98.** p. 985. 1884.

Diese Versuche schliessen nicht die Möglichkeit der von Pictet behaupteten Erstarrbarkeit des Sauerstoffs aus.[1])

Folgende Tabelle enthält die Resultate der

Versuche mit Stickstoff.

d	74,0	12,0	10,0	8,0	7,0	6,0	4,2
θ	−193	201	201,25	101,7	202,5	204	206° C.

Bei dem Drucke von 7 bis 6 cm und bei der Temperatur von etwa −203° C. erfolgt die Erstarrung des Stickstoffs. Die Erstarrung geht nicht immer auf eine und dieselbe Weise vor sich. Manchmal bilden sich zuerst auf der Oberfläche der Flüssigkeit die Krystalle, welche gleich nach dem Boden der Röhre herunter sinken. Ein anderes mal bildet sich auf der Oberfläche auf einmal eine feste Kruste, während der Stickstoff unterhalb dieser Kruste noch flüssig bleibt. Beim weiteren Evacuiren wird die Kruste durch den Dampfdruck von unten zerrissen und die übrig gebliebene Flüssigkeit zerspritzt.[2])

Noch leichter lässt sich das Kohlenoxyd durch Evacuiren zum Erstarren bringen. Die nachstehende Tabelle gibt eine Uebersicht der Erscheinungen.

Versuche mit Kohlenoxyd.

d	73,5	16,0	14,0	12,0	11,2	10,0	6,0	4,0
θ	−190	197,5	198,4	198,5	198,75	198,83	201,5	201,6

Vor dem Erstarren wird das Kohlenoxyd zähe, dickflüssig und trüb. Bei dem Druck von 10 bis 9 cm und bei

---

1) Pictet, Ann. de chim. et de phys. (5) **13.** p. 214. 1878.

2) Die Stickstoffkrystalle habe ich früher bei einer anderen Gelegenheit beobachtet. Der Stickstoff wurde in einer sehr dünnwandigen engen Glasröhre dem Drucke von 215 Atmosphären ausgesetzt und durch die Sauerstoffexpansion abgekühlt. In dem Augenblicke, wo die Verflüssigung vor sich ging, wurde er plötzlich vom Drucke befreit. Ein Theil Stickstoff wurde dabei fest. Die herabfallenden Krystalle konnte ich nicht für Wasserdampfkrystalle halten, da die charakteristische Form des sechsseitigen Sternes fehlte. Bei der Wiederholung des Versuchs ging der Apparat durch Explosion in Trümmer. Ich habe diese Versuche der hohen Gefährlichkeit wegen nicht weiter fortgesetzt, um so mehr, als durch andere Versuche die Erstarrbarkeit des Stickstoffs ausser Zweifel gestellt wurde.

der Temperatur von etwa —199° C. erfolgt die Erstarrung dadurch, dass sich zuerst eine feste Kruste auf der Oberfläche der Flüssigkeit bildet. Dann wird die Kruste zerrissen, die ganze Flüssigkeit zerspritzt und in einen Haufen von Krystallen verwandelt. Trennt man jetzt den Apparat von der Pumpe, und lässt man das gasförmige Kohlenoxyd ein, so schmelzen die Krystalle.

Es ist im höchsten Grade interessant, dass das Wasserstoffthermometer, dessen Angaben mit denjenigen des gewählten thermoelectrischen Elements bis —193° C. übereinstimmen, hier bereits abzuweichen beginnt. Misst man die Erstarrungstemperaturen des Stickstoffs und Kohlenoxyds mit dem Wasserstoffthermometer, so erhält man viel niedrigere Werthe. Dieser Umstand deutet darauf hin, dass man sich hier der Verflüssigungstemperatur des Wasserstoffs nähert. Das die Thermometerkugel ausfüllende Gas zieht sich stärker zusammen, als es die auf dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze basirte Thermometergleichung voraussetzt.

Der directe Versuch bestätigt diese Folgerung.

Die auf die Ueberführung des Wasserstoffs in den flüssigen Zustand bezüglichen Versuche durch Anwendung des Sauerstoffs und Stickstoffs als Kältemittel, wie auch die zur Ermittelung der Siedetemperatur des flüssigen Wasserstoffs angestellten Versuche werde ich in einer besonderen Abhandlung publiciren und die dazu construirten Apparate beschreiben.

§ 9. Schlussbemerkungen. Die Methoden der Zukunft.

Ich erlaube mir noch ein paar Bemerkungen.

Die in dieser Abhandlung beschriebenen Methoden sollen den Ausgangspunkt für eine Reihe von Untersuchungen auf dem Gebiete der Physik und Chemie bilden. Die Erscheinungen, mit welchen sich diese beiden Zweige der Naturwissenschaften beschäftigen, sind bis jetzt nur bei gewöhnlichen oder in einzelnen Fällen bei sehr hohen Temperaturen studirt worden. Es eröffnet sich jetzt für die Forschung die Möglichkeit, die meisten dieser Erscheinungen bei niedrigen

Temperaturen zu studiren. Und während die Temperaturscala nach oben uns vorläufig keine Einschränkung bietet, eröffnet sich hier nach unten die Möglichkeit, die Erscheinungen bis zu einem Stadium studiren zu können, welches durch die Natur der Stoffe, aus welchen unsere Erdkugel besteht, eine Grenze für unsere Wissenschaft bildet. In dieser Richtung kann also unser Wissen bis zu einem abgeschlossenen Ganzen gebracht werden. Denn über das Temperaturminimum, welches mit Hülfe des siedenden Wasserstoffes erreicht werden kann, werden wir nie herunterkommen können.

Die in dieser Abhandlung beschriebenen Methoden sind aus der Nothwendigkeit entsprungen, das ganze Gebiet zuerst mit möglichst geringen Mitteln abzusuchen, um erst nach der Feststellung des Sachverhaltes die Versuche in grösserem Maassstabe durchführen zu können. Diese Methoden reichen, wie gesagt, vollständig aus, um eine Menge von Erscheinungen zu untersuchen. Sie sind aber nicht die Methoden der Zukunft. Sie sind noch viel zu complicirt und an eine Reihe von einschränkenden Bedingungen gebunden. Der in dieser Abhandlung beschriebene Apparat gestattet, unter der Luftpumpe ein paar Cubikcentimeter Sauerstoff eine Viertelstunde lang oder Stickstoff minutenlang zu haben. Durch passende Wahl von Glasröhren wird man diese Menge vielleicht um noch ein paar Cubikcentimeter vergrössern können. Aber weiter kommt man sicher in dieser Hinsicht nicht.

Im ersten Augenblicke scheint es, dass man einen Schritt vorwärts würde machen können, wenn man das Aethylen durch Sumpfgas ersetzen könnte. Die Siedetemperatur des Sumpfgases unter dem atmosphärischen Druck beträgt nach meinen Messungen -155 bis -160^0 C. Könnte man dieses Gas in so grossen Mengen wie das Aethylen flüssig erhalten, so würde man bedeutend weitere Röhren für Sauerstoff oder Stickstoff nehmen können, ohne die Gefahr des Zerspringens der Röhre zu befürchten. Leider ist die Darstellung des Sumpfgases aus Zinkmethyl viel zu theuer, und die Darstellung aus essigsaurem Natron und Natronkalk liefert für Verflüssigungszwecke viel zu unreines Gas. Solange neue

und billigere Methoden, das vollständig reine Sumpfgas zu liefern, nicht gefunden worden sind, kann keine Rede von Versuchen in grösserem Maassstabe mit diesem Gase sein. Dazu darf nicht vergessen werden, dass zur Verflüssigung des Sumpfgases das flüssige Aethylen oder wenigstens die im Vacuum verdampfende Kohlensäure nöthig ist. Das Verfahren wird deshalb nicht einfacher, sondern noch complicirter.[1])

Der wesentliche Schritt vorwärts, welcher in Hinsicht der Erweiterung der Methode zu thun wäre, ist, sie soweit abzuändern, dass man im Stande wäre, den Sauerstoff so zu giessen, wie man heutzutage das Aethylen giesst. Dass der Sauerstoff gegossen werden kann, dafür sprechen sowohl die Versuche von Pictet, wie die meinigen, die ich in dieser Richtung bis jetzt allerdings nur in allerkleinstem Maassstabe durchführen konnte, und die ich bei einer anderen Gelegenheit beschreiben werde.

Die Sache wird aber meiner Ueberzeugung nach nur dann mit Erfolg durchzuführen sein, wenn man zu den Pictet'schen Methoden zurückkommen wird, d. h., wenn man continuirlich wirkende Apparate benutzen und durch den Kreislauf von mehreren verflüssigten Gasen eine Cascade von den Temperaturen herstellen wird, von denen die letzte Stufe der Strom des flüssigen Sauerstoffes bildet.

Phys. Inst. d. Univ. Krakau.

---

1) Daher kann ich der Empfehlung dieses Mittels durch Cailletet (Compt. rend. **98.** p. 1565. 1884) nicht beipflichten, worauf ich in der demnächst zu publicirenden Abhandlung über die Eigenschaften des flüssigen Sumpfgases zurückkommen werde. Die von Hrn. Cailletet hieran geknüpften Angriffe (Compt. rend. **99.** p. 213. 1884), sowie die Bemerkungen des Hrn. Jamin (Revue des deux Mondes vom 1. Sept. 1884) habe ich in meiner Schrift: „Comment l'air a été liquéfié. Reponse à l'article de M. J. Jamin par M. S. de Wroblewski. Paris. Librairie du Luxembourg. 1885" beantwortet.

IV. *Verdünnungswärme und Wärmecapacität von Salzlösungen; von Leo Arons.*

In der folgenden kleinen Mittheilung sind Ueberlegungen enthalten, die sich darbieten, wenn man die von Kirchhoff und v. Helmholtz abgeleiteten theoretischen Formeln für das Verhalten wässeriger Salzlösungen bei weiterer Verdünnung mit den vorliegenden Versuchsdaten vergleicht.

Kirchhoff[1]) hat aus dem Begriff der Wirkungsfunction Formeln sowohl für die bei Lösung von Salzen in Wasser sich entwickelnde Wärmemenge, als auch für die Wärmecapacität solcher Lösungen aufgestellt. Er hat die erstere in einer späteren Arbeit[2]) zu verificiren gesucht, indem er aus Thomsen's Beobachtungen über die Verdünnungswärme von H_2SO_4-Lösungen mit Hülfe seiner Formel die Dampfspannungen über solchen Lösungen berechnete und sie mit den von Regnault gemessenen verglich; freilich musste er eine in die Rechnung eingehende Constante für jede Concentration aus einer der Regnault'schen Beobachtungen berechnen. Gegen dieses Verfahren protestirte Wüllner[3]), der auch darauf aufmerksam machte, dass nach den von ihm aufgestellten empirischen Formeln für die Dampfspannungen über Salzlösungen Kirchhoff's Formel mit den Erscheinungen in Widerspruch stehe.

Die nämliche Formel hat v. Helmholtz[4]) aus dem Begriff der freien Energie abgeleitet, indem er darauf hinweist, dass es vielleicht möglich sei, aus den Verdünnungswärmen auf die Dampfspannungsänderungen mit der Temperatur Rückschlüsse zu machen.

Hr. Geheimrath v. Helmholtz veranlasste mich nun im Sommer 1883, in dem ich unter seiner gütigen Leitung arbeitete, dieser Frage näher zu treten.

Wir werden uns im Verlauf der Untersuchung auf eine

1) Kirchhoff, Abh. p. 454; Pogg. Ann. **103.** p. 177. 1858.

2) Kirchhoff, Abh. p. 485; Pogg. Ann. **104.** p. 612. 1858.

3) Wüllner, Pogg. Ann. **104.** p. 478. 1858.

4) v. Helmholtz, Berl. Monatsber. Juli 1882. p. 496. Gesammelte Abh. **2.** p. 987.

Reihe empirischer physikalischer Gesetze zu stützen haben und durch die Rechnung auf Schlüsse bezüglich ihrer Genauigkeit geführt werden.

Wir bedürfen zunächst der Kenntniss der Spannungsänderungen des gesättigten Wasserdampfes mit der Temperatur. Es ist bisher nicht gelungen, aus den so gut übereinstimmenden Messungen von Regnault und Magnus eine Formel für diese Grösse aufzustellen, die allen Anforderungen genügte. Wir entnehmen deshalb die Werthe der Differentialquotienten $\partial P/\partial \vartheta$ und $\partial^2 P/\partial \vartheta^2$ aus einer durch Interpolation von Grad zu Grad aufgestellten Tabelle, wie wir sie z. B. bei Clausius[1]) finden. Wir werden gelegentlich der Berechnung der Wärmecapacitäten von Salzlösungen sehen, dass für dieselben der Werth von $\partial^2 P/\partial \vartheta^2$ nicht hinlänglich genau feststeht, um Willkürlichkeit bei der Berechnung auszuschliessen. Wir bedürfen ferner eines Gesetzes für die Aenderung der Dampfspannung über Salzlösungen. Ein solches hat zunächst von Babo[2]) aufgestellt. Sein Gesetz bezieht sich auf die Aenderung der Dampfspannung mit der Temperatur, und er findet, dass für eine Reihe von Salzlösungen $p = AP$ ist, wenn P und p die Dampfspannungen über reinem Wasser und der Salzlösung bei gleicher Temperatur bezeichnen; A ist eine Constante. Mit diesem Gesetz kommen wir für die Berechnung der Wärmecapacitäten von Salzlösungen aus; für die Verdünnungswärme bedürfen wir eines anderen Gesetzes, welches die Constante A als Function der Concentration der Lösung angibt. Ein solches hat Wüllner[3]) aufgestellt, der aber gleichzeitig fand, dass nicht alle Salzlösungen dem Babo'schen Gesetz gehorchen. Die allgemeinste Form des Wüllner'schen Gesetzes lautet:

$$(1) \qquad P - p = amP + bmP^2.$$

Hierin haben P und p die nämliche Bedeutung wie oben, a und b sind Constanten (b kann auch negativ sein), m ist gleich $100s/w$ zu setzen, worin s und w die Gewichte des in

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie. p. 307. 1876.
2) von Babo, Ber. d. Freib. Naturf. 17 u. 18.
3) Wüllner, Pogg. Ann. **103.** p. 529. 1858.

der Lösung enthaltenen Salzes und Wassers bezeichnen. Ist $b = 0$, so erhalten wir das Babo'sche Gesetz, indem wir schreiben:
$$p = (1 - am) P.$$

Endlich haben sowohl Kirchhoff als v. Helmholtz für den Wasserdampf von niedriger Spannung das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz bis zur Maximalspannung als gültig angenommen. Es wird sich zunächst zeigen, dass die so erhaltene Formel von vornherein im Gegensatz zu den von Babo und Wüllner aufgestellten Gesetzen steht; ich habe deshalb auf Veranlassung des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz die weiteren Rechnungen mit einer Formel ausgeführt, die man erhält, wenn man statt des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes eine von Clausius[1]) aufgestellte Beziehung in die Ableitung einführt. Die ursprüngliche Formel von v. Helmholtz für die Verdünnungswärme lautet:

$$W = - R \vartheta^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log \frac{P}{p}, \tag{2}$$

worin W die Wärmetönung beim Zusatz der Wassermenge 1 zu einer Salzlösung, über welcher der Druck p herrscht, bezeichnet, und R die Constante des Gasgesetzes ist. Nun hat Wüllner für NaCl und Na_2SO_4 das Babo'sche Gesetz bestätigt gefunden; demnach ist P/p eine Constante, und die Wärmetönung bei der Verdünnung müsste Null sein, während Thomsen[2]) eine solche gemessen hat. Aber auch für die Salze, bei denen Wüllner Abweichung vom Babo'schen Gesetz gefunden hat, stimmen die zu berechnenden Werthe mit den gemessenen nicht überein. Wir erhalten aus Formel (1):

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log \frac{P}{p} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \frac{100\, s b}{w - 100 s a - 100 s b P}.$$

Wollen wir die Wärmemenge berechnen, die sich bei der Verdünnung einer Lösung von s g $NaNO_3$ in w_1 g Wasser auf eine solche in w_2 g Wasser ergibt, so erhalten wir:

$$Q = - \frac{R}{k} \vartheta^2 \frac{\partial P}{\partial \vartheta} 100\, s b \log_{10} \frac{w_2 - 100\, a s - 100\, b s P}{w_1 - 100\, a s - 100\, b s P} \cdot \frac{1}{\log_{10} e}, \tag{3}$$

1) Clausius, Wied. Ann. **14.** p. 703. 1881.
2) Thomsen, Thermochem. Unters. **3.** p. 87 u. 108.

worin k das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Wendet man diese Formel auf die Thomsen'schen Versuche[1]) an, so hat man folgende numerische Einsetzungen zu machen:

$R = 47{,}05$ (nach Clausius[2]) von der Dimension eines Meters.[3])

$\vartheta = 291^0$ entsprechend der Durchschnittstemperatur von 18^0 bei Thomsen.

$$\left.\begin{aligned} P &= 15{,}36 \text{ mm} \\ \frac{\partial P}{\partial \vartheta} &= 0{,}962 \end{aligned}\right\} \text{nach Clausius.}^{4)}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 0{,}00315 \\ b &= 0{,}000\,000\,907 \end{aligned}\right\} \text{nach Wüllner.}$$

$s = 85$ g und für die w nacheinander

$w = 108,\ 450,\ 900,\ 1800,\ 3600$ g.

Die Bestimmung von P und $\partial P / \partial \vartheta$ nach Quecksilberhöhen ist in Uebereinstimmung mit den Dimensionen der Wüllner'schen Constanten; auf das Resultat hat diese Ausdrucksweise keinen Einfluss.

k ist für die Verwandlung von Grammmetern in Grammcalorien gleich 424 zu setzen. Die folgende Tabelle ist aus Thomsen entnommen, die eingeklammerten Werthe geben die nach (3) berechneten entsprechenden Grössen. Bei Thomsen sind die Concentrationsverhältnisse in Molecülen gegeben.

$w_2 =$	450	900	1800	3600
$w_1 = 108$	−1131 (− 115)	−1644 (− 166)	−1930 (− 215)	−2096 (− 264)
450	—	− 513 (− 50,9)	− 799 (− 99,9)	− 965 (− 149)
900	—	—	− 286 (− 49,4)	− 452 (− 98,2)
1800	—	—	—	− 166 (− 48,8)

Wie man sieht, sind die Zahlen gar nicht vergleichbar; der berechnete Werth schwankt von $^1/_{10}$ des beobachteten für die ersten bis fast zu $^1/_3$ für die letzten Zahlen.

1) Thomsen, l. c. p. 97.
2) Clausius, Wied. Ann. 14. p. 203. 1881.
3) Herwig, absolut. Maass. p. 47.
4) Clausius, Mech. Wärmeth. p. 305.

Hr. Geheimrath v. Helmholtz veranlasste mich nun, zu untersuchen, ob vielleicht die Einführung einer von Clausius[1]) aufgestellten Beziehung an Stelle des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes in die Ableitung der Formel eine bessere Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch biete. Die Clausius'sche Formel heisst:

$$\frac{p}{R\vartheta} = \frac{1}{v-\alpha} - \frac{A\vartheta^{-n} - B}{(v+\beta)^2}, \quad \text{worin}$$

$$R = 47{,}05, \qquad \alpha = 0{,}000\,754, \qquad \beta = 0{,}001\,315,$$
$$A = 45{,}17, \qquad n = 1{,}24, \qquad B = 0{,}00737,$$

zu setzen sind, wenn v in Cubikmetern, p in Kilogrammen ausgedrückt werden. Die hieraus für W resultirende Formel (entsprechend p. 410) lautet:

$$(2^*) \quad W = vp - VP - \vartheta\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta} v - \frac{\partial P}{\partial \vartheta} V\right) - R\vartheta^{(1-n)} nA\left(\frac{1}{v+\beta} - \frac{1}{V+\beta}\right).$$

Diese Formel widerspricht nicht mehr nothwendig dem Babo'schen Gesetz. Wollen wir sie aber numerisch prüfen, so müssen wir die Wüllner'sche Beziehung einführen, um integriren zu können. Die grösste Anzahl von Bestimmungen hat Thomsen[2]) für NaCl-Lösungen gemacht. Für NaCl ist nach Wüllner:

$$p = cP = (1 - 0{,}006\,m)P, \qquad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = c\frac{\partial P}{\partial \vartheta}.$$

Im letzten Glied, das ohnehin nur geringen Einfluss hat, vernachlässigen wir β gegen v und V und erhalten:

$$W = -\left(\vartheta\frac{\partial P}{\partial \vartheta} - P\right)(vc - V) + nRA\vartheta^{(1-n)}\frac{v-V}{vV}.$$

Für die Integration nach w ist c variabel als Function von m; ebenfalls als Function von w ist v auszudrücken. V könnte man aus den Clausius'schen Tafeln entnehmen, doch ist bei der niedrigen Temperatur (Thomsen stellte seine Versuche bei 25° an) die Interpolation zu ungenau. Ich habe aus der Clausius'schen Formel für eine Reihe von v das zugehörige p bei 25° berechnet und erhielt, indem ich mittelst der Wüllner'schen Beziehung von Ausdrücken in p zu solchen in m überging, für:

1) Clausius, Wied. Ann. 14. p. 703. 1881.
2) Thomsen, Thermochem. Unters. 1. p. 86.

$\vartheta = 298$

v	43,78 (= V)	45	46	48	50	52
m	0	4,65	8,17	14,77	20,88	26,44

s ist das Volumen von 1 kg in Cubikmetern ausgedrückt. Aus diesen Werthen berechnet sich:

$$v - V = 0{,}253\, m + 0{,}00217\, m^2;$$

die Gleichung liefert für die oben angegebenen v:

$v - V$					
(berechnet)	1,23	2,22	4,21	6,23	8,21
(gegeben)	1,22	2,22	4,22	6,22	8,22
$\varDelta$	+0,01	0	−0,01	+0,01	−0,01

Es ist ferner $c = 1 - (100 s/w).0{,}006$, und nach Clausius $\vartheta(\partial P/\partial\vartheta) - P = 394{,}45$ mm; wir erhalten hieraus einen Ausdruck in $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$, indem wir mit 13,596 multipliciren. Wählen wir für w und s die Ausdrücke in Grammen, so wird der Ausdruck für Q, welcher durch Integration von (2*) nach w entsteht in Grammmetern gegeben sein und durch Division mit 424 auf Grammcalorien zurückgeführt. Man erhält folgenden Ausdruck:

$$Q = 12{,}65\, s\left\{\log\frac{w_1}{w_0} - 6{,}5\, s\,\frac{w_1 - w_0}{w_1 w_0}\left(1 - s\,\frac{w_1 - w_0}{w_1 w_0}\right)\right\}$$

$$-0{,}03626\, s\left\{0{,}289\log\left[\frac{(w_1 + 0{,}289 s)^2 + 0{,}412\, s^2}{(w_0 + 0{,}289 s)^2 + 0{,}412\, s^2}\right] + 0{,}512 \operatorname{arc\,tg}\varphi\right\},$$

worin: $$\varphi = \frac{(w_1 - w_0)\,.\,0{,}642\, s}{(0{,}642\, s)^2 + (w_1 + 0{,}286\, s)(w_0 + 0{,}289\, s)}.$$

Für w_0 und w_1 setzen wir mit Thomsen:

$$w_0 = 458 \text{ g} \qquad w_1 = 908 \text{ g}.$$

Der erste Theil des Ausdrucks liefert für die von Thomsen bestimmten Lösungen (vgl. die Tabelle auf der folg. S.):

	−262	−260	−184	−108,5	−58,7
der zweite	− 2	− 1	− 0,4	− 0,2	− 0,1

Die Tabelle gibt unter s die Gramme Salz in der Lösung, unter c die von Thomsen gemessene Wärmetönung, unter c' die soeben berechnete.

Die Abweichungen zwischen c und c' sind nicht nur so gross, dass gegen sie die Unsicherheit der Thomsen'schen Zahlen (die z. B. bei 3 zwischen $c = -41$ bis $-49{,}5$ und bei 4 zwischen -4 und -7 schwanken) verschwindet, sondern der Verlauf der Werthe c und c' untereinander ist so

verschieden, dass er auf eine wesentlich andere Gestalt, sei es der Clausius'schen Formel, sei es des Wüllner'schen Gesetzes schliessen lässt.[1])

$t = 25$	s	c	c'
1	117	−408	−262
2	$^{117}/_{2}$	−165,5	−261
3	$^{117}/_{4}$	− 46,5	−184
4	$^{117}/_{8}$	− 5,4	−109
5	$^{117}/_{16}$	− 0,4	− 59

Wir bemerkten schon oben, dass die Formel (2*) nicht mehr dem Babo'schen Gesetz widerspricht, wie die Formel (2); doch reichte für die numerische Vergleichung die Babo'sche Beziehung nicht aus. Dagegen können wir mit ihrer Hülfe die von Kirchhoff für die Wärmecapacität von Salzlösungen abgeleitete Formel mit Thomsen's Messungen dieser Grösse vergleichen. Kirchhoff's Formel lautet:

$$C = c' + m\gamma - \frac{R}{k}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,\vartheta^2\int_0^m \partial x\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\frac{p}{\vartheta}\,.$$

Setzen wir mit Babo $p = aP$, so ergibt sich:

$$C = c' + m\left\{\gamma - \frac{R}{k}\frac{\vartheta^2}{P}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\vartheta^2} + 2\,\frac{1}{\vartheta}\,\frac{\partial P}{\partial\vartheta} - \frac{P}{\vartheta^2} - \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right)\right]^2\right\}.$$

Hierin bedeutet c' die specifische Wärme des festen Salzes, $\gamma = 0{,}364$ die specifische Wärme des hinreichend verdünnten Wasserdampfes bei constantem Volumen. R/k ist nach Kirchhoff 0,111; Thomsen's Versuche sind auf die Temperatur von 18° bezogen.

Gehen wir von den Gewichtsausdrücken in Grammen zu solchen in Moleculargewichten über, indem wir einführen:

$$m = n\,\frac{18}{M},$$

1) Davon, dass die Aenderungen des Flüssigkeitsvolumens, die bei Ableitung der Formel vernachlässigt sind, auf das Resultat keinen Einfluss haben, habe ich mich, obgleich es kaum nöthig erscheinen konnte, durch eine ausführliche Rechnung überzeugt.

worin M das Moleculargewicht des Salzes bedeutet, so erhalten wir:

$$C = c' + n\frac{18}{M}[\;],$$

und indem wir mit $\mathfrak{C} = MC$ die Wärmecapacität einer Lösung von 1 Molecül Salz in n Molecülen Wasser und mit $\mathfrak{c}'$ diejenige eines Molecüls des Salzes bezeichnen:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{c}' + 18n\left\{\gamma - 0,111\frac{\vartheta^2}{P}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{\vartheta}\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\cdot\frac{P}{\vartheta^2} - \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)\right]^2\right\}.$$

Hierin ist nach Clausius:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} = \begin{cases} 0,052 \text{ zwischen } 17 \text{ und } 18^0 \\ 0,055 \quad\text{,,}\quad 18 \quad\text{,,}\quad 19^0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{\vartheta}\frac{\partial P}{\partial \vartheta} = 0,0066, \qquad \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)^2 = 0,0603, \qquad \frac{P}{\vartheta^2} = 0,0002.$$

Der Werth des Coëfficienten von $0,111\,(\vartheta^2/P)$ wird, jenachdem man setzt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} = \begin{cases} 0,052 & -0,0019, \\ 0,055 & +0,0011, \end{cases}$$

diese beiden Werthe würden folgende Formeln liefern:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{c}' + n\,.\,1,527\,.\,18 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{c}' - n\,.\,0,309\,.\,18.$$

Letztere Formel würde $\mathfrak{C}$ negativ ergeben.

Man sieht hieraus, von welcher Bedeutung eine genaue Bestimmung von $\partial^2 P/\partial\vartheta^2$ ist. Ich habe umgekehrt aus Thomsen's Beobachtungen für Salpeterlösungen berechnet, welches der günstigste Werth von $\partial^2 P/\partial\vartheta^2$ ist und gefunden $\partial^2 P/\partial\vartheta^2 = 0,0529$, eine Zahl, die nach dem Verlauf der Werthe von $\partial^2 P/\partial\vartheta^2$ sehr gut als Mittelwerthe für $\partial^2 P/\partial\vartheta^2$ bei 18^0 passt. Wir erhalten daraus die Formel:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{c}' + 17,604\,n;$$

die nach dieser berechneten Werthe von $\mathfrak{C}$ für Salzlösungen können nicht sehr von den Werthen Thomsen's abweichen, der gefunden hat, dass die Wärmecapacitäten der Salzlösungen nicht sehr von derjenigen des in ihnen enthaltenen Wassers verschieden sind; letztere ist $18n$. In der folgenden Tabelle habe ich die nach unserer Formel berechneten Werthe von $\mathfrak{C}$ mit den von Thomsen gemessenen zusammengestellt.

Wesentlich ist, dass für sämmtliche Lösungen angenommen ist, sie gehorchten dem Babo'schen Gesetz, obgleich Wüllner für eine Reihe derselben eine diesem Gesetz widersprechende Formel aufstellen zu müssen glaubte.

KNO_3 (Molecularwärme $c = 23$).

n	$\mathfrak{C}$ beob.	berechn.	Δ
25	458.4	463	+ 5.4
50	902	903	+ 1
100	1791	1783	− 8
200	3575	3543	−32

NaCl ($c = 12.5$).

n	$\mathfrak{C}$ beob.	berechn.	Δ
10	188.5	188.5	0
20	361	364.5	+ 3.5
30	536	540.5	+ 4.5
50	892	892,5	0
100	1789	1772.5	−16.5
200	3578	3532.5	−36.5

KCl ($c' = 12.8$).

n	beob.	berechn.	Δ
15	262,4	276,8	+14,4
30	522.4	541	+19.4
50	881	893	+12
100	1775	1773	− 2
200	3565	3533	−32

$NaNO_3$ ($c' = 22$).

n	beob.	berechn.	Δ
10	203.8	198	− 5.8
25	461.7	462	+ 0.3
50	904	902	− 2
100	1791	1782	− 9
200	3593	3542	−51

Na_2CO_3 ($c' = 26$).

n	beob.	berechn.	Δ
50	901	906	+ 5
100	1778	1786	+ 8
200	3550	3546	− 4

Na_2SO_4 ($c' = 32.2$).

n	beob.	berechn.	Δ
65	1170	1176	+ 6
100	1787	1792	+ 5
200	3574	3552	−22

$MgSO_4$ ($c' = 27$).

n	beob.	berechn.	Δ
20	357	379	+22
50	874	907	+33
100	1761	1787	+26
200	3541	3547	+ 6

V. *Ueber die specifische Wärme stark concentrirter Natronlaugen; von Ad. Blümcke.*

(Aus dem phys. Laboratorium der Techn. Hochschule zu München.)

Im Anschluss an meine letzte Arbeit[1]): „Ueber die Abhängigkeit der spec. Wärme einiger Wasser-Aethylalkoholgemische von der Temperatur" unternahm ich es, die specifiche Wärme von Natronlaugen zu bestimmen, deren Gehalt an Aetznatron mehr als $50^0/_0$ beträgt, da die Kenntniss derselben für die theoretische Betrachtung der bei den Honigmann'schen Natronkesseln vor sich gehenden Processe von Interesse ist. Allerdings wurden von Guthermuth[2]) bereits mehrere Versuche gemacht, diese Grössen zu ermitteln, allein seine Resultate sind so schwankend, dass eine Wiederholung der Bestimmungen nicht ungerechtfertigt sein dürfte.

Die Lösungen wurden einestheils wie bei den früheren Versuchen in Glashüllen eingefüllt, dann in kleine Eisenfläschchen, welche durch eine gut eingepasste Schraube verschlossen wurden. Da die Lösungen bei niederer Temperatur auskrystallisiren, so mussten sie heiss eingefüllt werden, und zwar wurden die Eisenfläschchen und die an einer Seite bereits zugeschmolzenen Glashüllen an einem Eisendraht befestigt und in die Lösung eingetaucht, wobei ein Theil der in ihnen enthaltenen Luft entwich; dann wurden sie soweit herausgehoben, dass nur noch die nach unten gekehrte Oeffnung eintauchte. Indem sich nun die noch zurückgebliebene Luft beim Abkühlen zusammenzog, wurde ein Theil der Lösung eingesogen. Hierauf wurde der offene Theil gereinigt und bei den Eisenfläschchen einfach die Verschlussschraube eingesetzt, bei den Glashüllen der capillare Theil zugeschmolzen. Es gelang mir leider nicht mehr als 0,1 bis 0,2 g Lösung einzuschliessen, infolge dessen ich trotz des grossen Temperaturintervalls (0—98° C., die Erwärmung

1) Ad. Blümcke, Wied. Ann. **25.** p. 154. 1885.

2) Guthermuth, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure **28.** p. 93. 1884.

geschah durch Wasserdampf) keine besonders grosse Genauigkeit erzielte.

Das Gewicht der Glashüllen betrug ungefähr 1 g, das der Eisenfläschchen ungefähr 3 g.

Von Nachtheil für die Genauigkeit der Resultate ist natürlich auch der Umstand, dass sowohl das Glas als auch ganz besonders das Eisen von den Lösungen angegriffen werden.

Die erhaltenen Resultate sind:

Procentgehalt der Lösung	Spec. Wärme bei den		Procentgehalt der Lösung	Spec. Wärme bei den	
	Versuchen mit Glashüllen	Versuchen mit Eisenfläschchen		Versuchen mit Glashüllen	Versuchen mit Eisenfläschchen
50 %	0,80	0,81	90 %	0,80	0,81
	0,80	0,80		0,81	0,81
	0,81	0,82		0,83	0,82
	0,81	0,82		0,84	0,83
	Mittel 0,81			Mittel 0,82	
61 %	0,83	0,83	100 %	0,76	0,77
	0,83	0,85		0,76	0,78
	0,84	0,87		0,77	0,78
	0,86	0,86		0,77	0,79
	Mittel 0,85			Mittel 0,78	
73 %	0,93	0,95			
	0,94	0,97			
	0,95	0,99			
	0,97	1,00			
	Mittel 0,96				

Nimmt man die von Thomsen[1]) und Hammerl[2]) für schwach concentrirte Natronlaugen gefundenen Werthe zu Hülfe, wobei allerdings nicht vergessen werden darf, dass sich dieselben auf andere Temperaturintervalle beziehen, so sinkt die spec. Wärme derselben mit zunehmender Concentration bis ungefähr zu einem Gehalt von 50 % Aetznatron, steigt hierauf bis zu einem in der Nähe des Gehalts von 75 % liegenden Maximum, um darauf wieder zu fallen. Das Eintreten dieses Maximums mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, allein es erklärt sich sehr einfach, wenn

1) Thomsen, Pogg. Ann. **142.** p. 368. 1871.

2) Hammerl, Compt. rend. **90.** p. 694. 1881.

man bedenkt, dass bei den stärker concentrirten Lösungen ein Auskrystallisiren stattfindet, welches für die Lösung von 73% Gehalt am stärksten ist; es waren nämlich bei der Erwärmung auf 98° C. die Lösungen von 53%, 61% und 73% flüssig, dagegen die von 90% nicht.

Da für die Praxis die Kenntniss der spec. Wärme innerhalb solcher Intervalle von Interesse ist, bei denen die Lösungen flüssig sind, so versuchte ich durch Anwendung von Xylol und Anilin im Heizgefäss höhere Temperaturen zu erzeugen, allein es wollte mir nicht gelingen, die Dämpfe in der gewünschten Weise zum Circuliren zu bringen, so dass ich einstweilen von dem Vorhaben abstehen musste.

VI. *Ueber eine Verbesserung der Flüssigkeits-Thermostaten; von Ad. Blümcke.*

(Aus dem phys. Laboratorium der Techn. Hochschule zu München.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 3.)

Gelegentlich calorimetrischer Untersuchungen verwendete ich zum Constanthalten der Temperatur eines Wasserbades Flüssigkeitsthermostaten. Dieselben functionirten, einmal eingestellt, in durchaus befriedigender Weise. War es aber nöthig die Temperatur um ein grösseres Intervall (10—15° C.) zu ändern, so musste die Füllung des Thermostaten jedesmal der Temperatur entsprechend ausprobirt werden. Diese Operation ist zum mindesten zeitraubend, und es schien mir wünschenswerth, sie durch ein einfaches und bequemes Mittel zu umgehen. Ich glaube, dies in einer sehr einfachen Vorrichtung gefunden zu haben, welche meines Wissens bei Flüssigkeitsthermostaten noch nicht angewendet wurde. Dieselbe besteht einzig und allein darin, dass das Rohr R, welches sich an das Gefäss G des Thermostaten anschliesst, nicht wie bisher einfach umgebogen ist, sondern sich weiter nach oben fortsetzt und in ein Gefäss G_1 einmündet. Bei H befindet sich ein gut schliessender Hahn. Im übrigen bleibt alles ungeändert.

Um den Apparat zum Gebrauch herzurichten füllt man zuerst den U-förmigen Theil des Rohrs R mit dem ein für mal in demselben bleibenden Quecksilber. Hierauf giesst man bei offenem Hahn die Flüssigkeit ein; etwa sich bildende Luftblasen kann man leicht entfernen. Das Rohr R darf selbstredend nicht zu eng sein. Dann setzt man das Ganze bei immer noch offenem Hahn in das Bad und schliesst bei Erreichung der gewünschten Temperatur ab. Das Quecksilber ist dabei nur solchen Schwankungen ausgesetzt, wie sie der drückenden Flüssigkeitssäule in R und G_1 entsprechen; diese kann man aber so gering machen, wie man will [z. B. in sehr einfacher Weise durch Saugen oder Einblasen von Luft am oberen Theile des Gefässes G_1]. Das Gaszuleitungsrohr r ist also nur um ganz geringe Beträge zu verschieben.

Soll die Temperatur geändert werden, so braucht man nur den Hahn zu öffnen (beim Senken derselben ist darauf zu achten, dass im Gefäss G_1 hinreichend Flüssigkeit vorhanden ist) und im geeigneten Moment zu schliessen. Namentlich scheint es mir von Vortheil zu sein, dass ein Herausnehmen des Thermostaten aus dem Bade absolut unnöthig wird.

Man könnte einwenden, dass durch Vergrösserung des das Quecksilber enthaltenden Theils des Rohrs R ein Herausheben des Thermostaten aus dem Bade und Aenderung der Füllung vermieden werden kann, soll aber der Apparat hinreichend empfindlich bleiben, so muss man die Menge des Quecksilbers so vermehren, dass die Zerbrechlichkeit zu gross wird, während man bei der oben beschriebenen Einrichtung das Quecksilbers auf wenige Cubikcentimeter beschränken kann. Auch müsste natürlich dem Rohr r eine den grösseren Quecksilberschwankungen entsprechende Länge gegeben werden, was ebenfalls mit Bezug auf die Festigkeit des Apparats nicht von Vortheil ist.

VII. *Ueber Capillaritätsconstanten; von William Francis Magie.*

§ 1. Messungsmethode.

Die genaue Bestimmung der numerischen Werthe der apillaritätsconstanten von verschiedenen Flüssigkeiten ist in r Theorie der Capillaritätserscheinungen und überhaupt in r Theorie der Molecularkräfte von grosser Wichtigkeit. Es t deshalb immerhin schon nützlich, die Resultate früherer eobachter zu bestätigen. Zur Zeit ist aber jede neue Messungsethode von besonderer Wichtigkeit, weil die wahren Werthe eser Constanten noch zweifelhaft sind. Die von Hrn. Prof. uincke aus Messungen an Tropfen und Blasen sich erbenden Resultate stehen in Widerspruch zu den früher genommenen Werthen, und eine neue Methode ist nothendig, um zwischen den beiden Ergebnissen zu entscheiden.

Wenn eine Flüssigkeitsmenge in einem nicht ganz gehlossenen Gefäss von beliebiger Gestalt im Gleichgewicht eht, so gilt die Gleichung:

$$g\,d\,z = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right),$$

rausgesetzt, dass ein Theil der freien Oberfläche eine bene ist. In dieser Gleichung bedeutet g die Beschleuniing der Gravitation an der Erdoberfläche, d die Dichtigkeit r Flüssigkeit und $H/2$ die Oberflächenspannung. Weiter deuten r und r_1 die Hauptkrümmungsradien irgend eines unktes der freien Oberfläche und z die Ordinate desselben unktes, vorausgesetzt, dass die z-Axe mit der Richtung r Gravitation und die Ebene $z = 0$ mit der Ebene der berfläche zusammenfällt

Wenn wir z und die Hauptkrümmungsradien r und r_1 messen haben, so können wir augenscheinlich den Werth n $H/2$ der Oberflächenspannung sofort bestimmen. Die ormel, auf welcher die Methode gegründet ist, ist auf unkte der freien Oberfläche anwendbar, und die Beobachngen beziehen sich auch nur auf Punkte der freien Oberfläche.

Die Methode, welche ich gebraucht habe, um die Krüm-

mungsradien zu bestimmen, wurde mir angegeben von meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Prof. v Helmholtz. Sie ist im allgemeinen begründet auf den Gebrauch eines Theiles der Oberfläche der Flüssigkeit als Spiegel, dessen Krümmungsradius sich aus den relativen Grössen eines Gegenstandes und seines Bildes bestimmen lässt. Die Gefässe, welche die Flüssigkeiten enthielten, waren zusammengesetzt aus zwei verticalen, parallelen Röhren, die durch eine andere horizontale Röhre in Verbindung gebracht wurden. Die eine von diesen verticalen Röhren hatte immer einen Durchmesser von wenigstens 3 cm. Man konnte deshalb die Krümmung der Oberfläche in diesem Theile des Gefässes, und zwar in genügender Entfernung von den Wänden desselben, als Null annehmen und die Ebene der Oberfläche als die Ebene $z = 0$ betrachten. Die andere Röhre war eine Capillarröhre, deren Durchmesser in keinem Falle ein Millimeter überstieg. Diese Capillarröhre hatte einen kreisförmigen Querschnitt. Es folgt aus dieser Thatsache, dass die Oberfläche der Flüssigkeitssäule in der Röhre eine Rotationsfläche war, und zwar wegen des kleinen Durchmessers der Röhre sehr näherungsweise eine Kugelfläche.

Das Bild eines Gegenstandes in dieser Fläche wurde mit Hülfe eines Mikroskops beobachtet, dessen Objectivglas Nr. I eine Vergrösserung von ungefähr 90 mal, und dessen Objectivglas Nr. II eine Vergrösserung von 140 mal erlaubte. Es war mit einem Ocularmikrometer versehen, für welches der Werth eines Theilstriches sehr sorgfältig für beide Objective bestimmt wurde. Als Gegenstand, dessen Bild gemessen wurde, diente zum Theil die Kante einer sehr genau kreisförmigen Rinne auf der Oberfläche der Messingfassung des Objectivglases, zum Theil ein kleines Parallelogramm aus weissem Papier, das auf das Objectivglas selbst geklebt worden war. Diese Einrichtung musste getroffen werden, trotz der für die Spiegelung ungünstigen Lage des Gegenstandes in so kleiner Entfernung von der Oberfläche, weil es wegen der Gestalt der Röhre und der Oberfläche nur möglich war, Gegenstände zu beobachten, die ziemlich nahe der Axe des Mikroskops sich befanden.

Der Höhenunterschied zwischen der ebenen Oberfläche und der Kuppe des Meniscus in der Capillarröhre wurde mit Hülfe eines Kathetometers beobachtet. Man konnte mit diesem Kathetometer direct bis ein Zehntel und durch Schätzung bis etwa ein Hundertel Millimeter ablesen.

§ 2. Formel für den Spiegel.

Bei den Bestimmungen des Krümmungsradius waren die Grösse des Gegenstandes, die Grösse des Bildes und die Entfernung zwischen Bild und Gegenstand durch Beobachtungen gegeben. Die Grösse des Gegenstandes wurde direct mit dem Kathetometer gemessen. Die Entfernung zwischen der Oberfläche des Objectivglases und einem durch das Mikroskop ganz deutlich und im wahren Brennpunkte gesehenen Punkte wurde auch mit dem Kathetometer gemessen und als die constante Entfernung zwischen Bild und Gegenstand angenommen. Die Bestimmung der Grösse des Bildes wurde natürlich bei jeder Beobachtung mit Hülfe des Mikroskops gemacht. Es waren dann zur Bestimmung des Krümmungsradius gegeben die Grösse des Gegenstandes, die Grösse des Bildes und die Entfernung zwischen Bild und Gegenstand.

Die Grösse des Gegenstandes war im Verhältniss zu der Entfernung des Gegenstandes von der spiegelnden Fläche bei vielen Versuchen so gross, dass es nothwendig war, eine Formel abzuleiten, mit welcher die Werthe des Krümmungsradius genauer als bei den gewöhnlichen Annahmen ausgerechnet werden konnten.

Das Bild eines Gegenstandes in einem Spiegel wird bestimmt durch die Durchschnittspunkte von allen Paaren zurückgeworfener Strahlen, die von einem Punkte des Gegenstandes ausgehen und von zwei dicht aneinander liegenden Punkten der Oberfläche zurückgeworfen sind. Im allgemeinen bilden diese Durchschnittspunkte die kaustischen Curven.

Bei einer strengen Betrachtung hätten wir diese Curven bestimmen müssen. Wir dürfen hier aber wegen der Kleinheit des Spiegels eine Annäherungsformel brauchen, welche

wir auf ganz einfache Weise ableiten können. Es sei OA in der Fig. 1 die Axe der Röhre, und xy die Coordinaten der Meridiancurve, d. h. der Durchschnittslinie der Kugelfläche mit einer Ebene durch OA. Die halbe Grösse AB des Gegenstandes sei mit G bezeichnet. Der Anfangspunkt O der Coordinatenaxen sei zugleich der Mittelpunkt der Kugel. Nun nehmen wir an, was näherungsweise richtig ist, dass

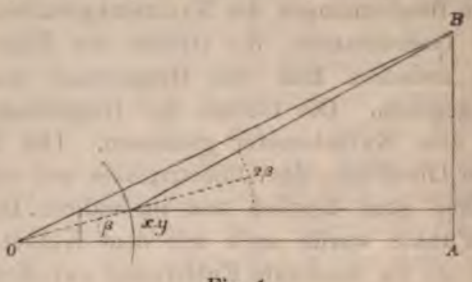


Fig. 1.

die Linien OB und $y = h$, sich am Orte des beobachteten Bildes von B schneiden. Die Abscisse dieses Schnittpunktes sei mit x bezeichnet. Die Grösse h ist nach dieser Annahme die halbe Grösse des Bildes. Die Entfernung zwischen Bild und Gegenstand sei mit F bezeichnet. r, der Krümmungsradius, wird bestimmt aus den Gleichungen:

$$Fh = x(G - h), \qquad h = r \sin \beta,$$
$$G - h = (F + x - r\cos\beta)\,\mathrm{tg}\,2\beta.$$

Mithin bekommt man:

$$r^2 = \frac{2h^2G^2F^2}{(G^2-h^2)^2}\left\{L + \sqrt{L} - \frac{Gh}{F^2}\left(\frac{1+\sqrt{L}}{L}\right) + \frac{G^3h}{2F^4\sqrt{L}}\right\},$$

wo die höheren Potenzen von h im Zähler und von F im Nenner vernachlässigt worden sind. Dies ist gestattet, weil in meinen Beobachtungen die übrigen Glieder fast verschwindend klein sind. L bedeutet den Ausdruck $1 + G^2/F^2$. Für einen gegebenen Gegenstand und eine gegebene Entfernung lässt sich diese Formel auf die Form $r^2 = Ph^2(N - Mh)$ bringen, wo P, N, M Constanten sind. Die Berechnung von r ist dann ganz leicht.

§ 3. Kugelförmige Gestalt der Fläche.

Bei der Anwendung dieser Formel auf die Beobachtungen ist es wichtig, zu wissen, in wie weit die Annahme, dass die Oberfläche in den Capillarröhren ein Theil einer Kugelfläche ist, gestattet ist. Um die Abweichung von der Kugelform zu bestimmen, habe ich für Quecksilber in 2 Fällen die Entfernung des Punktes, von welchem ungefähr die beobachteten Strahlen zurückgeworfen wurden, von der Horizontalebene, die durch die Kuppe des Meniscus gelegt wurde, berechnet. Die Formel, die ich dazu anwendete, ist von Poisson[1]) entnommen. Obgleich die Rechnung nur für Quecksilber gemacht worden ist, so würden doch die Constanten von anderen Flüssigkeiten Resultate derselben Grössenordnung geben. Ich verglich mit dieser Entfernung den Sinus versus der Kugelfläche, welche ich als die Oberfläche der Flüssigkeit angenommen hatte. Hat die Röhre einen Radius von 1,2 mm, so findet man, wenn man den Contactwinkel gleich 45°, und die Constante a^2 gleich 6,627 annimmt, für einen Punkt der Oberfläche in der Entfernung von 0,4 mm von der Axe der Röhre, dass die Entfernung dieses Punktes von der Horizontalebene, welche durch die Kuppe des Meniscus gelegt wird, gleich 0,0414 mm ist. Wenn man annimmt, dass die Oberfläche eine Kugelfläche ist, so findet man den Werth des Sinus versus des Winkels zwischen der Axe und dem Radius durch diesen Punkt gleich 0,048. Der Unterschied zwischen den beiden Werthen ist, obgleich sein absoluter Werth klein, doch gross genug, um den Gebrauch einer Röhre von dieser Weite auszuschliessen.

Wenn man dieselben Werthe für den Fall, dass die Röhre einen Radius von 0,4343 mm besitzt, für einen Punkt in der Entfernung von 0.11 mm von der Axe der Röhre ausrechnet, findet man für die wirkliche Entfernung des Punktes von der Ebene den Werth 0,01022 mm, und für den Sinus versus 0,01016. Der Unterschied ist hier ganz unbedeutend. Wenn wir in der Poisson'schen Gleichung γ' als Constante ansehen und nach t differenziren, so bekommen

1) Poisson, Nouv. Théor. de l'Act. Capill. p. 110. Gl. (10).

wir einen Ausdruck für die Tangente des Winkels zwischen der Normalen in dem betrachteten Punkte und der Axe oder der Richtung des reflectirten Strahles. Daraus kann man in dem letzteren Falle den Werth dieses Winkels gleich 10° 27′ 30″ berechnen; und der Werth desselben Winkels, wenn die Oberfläche eine Kugelfläche wäre, ist 10° 40′ 50″.

Der Durchmesser der weitesten Röhre, welche ich bei diesen Versuchen gebraucht habe, ist ungefähr 1,2 mm. In diesem Falle ist auch die Annahme der kugelförmigen Gestalt der Oberfläche zulässig. Es soll hier bemerkt werden, dass die Abweichung von der Kugelform die wahren Werthe des Krümmungsradius ein wenig verkleinert, und zwar in höherem Maasse bei der Spiegelung von grossen als von kleinen Gegenständen. Bei den Beobachtungen mit Flüssigkeiten, die Glas benetzen, wurde ein so kleiner Gegenstand gebraucht, dass die Form der Oberfläche ganz genau als Kugel angesehen werden durfte. Diese Bemerkung enthält auch möglicherweise eine Erklärung des Unterschiedes zwischen den Werthen der Spannung für Quecksilber, die mit den beiden Objectiven erhalten worden sind. Andere Messungen aber, welche ich hier nicht mitgetheilt habe, gestatten auch den Schluss, dass dieser Unterschied von einem unvermeidlichen und unbemerkbaren Unterschied in der Reinheit des Quecksilbers oder des Glases oder von verschiedenen atmosphärischen Verhältnissen abhängt.

§ 4. Beobachtungen.

Mit Hülfe der oben dargelegten Beobachtungsmethode habe ich die Werthe der Oberflächenspannung einiger Flüssigkeiten bestimmt.

I. Quecksilber. Das benutzte Quecksilber war im Torricelli'schen Vacuum destillirt. Dann wurde es mit einer Lösung von 5 g doppeltchromsaurem Kali in 1000 ccm destillirtem Wasser, zu der einige Cubikcentimeter Schwefelsäure hinzugegossen wurden, nach der Methode von Brühl[1]) gereinigt. Es wurde darauf unter Kalilauge stehen gelassen, dann in destillirtem Wasser gewaschen und darauf in

1) Brühl, Chem. Ber. 1878/9.

einer Porcellanschale erhitzt, bis das Wasser ganz ausgetrieben worden war. Es wurde dann durch ein feines Loch in der Spitze eines gut gereinigten getrockneten Glastrichters in eine Flasche gefüllt. Die Flasche war vorher sorgfältig gereinigt und durch einen Strom heisser, mittelst einer Chlorcalciumröhre getrockneter Luft getrocknet worden. Die Flasche war an der Seite mit einem Hahn versehen, durch welchen man das Quecksilber ausfliessen lassen konnte, ohne die Oberfläche desselben zu beunruhigen.

Um eine Messung zu machen, wurde das oben erwähnte U-förmig gestaltete Gefäss an eine geeignete Stelle gesetzt und Mikroskop und Kathetometer an ihren Platz gestellt. Das Quecksilber liess man in das Gefäss fliessen und beobachtete danach so schnell wie möglich die Grösse des Bildes in dem Meniscus. Zunächst wurde der Ort der Spitze der Quecksilbersäule in der Capillarröhre und endlich der Ort der Ebene in der grossen Röhre mit dem Kathetometer bestimmt. Bei diesem Verlaufe der Beobachtung wird die Aenderung der Spannung durch atmosphärische Einflüsse so weit wie möglich vermieden. Die durch die Reibung des Quecksilbers und des Glases möglicherweise erzeugte Electricität wurde abgeleitet.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind in folgenden Tabellen zusammengefasst.

Quecksilber. Spec. Gew. 13,546. Temp. 20° C.

1. Objectivglas Nr. I.

F, Entfernung zwischen Bild und Gegenstand 12,47 mm.

$2G$, Grösse des Gegenstandes 8,927 mm.

Constante des Ocularmikrometers, 1 Theilstrich = 0,008 9054 mm.

h in Theilstrich.	z in mm	r in mm	a
18,33	14,66	0,4767	6,989
24	11,20	0,6240	6,989
22,16	12,16	0,5762	7,007
19	13,18	0,4941	6,824
21	12,31	0,5461	6,722
		Mittelwerth von a^2	6,906
		Werth von $H/2$	46,77

2. Objectivglas Nr. II.

F, Entfernung zwischen Bild und Gegenstand 7,11 mm.

$2G$, Grösse des Gegenstandes 7,09 mm.

Constante des Ocularmikrometers, 1 Theilstrich = 0,005 894 mm.

h in Theilstrich.	z in mm	r in mm	a^2
46	11,15	0,5898	6,576
42	12,78	0,5386	6,884
32	15,90	0,4107	6,530
47,66	10,97	0,6110	6,702
46	11,37	0,5898	6,706
39,75	12,70	0,5100	6,477
		Mittelwerth von a^2	6,646
		Werth von H/2	45,03

Wenn wir diese Resultate als von gleichem Werth ansehen, bekommen wir als Mittelwerth der Constanten für Quecksilber $a^2 = 6{,}764$ und $H/2 = 45{,}82$. Die Oberflächenspannung von Quecksilber ist so gross, dass alle schädlichen Einflüsse die Spannung zu vermindern streben. In gleichem Sinne wirkt auch eine eventuell vorhandene Electrisirung der Oberfläche. Die Constanten können daher nicht kleiner, sondern möglicherweise grösser, aber meiner Ansicht nach nicht viel grösser sein, als die oben angegebenen Werthe.

Die Werthe derselben Constanten von Laplace[1]) sind resp. 6,5 und 44,07. Von Poisson[2]) wurden die Werthe $a^2 = 6{,}5262$ und $H/2 = 44{,}20$ gebraucht. Desains[3]) hat die Werthe angenommen, welche seinen Beobachtungen am besten entsprechen; und aus den Beobachtungen von Danger hat er die Werthe $a^2 = 6{,}714$ und $H/2 = 45{,}47$ berechnet. Die ausserordentliche Schwierigkeit, ganz reines Glas und Quecksilber zu bekommen, die Unsicherheit des Contactwinkels, welcher in den angewendeten Methoden durch unabhängige Beobachtungen bestimmt werden muss, und die rasche Aenderung der Spannung dadurch, dass das Quecksilber der gewöhnlichen Atmosphäre eines Laboratoriums ausgesetzt wird, geben leicht eine Erklärung der für solche Messungen sehr kleinen Abweichungen. Der Werth $H/2 = 55{,}03$, der von Hrn. Prof. Quincke vorgeschlagen worden ist, weicht aber so weit von den anderen ab, dass der Unterschied nicht in dieser Weise erklärbar ist. Diesen Werth, und überhaupt alle die Werthe, die von Hrn. Prof. Quincke bestimmt worden sind, müssen wir näher betrachten. Es empfiehlt sich aber zunächst, die von mir erhaltenen Resultate für andere Flüssigkeiten aufzustellen.

II. Flüssigkeiten, die Glas benetzen. Die Untersuchungen, die ich mit den Flüssigkeiten angestellt habe, welche die Glaswand benetzen, sind mit der Absicht unternommen worden, die Frage zu beantworten, ob der Contact-

---

1) Laplace, Méc. Cél. Suppl. au Xe livre. p. 56.
2) Poisson, Nouv. Théor. p. 219.
3) Desains, Ann. de chim. et de phys. (3) **51.** p. 385. 1857.

winkel zwischen der Flüssigkeit und der festen Wand in diesem Falle Null wird oder nicht. Insbesondere ist es interessant, zu untersuchen, ob dieser Werth des Contactwinkels für die Beobachtungen in den Röhren gilt, die bei der Bestimmung der Capillaritätsconstanten gewöhnlich gebraucht worden sind. Hr. Prof. Quincke[1]) zieht aus der Unvereinbarkeit der von ihm aus der Gestalt von Tropfen und Blasen berechneten Werthe der Constanten mit den für dieselben Flüssigkeiten aus der Steighöhe in Capillarröhren bestimmten Werthen die Folgerung, dass der Contactwinkel selten oder niemals Null wird, sogar wenn die Röhren sehr sorgfältig gereinigt und frisch ausgezogen wurden. Die directen Messungen von Hrn. Prof. Quincke[2]) zeigen, dass oftmals dieser Winkel einen grossen und nicht constanten Werth hat. In anderen Fällen war der Winkel aber beinahe Null. Es ist nun zu untersuchen, ob diese Veränderlichkeit des Winkels auch bei den gewöhnlichen Beobachtungsmethoden für die Bestimmung der Capillaritätsconstanten stattfindet. Um diese Frage zu beantworten, werden wir die Resultate aus der hier vorgeschlagenen Beobachtungsmethode mit denjenigen, welche von der Steighöhe in Röhren erhalten worden sind, vergleichen.

Die Werthe, welche hier gegeben sind, wurden mit Hülfe derselben Formel berechnet wie die Werthe für Quecksilber. Weil aber bei allen diesen Messungen wegen des kleinen Werthes von $2h$, welcher nie grösser als 0,08 mm war, die Correctionsglieder in der Formel keinen merklichen Einfluss haben, so ist es gestattet, diese Glieder, die h enthalten, zu vernachlässigen. Die sämmtlichen Grössen, die sich in der Gleichung für r^2 befinden, sind dann selbst Quadrate. Aus dieser Thatsache folgt, dass bei diesen Beobachtungen, wo der Spiegel concav, und deshalb h negativ ist, die Formel für r^2 keine Aenderung erleidet. Streng genommen muss man hier den negativen Werth von r nehmen; weil aber die Grössen z und r ihre Vorzeichen gleichzeitig ändern, so

1) Quincke, Pogg. Ann. **139.** p. 1. 1870.
2) Quincke, Wied. Ann. **6.** p. 145. 1879.

braucht man nur ihre numerischen Werthe in Betracht zu ziehen.

In den folgenden Messungen wurde immer das Objectivglas Nr. II gebraucht. F, die Entfernung zwischen Bild und Gegenstand, war 7,11 mm. $2G$, die Grösse des Gegenstandes, war 1,75 mm. Die Constante des Ocularmikrometers war 1 Theilstrich = 0,005 894 mm. In den Tabellen ist h in Theilstrichen, z und r in Millimetern gegeben.

Alkohol.

Spec. Gew. 0,791.
Temp. 20° C.

h	z	r	a^2
13	8,89	0,6258	5,563
* 4,75	8,89	0,6321	5,619
9,5	12,34	0,4573	5,643
* 3,5	12,34	0,4658	5,748
7,5	15,43	0,3610	5,571
11	10,29	0,5295	5,449
Mittelwerth von a^2			5,599

*) Bei diesen Messungen war $2G = 0,63$ mm.

Destillirtes Wasser.

Spec. Gew. 1.
Temp. 19,25° C.

h	z	r	a^2
7,75	38,23	0,3731	14,262
9,5	32,73	0,4573	14,968
13	23,23	0,6258	14,537
11,25	26,85	0,5415	14,540
9	32,45	0,4332	14,058
9,5	32,28	0,4573	14,761
13	21,77	0,6258	13,623
10	31,63	0,4814	15,226
7,75	37,80	0,3731	14,102
Mittelwerth von a^2			14,453

Chloroform.

Spec. Gew. 1,405.
Temp. 20° C.

h	z	r	a^2
13,5	6,39	0,6498	4,156
9,5	8,16	0,4573	3,735
11,75	6,34	0,5656	3,589
7,75	9,88	0,3731	3,689
13,5	5,65	0,6498	3,675
9,5	8,40	0,4573	3,844
11,5	6,65	0,5536	3,684
7,75	9,82	0,3731	3,667
Mittelwerth von a^2			3,755

Chloroform.

Spec. Gew. 1,485.
Temp. 20° C.

h	z	r	a^2
13,5	5,88	0,6498	3,821
13,25	5,80	0,6378	3,699
9,5	8,04	0,4573	3,677
9,5	8,18	0,4573	3,741
7,75	9,71	0,3731	3,622
7,75	9,92	0,3731	3,701
11,5	6,41	0,5536	3,549
11,5	6,39	0,5536	3,537
Mittelwerth von a^2			3,668

Petroleum.
Spec. Gew. 0,773. Temp. 18° C.

h	z	r	a^2
13,5	9,97	0,6498	6,484
13,25	10,00	0,6378	6,384
9,25	14,12	0,4431	6,292
9,25	14,15	0,4431	6,306
7,75	17,35	0,3731	6,478
7,75	17,40	0,3731	6,497
11,25	11,31	0,5390	6,130
11,25	11,30	0,5390	6,124
13,25	9,89	0,6378	6,313
13,25	9,89	0,6378	6,313
9,5	14,00	0,4573	6,408
9,25	14,03	0,4431	6,252
7,5	17,20	0,3593	6,215
7,5	17,20	0,3593	6,215
11,5	11,49	0,5536	6,366
11,25	11,59	0,5390	6,282
Mittelwerth von a^2			6,316

Olivenöl.
Spec. Gew. 0,910. Temp. 19° C.

h	z	r	a^2
13,5	11,21	0,6498	7,291
13,25	11,22	0,6378	7,162
11,25	12,89	0,5390	6,986
11,25	12,90	0,5390	7,023
9,25	15,49	0,4431	6,903
9,5	15,53	0,4573	7,108
7,75	19,17	0,3731	7,157
7,75	19,20	0,3731	7,169
13,25	11,25	0,6378	7,181
13,25	11,26	0,6378	7,188
11,25	12,80	0,5390	6,937
11,40	12,96	0,5492	7,151
7,75	19,18	0,3731	7,161
7,75	19,23	0,3731	7,180
9	15,81	0,4332	6,890
9,5	15,89	0,4573	7,272
Mittelwerth von a^2			7,110

Schwefelkohlenstoff.
Spec. Gew. 1,278. Temp. 19° C.

h	z	r	a^2
13,5	8,11	0,6498	5,270
13,25	8,11	0,6378	5,173
9,25	11,11	0,4431	4,947
9,25	11,16	0,4431	4,969
11,75	8,99	0,5656	5,085
11,75	8,99	0,5656	5,085
7,75	13,20	0,3731	4,924
8	13,28	0,3851	5,114
Mittelwerth von a^2			5,071

Terpentinöl.
Spec. Gew. 0,894. Temp. 21° C.

h	z	r	a^2
13,25	9,85	0,6378	6,288
13,25	9,85	0,6378	6,288
11,5	11,18	0,5536	6,194
11,5	11,15	0,5536	6,177
7,5	16,28	0,3593	5,882
7,75	15,93	0,3731	5,948
9,25	13,48	0,4431	6,007
9,25	13,49	0,4431	6,012
Mittelwerth von a^2			6,100

Terpentinöl.
Spec. Gew. 0,933. Temp. 21° C.

h	z	r	a^2
13,65	9,39	0,6571	6,170
13,25	9,44	0,6378	6,021
7,75	16,06	0,3731	5,991
7,75	16,02	0,3731	5,976
9,25	13,26	0,4431	5,909
9,25	13,21	0,4431	5,901
11,25	10,60	0,5390	5,745
11,5	10,67	0,5536	5,912
Mittelwerth von a^2			5,826

Terpentinöl.
Spec. Gew. 0,868. Temp. 20° C.

h	z	r	a^2
13,25	9,79	0,6378	6,244
13,25	9,72	0,6378	6,200
11,5	11,09	0,5536	6,139
11,5	11,09	0,5536	6,139
9,5	13,48	0,4573	6,164
9,5	13,52	0,4573	6,178
7,75	16,58	0,3731	6,185
7,75	16,60	0,3731	6,193
Mittelwerth von a^2			6,180

Wenn wir die Werthe von a^2 und die daraus berechneten Werthe von $H/2$ in einer Tabelle zusammenfassen, haben wir für eine mittlere Temperatur, ungefähr 20° C, die folgenden Resultate. Die Werthe der Constanten a^2 für dieselben Flüssigkeiten, die von Hrn. Prof. Quincke aus der Steighöhe in Capillarröhren nach der Annahme angegeben werden, dass der Contactwinkel Null wäre, sind in den beiden letzten Columnen den Werthen, die aus meinen Beobachtungen herrühren, hinzugefügt.

	Sp. Gew.	a^2	$H/2$	Sp. Gew.	a^2
Alkohol	0,791	5,599	2,214	0,7906	5,659
Destillirtes Wasser	1,000	14,453	7,226	1,000	14,47
Chloroform	1,405	3,755	2,638	—	—
Chloroform	1,485	3,668	2,724	1,4878	3,673
Petroleum	0,773	6,316	2,441	0,7977	6,434
Olivenöl	0,910	7,110	3,235	0,9136	7,159
Schwefelkohlenstoff	1,278	5,071	3,240	1,2687	5,273
Terpentinöl	0,894	6,100	2,726	—	—
Terpentinöl	0,933	5,826	2,718	—	—
Terpentinöl	0,868	6,180	2,682	0,8867	6,234

Die sehr kleinen Abweichungen zwischen den Werthen von a^2, welche mit den beiden ganz unabhängigen Methoden erhalten worden sind, liegen weit innerhalb der Grenzen der bei solchen Messungen unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Wir dürfen also aus dieser Uebereinstimmung den Schluss ziehen, dass der Contactwinkel in den Quincke'schen Capillarröhren wirklich Null oder fast Null war.

Die einzigen Flüssigkeiten in dieser Reihe, deren Constanten mit den Resultaten von anderen Beobachtern sich vergleichen lassen, sind Wasser und Olivenöl. Das specifische Gewicht der anderen Flüssigkeiten, mit Ausnahme von Terpentinöl, die von Gay-Lussac[1]) und Frankenheim und Sondhaus[2]) untersucht worden sind, ist so ungleich, dass man sie nicht vergleichen darf. Terpentinöl hat nach den Untersuchungen von Frankenheim und

1) Gay-Lussac, Laplace Méc. Cél. Suppl. au Xe livre.
2) Frankenheim und Sondhaus, Pogg. Ann. 72. p. 211. 1847.

Sondhaus einen grösseren Werth von a^2 als den vorher angegebenen. Die Verhältnisse dieser Flüssigkeit sind wegen ihrer leichten Oxydirbarkeit so eigenthümlich, dass man wenig Gewicht darauf legen sollte. Für Wasser brauchte Laplace, nach Beobachtungen von Gay-Lussac, $a^2 = 14{,}80$. Frankenheim und Sondhaus geben 14,84 und Brunner[1]) 14,76. Diese Werthe sind mit Hülfe der Coëfficienten von Frankenheim und Sondhaus[2]) für die Temperatur von 20° C. berechnet.

Für Olivenöl findet Brunner bei 20° C. $a^2 = 7{,}25$.

Die Werthe wurden aus der Steighöhe in engen Röhren erhalten, mit Berücksichtigung des Gewichtes des Meniscus, dessen Einfluss Hr. Prof. Quincke in seinen Berechnungen nicht in Betracht gezogen hat. Sie sind deshalb wahrscheinlich ein wenig grösser als die von ihm angegebenen Werthe. Die Folgerung, dass der Contactwinkel Null ist, wird dadurch nicht geändert; weil, wenn er nicht Null wäre, die Werthe aus der Steighöhe kleiner und nicht grösser als die Werthe würden, die durch die hier angewendete Methode erhalten werden. Der Unterschied von 1 bis 3 Proc., der bei Beobachtungen dieser Art sehr gering ist, lässt sich aus der Schwierigkeit der Messungen der Grösse des Bildes und der Thatsache, dass es bei meiner Methode nothwendig war, die Oberfläche der Atmosphäre auszusetzen, leicht erklären.

§ 5. Betrachtung der Form von Tropfen.

Hr. Prof. Quincke[3]) hat aber eine Reihe von Werthen derselben Constanten gegeben, die aus der Gestalt von Tropfen berechnet sind, welche in Widerspruch mit den vorher gefundenen Werthen stehen. Er zieht diese Werthe den anderen vor, und gerade aus diesen folgert er, weil sie grösser sind als die anderen, dass der Contactwinkel nie Null wird. Meiner Meinung nach hängt dieser Widerspruch nicht von einer unstatthaften Annahme in Bezug auf den Contactwinkel in den Beobachtungen mit Capillarröhren ab, sondern theils von

1) Brunner, Berl. Monatsber. 1846. p. 181.
2) Frankenheim und Sondhaus, Pogg. Ann. **122.** p. 177. 1864.
3) Quincke, Pogg. Ann. **139.** p. 1. 1870.

der Formel, mit welcher von Hrn. Prof. Quincke die Spannung aus der Gestalt berechnet wird, theils von der nicht genügenden Grösse der Tropfen, welche beobachtet wurden.

Die Methode, welche Hr. Prof. Quincke anwandte, ist folgende. Bei Quecksilber beobachtete er einen grossen Tropfen, der auf einer horizontal gelegten Glasplatte lag, und bei den benetzenden Flüssigkeiten eine Blase unter der Platte. Er mass die Entfernung zwischen der Kuppe des Tropfens und der Horizontalebene, die durch den grössten Durchmesser des Tropfens gelegt war. Um auch eine Berechnung des Contactwinkels auszuführen, mass er die ganze Höhe des Tropfens. Der Durchmesser des Tropfens ist oft in den Tabellen angegeben, aber er ist von Hrn. Prof. Quincke in der Berechnung nicht gebraucht worden.

Man bekommt die Formel, welche zur Ausrechnung der vorher erwähnten Resultate gedient hat, durch eine Betrachtung der Grundformel der Capillarität. Es ergibt sich, dass der Höhenunterschied zwischen der Kuppe und dem grössten Querschnitte des Tropfens näherungsweise gleich der Constanten $a = \sqrt{H/s}$ ist. In der Ableitung dieses einfachen Verhältnisses muss man aber den Krümmungsradius der Kuppe und auch den grösseren der Hauptkrümmungsradien in einem Randpunkte des grössten Querschnittes gegen den kleineren als unendlich gross betrachten. Dieses geht aber bei Tropfen von der Grösse, welche Hr. Prof. Quincke gebraucht hat, nicht an.

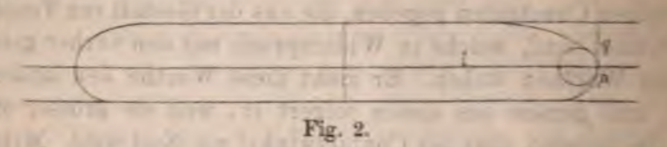


Fig. 2.

Wenn der Tropfen eine solche Gestalt hat, wie die Figur angibt, und wir den Krümmungsradius l in dem Punkte p als unendlich gross betrachten, so ergibt sich leicht, dass $sq = H/2 . 1/r$ ist, wo s das specifische Gewicht, $H/2$ die Oberflächenspannung, q die gemessene Höhe, und r den Krümmungsradius des senkrechten Querschnittes in dem

Punkte p bedeuten. Daraus haben wir als erste Annäherung für r, $r = H/s . 1/2q = a^2(1/2q)$. Es ist aber auch als erste Annäherung $a^2 = q^2$, also $r = q/2$. Aus dieser Formel finden wir die Verhältnisse der beiden Krümmungsradien r und l in den Messungen von Hrn. Prof. Quincke; für Quecksilber in einigen Fällen ist ungefähr $r/l = 1/11$, in anderen Fällen $= 1{,}4/10$. Für Wasser ist dieses Verhältniss noch grösser; es ist $r/l = 2/10$; für Alkohol ist es $1{,}25/15$; für Olivenöl $1{,}5/15$ u. s. w. Wenn aber solche Verhältnisse in der ersten Annäherung als verschwindend angesehen werden, so kann die erste Annäherung nicht als genügend erachtet werden.

Es ist schon von Prof. Bashforth bemerkt worden, dass dieser Fehler in den Berechnungen von Hrn. Prof. Quincke vorkommt; und Hr. Prof. Quincke hat selbst erwähnt, dass die einfache Formel, die er brauchte, einen zu grossen Werth geben würde. Es scheint aber, dass er die Grösse der Correctionen nicht bemerkt hat.

Eine Formel, welche eine weit grössere Annäherung an a^2 gibt, rührt von Poisson[1]) her.

Sie lautet:

$$a^2 = q^2 + \frac{2qa^2}{b} - \frac{a^3}{3l'}(2\sqrt{2} - 1),$$

worin $l' = l + (\sqrt{2} - 1)a$ ist, und b den Krümmungsradius der Kuppe des Tropfens bedeutet. Um diese Formel anzuwenden, setzen wir zuerst $a^2 = q^2$ und brauchen dann diesen Werth von a in der Berechnung der Correctionsglieder. Eine solche Annäherung ist fast immer genügend. In allen Fällen, in welchen der Gebrauch dieser Formel zulässig ist, hat das Glied $2qa^2/b$ einen sehr kleinen Werth. Die Formel, woraus ich in den Fällen b berechnet habe, in welchen das Glied $2qa^2/b$ eingeführt wurde, findet sich bei Poisson.[2])

§ 6. Die Constanten a^2 nach den Quincke'schen Beobachtungen.

Mit Hülfe der oben angegebenen Formel berechnete ich aus Hrn. Prof. Quincke's Beobachtungen die folgenden Werthe der Constanten a^2.

1) Poisson, Nouvelle Théorie p. 217.
2) Poisson, Nouvelle Théorie p. 216.

Quecksilber.

$2l$	q	a^2
28,9	2,934	7,701
*33,16	*2,8606	7,4
*20,—	*2,812	6,945
Mittelwerth		7,276

*) Mittelwerthe von drei sehr nahe übereinstimmenden Tropfen.

Wasser.

$2l$	q	a^2
18,—	4,112	17,828
27,6	4,069	14,947
21,—	3,972	14,656
21,9	4,043	15,490
20,—	4,011	15,859
20,8	4,225	17,716
30,7	4,000	14,258
Mittelwerth		15,822

Olivenöl.

$2l$	q	a^2
†30,—	3,001	8,062
34,—	2,859	7,391
34,—	2,885	7,519
31,2	2,909	7,570
31,2	2,814	7,111
29,7	2,751	6,875
29,7	2,861	7,294
Mittelwerth		7,403

Alkohol.

$2l$	q	a^2
31,4	2,532	5,831
†31,4	2,560	5,945
28,3	2,611	6,105
28,3	2,548	5,829
28,2	2,539	5,788
28,2	2,560	5,880
28,8	2,573	5,949
28,8	2,591	6,029
Mittelwerth		5,920

†) In diesem und den folgenden Werthen wird $b = \infty$ angenommen.

*Terpentinöl.

$2l$	q	a^2
26,8	2,665	6,302
*Steinöl.		
†29,8	†2,852	7,256

†) Mittelwerth aus drei nahe übereinstimmenden Tropfen.

*) In diesen Rechnungen wird $b = \infty$ angenommen.

*Schwefelkohlenstoff.

$2l$	q	a^2
†26	†2,205	4,393
35	2,399	5,301
Mittelwerth		4,696

†) Mittelwerth aus zwei nahe übereinstimmenden Tropfen.

*) In diesen Rechnungen wird $b = \infty$ angenommen.

In der folgenden Tabelle werden die Werthe von a^2 zusammengefasst 1. aus directen Messungen von r, 2. aus den Messungen in Capillarröhren von Hrn. Prof. Quincke, 3. aus den Quincke'schen Messungen an Tropfen, berechnet von Hrn. Prof. Quincke, 4. aus denselben Messungen von Tropfen, berechnet nach der Poisson'schen Formel.

Die Vergleichung der Werthe, welche aus dem Krümmungsradius und aus der Steighöhe berechnet sind, zeigt

Werthe von a^2. Temp. 20° C.

	Spec. Gew.	Aus r	Spec. Gew.	Aus Steighöhe	Aus $a = q$	Aus der Poisson'schen Formel
Alkohol	0,791	5,599	0,7906	5,659	6,574	5,920
Destillirtes Wasser .	1	14,453	1	14,47	16,506	15,822
Chloroform	1,405	3,755	—	—	—	—
Chloroform	1,485	3,668	1,4878	3,673	4,194	—
Petroleum	0,773	6,316	0,7977	6,434	8,105	7,256
Olivenöl	0,910	7,110	0,9136	7,159	8,231	7,403
Schwefelkohlenstoff .	1,278	5,071	1,2687	5,273	5,161	4,696
Terpentinöl . . .	0,894	6,100	—	—	—	—
Terpentinöl . . .	0,933	5,826	—	—	—	—
Terpentinöl . . .	0,868	6,180	0,8867	6,243	6,841	6,302
Quecksilber . . .	13,546	6,764	13,543	—	8,127	7,276

sofort eine ganz gute Uebereinstimmung. Die Werthe aus der ersten Annäherung $a = q$ jedoch, und sogar diejenigen, welche aus der Poisson'schen Formel berechnet sind, sind bedeutend grösser. Es ist demnach nicht zu folgern, dass der Contactwinkel von Null verschieden sei, sondern dass die Poisson'sche Formel für Tropfen dieser Grösse keine genügende Genauigkeit ergibt. In der Ableitung der Formel betrachtet Poisson das Verhältniss a/l als sehr klein. Es ist aber bei den beobachteten Tropfen nie klein und ist in einem Falle, bei Wasser, fast $^1/_3$. Der Durchmesser des Quecksilbertropfens, welchen Gay-Lussac[1]) beobachtete, war ein Decimeter. Hierbei war die Anwendung der Formel zulässig, was aber bei Tropfen von 2 oder 3 cm Durchmesser wohl nicht mehr der Fall ist.

Zum Schlusse erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Geheimrath Prof. v. Helmholtz meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für die freundlichen Rathschläge, die er mir im Verlaufe dieser Untersuchung gegeben hat, und die Theilnahme, welche er an dem Fortgange der Arbeit ständig bewies.

Berlin, Physikal. Institut der Univ. März 1885.

1) Gay-Lussac, Méc. Cél. Suppl. à la Théorie de l'Action Capillaire p. 66.

VIII. *Beiträge zur Kenntniss der Elasticität des Eises; von K. R. Koch.*

(Aus den Sitzungsber. der naturforsch. Ges. zu Freiburg; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 4—7.)

Während meines Aufenthaltes in Labrador in den Jahren 1882/83 habe ich versucht, soweit mir die Arbeiten, welche ich im Auftrage der Deutschen Polarcommission dort ausführte, Zeit dazu liessen, den Elasticitätscoëfficienten des Eises durch Biegung von prismatischen Stäben zu bestimmen. Es schien mir namentlich von Interesse zu sein, zu untersuchen, ob sich die elastischen Kräfte mit der Richtung zur Gefrierfläche ändern, da verschiedene andere physikalische Eigenschaften des Eises eine solche Abhängigkeit von der Orientirung zeigen, wie aus den Untersuchungen von Brewster[1]), Tyndall[2]), Bertin[3]), Reusch[4]), Klocke[5]) u. a. hervorgeht. Aus den angestellten Beobachtungen ist ein Unterschied der Elasticitätscoëfficienten für Stäbe, deren Längsaxen parallel, und für solche, deren Längsaxen senkrecht zur Gefrierfläche lagen, nicht erkennbar; der erhaltene wahrscheinlichste Werth weicht jedoch von den herkömmlich angenommenen, und besonders von dem neuesten von Hrn. Reusch ermittelten so sehr ab, dass ich beschloss, die Veröffentlichung jener Versuche so lange aufzuschieben, bis ich durch Beobachtungen unter weniger ungünstigen Versuchsbedingungen im hiesigen physikalischen Institute jene Werthe verificiren konnte. Während des Januars dieses Jahres habe ich diese Versuche ausgeführt.

Zur Messung der Biegung des auf 2 Lagern ruhenden, in der Mitte zwischen ihnen belasteten Stabes wandte ich

---

1) Brewster, Phil. Trans. 1814. 1818.

2) Tyndall, Auszug in Pogg. Ann. **103.** p. 157 ff. 1858.

3) Bertin, Ann. de chim. et de phys. (3) **69.** p. 87 ff. 1863; (4) **1.** p. 240 ff. 1864; (5) **13.** p. 283. 1878.

4) Reusch, Pogg. Ann. **121.** p. 573. 1864.

5) Klocke, Freib. Ber. **7.** p. 417 ff. 1879.

einen Fühlhebel mit Spiegelablesung an, dessen Stellung in bekannter Weise mit Fernrohr und Scala beobachtet wurde. Ein solcher Fühlhebel eignet sich speciell für diese Untersuchungen aus zwei Gründen: erstens gestattet er, die Beobachtungen aus der Ferne zu machen, sodass der Eisstab während der Messung der Einwirkung der Körperwärme des Beobachters möglichst entzogen ist; ausserdem ist es wegen der grossen Deformationsfähigkeit des Eises nothwendig, möglichst geringe Belastungen anzuwenden; der Fühlhebel gestattet nun, auch diese nur kleinen Beträge der elastischen Biegung noch mit der erforderlichen Genauigkeit zu messen, da man ihn durch Aenderung seiner eigenen Dimensionen und des Abstandes von Spiegel und Scala beliebig empfindlich machen kann. Der Anwendung eines Fühlhebels für absolute Messungen steht bekanntlich die Schwierigkeit der Bestimmung der Dimensionen desselben im Wege. Gibt man dem Fühlhebel die im Folgenden beschriebene Einrichtung, so lässt sich jedoch die Länge desselben mit grosser Genauigkeit ausmessen. An ein dreieckig geschnittenes Stück Eisenblech von hinreichender Stärke A (Fig. 4) waren drei möglichst kurze Nadelspitzen $\alpha\ \alpha\ \beta$ angelöthet. Dieser Fühlhebel stand mit den beiden Spitzen $\alpha\,\alpha$ in einer Linie, die mit einer Feilenspitze auf einer Glasplatte gezogen war, während die Spitze β auf dem zu messenden Gegenstand ruhte. Bei einer Aenderung der Lage der Spitze β findet alsdann eine Drehung um $\alpha\alpha$ statt, die in bekannter Weise durch einen Spiegel B, der über $\alpha\alpha$ angebracht ist, vermittelst Fernrohr und Scala bestimmt werden kann. Die Ausmessung dieses Fühlhebels konnte nun sehr genau und einfach zugleich dadurch bewirkt werden, dass man denselben mehrere mal nebeneinander auf einem auf ein Brett gespannten Papiere sanft abdrückte. Durch die Spitzen entstehen Dreiecke, markirt durch sehr feine Löcher im Papiere, die ich mit einem feinen Maassstabe (von D e n n e r t und P a p e) ausmass. Es lässt sich hieraus die Höhe des Dreiecks $\alpha\alpha\beta$, mithin also die Länge des Fühlhebels finden; der mittlere Fehler der Höhe (also der Länge des Fühlhebels) wird hierbei ausserordentlich klein. Bedingung ist nur, dass

die Platte A und die Spitzen $\alpha\,\alpha\,\beta$ möglichst starr sind, um bei dem Abdrücken auf dem Papier keine elastische Deformation zu erleiden; der absolute Werth wird dann nur von der Genauigkeit der Ablesung und der Richtigkeit des angewandten Maassstabes abhängig sein; z. B. betrug bei einem Fühlhebel von 74,862 mm Länge der mittlere Fehler ± 0,023 mm.

Die Messungen der Dicke und der Breite der Stäbe geschahen in Labrador ebenfalls mit einem solchen Spiegelfühlhebel. Ich konnte diese Messungen nicht ohne fremde Hülfe ausführen. Hr. Missionar S. Weiz hatte die Güte, mich hierbei zu unterstützen und den zu messenden Stab unter dem Fühlhebel zu verschieben. Die Dicke der Stäbe wurde an 30 verschiedenen Punkten bestimmt, von denen je drei in derselben Querlinie des Stabes lagen. Die Breite wurde an zehn verschiedenen Punkten gemessen. Bei den Untersuchungen, die ich in Freiburg anstellte, wurden diese Messungen entweder mit dem Sphärometer oder mit einem feinen Kalibermaassstabe ausgeführt.

Hauptsächlich drei dem Eise eigenthümliche Eigenschaften geben Anlass zu Fehlerquellen. Diese Eigenschaften sind die folgenden: die Verdunstung, die Plasticität, die elastische Nachwirkung. Der Einfluss derselben auf die Resultate soll im Folgenden besprochen werden.

A. Die Verdunstung. Selbst bei tiefen Temperaturen findet bei hinreichender Trockenheit der Luft eine merkliche Verdunstung des Eises statt; dieselbe wird bei Temperaturen, die sich dem Nullpunkte nähern, ausserordentlich stark. Es muss deshalb die Dimensionsbestimmung in unmittelbarem Anschluss an die Beobachtung der elastischen Biegung erfolgen. Dies war bei den Versuchen in Labrador wegen der Kürze der Tagesdauer und der Nothwendigkeit, für die Dimensionsbestimmungen einen Gehülfen zu haben, in der Regel nicht möglich. Anfänglich entging mir diese Fehlerquelle, bis ich gegen den Schluss der dort (in Labrador) angestellten Versuche bei einer Messung, die sich über mehrere Tage erstreckte, eine stetige Zunahme der Biegung unter sonst gleichen Bedingungen bemerkte. Die Belastung und

die Länge des Stabes blieben dieselben, die Temperatur des Beobachtungsraumes änderte sich während dieser Zeit um höchstens 1° C.; ich erhielt die folgenden Werthe für die Biegung nach folgenden Zeiten:

Zeit	nach	0	17	44	70 h
Biegung	„	0,124	0,161	0,202	0,249 mm.

Eine am Anfang und am Ende der Versuchsreihe vorgenommene Dimensionsbestimmung zeigte in der That eine starke entsprechende Abnahme der Dicke und Breite des Stabes.

B. Die Plasticität. Eine zweite Fehlerquelle bildet die grosse Deformationsfähigkeit des Eises. Ein Eisstab von 314 mm Länge, 7,8 mm Dicke, 16,0 mm Breite wurde z. B. bei einer Temperatur von – 15° C. durch eine permanente Belastung von ca. 200 g in ca. 3 Stunden so gebogen, dass der Pfeil der Biegung ungefähr 35 mm betrug. Legte man jetzt den Stab um, so konnte er mit Leichtigkeit durch dasselbe Gewicht wiederum gerade gebogen werden. Das Eis verhält sich also wie ein plastischer Körper; hierdurch werden die Messungen der Biegungen ausserordentlich erschwert; auch bei tiefen Temperaturen z. B. – 25° C. ist diese Deformation noch bedeutend. Es wurde deshalb immer nur die Hebung der Mitte des durchgebogenen Stabes bei der Entlastung als Werth der Biegung genommen; doch sind auch hier die einzelnen Beobachtungen mit Fehlern bis zu 3% behaftet. Da nämlich während des Angreifens der Belastung ein continuirliches Wandern der Scalentheile durch das Fadenkreuz stattfindet, so ist es schwer, bei dem Angreifen der Arretirung, das zur Verhinderung von Stössen allmählich zu geschehen hat, den Punkt, wo die Hebung wirklich eintritt, aufzufassen. Als praktisch erwies sich, die Belastung möglichst gering zu machen, dafür aber die Dimensionen des Fühlhebels und die Entfernung vom Spiegel und Scala so zu wählen, dass die Biegungen noch mit der nöthigen Präcision gemessen werden konnten.

C. Die elastische Nachwirkung. Wenn dadurch, dass nur bei der Entlastung beobachtet wird, der Einfluss der Plasticität möglichst unschädlich gemacht ist, so ist hierdurch der Fehler, welcher durch die elastische Nachwirkung

hervorgerufen wird, nicht eliminirt. Nach vollständiger Entlastung findet eine weitere Erhebung um mehrere Scalentheile statt. Da bei der gebotenen allmählichen Entlastung auch das scheinbare Wandern der Scalentheile durch das Fadenkreuz allmählich langsamer und langsamer wird, so ist es schwierig und erfordert grosse Aufmerksamkeit und Uebung, um die eine Erscheinung von der anderen zu trennen. Im Anhange zu beschreibende Versuche geben eine Vorstellung von der ausserordentlichen Grösse der elastischen Nachwirkung.

Resultate. Als Material dienten in Labrador verschiedene Blöcke von ca. 1 cbm Volumen, die ich durch Eskimos aus dem 2 bis 3 m starken Eise eines benachbarten Sees herausmeisseln liess. Das von der Oberfläche bis zu einer Dicke von 36 cm lufthaltige Eis war von da ab bis zu einer Tiefe von 79 cm vollkommen luftfrei und klar. Aus dieser klaren Schicht wurden die Stäbe in folgender Weise hergestellt. Nachdem aus dem Blocke mit einer grobgezähnten Säge (die Zähne waren 1 bis 2 cm lang) die Stäbe roh zugeschnitten waren, wurden sie in einem möglichst kalten Raume auf einer erwärmten Platte durch Abschmelzen in die gewünschte Form gebracht. War hierbei die Platte zu heiss, so zersprang das Eis ähnlich wie Glas.[1])

Die meisten der in Labrador erhaltenen Werthe liegen sowohl für Stäbe, deren Längsaxen senkrecht, wie für solche, bei denen dieselben parallel zur Gefrierfläche lagen, zwischen 800 bis 900 $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ (Gewicht); dieselben sind jedoch vermuthlich zu gross, da zwischen der Messung der elastischen Biegung und der Dimensionsbestimmung eine Verdunstung, also eine Abnahme der Breite und Dicke stattgefunden hat. Nur bei einem der untersuchten Stäbe fällt die Dimensionsbestimmung in die Zeit der Messung der elastischen Biegung. Nimmt man den so erhaltenen Werth als den wahrscheinlichsten, so erhält man $E = 696 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$.[2]) An weiteren Untersuchungen

1) Ueber die Sprödigkeit des Eises vgl. die Versuche von Hrn. Reusch, Pogg. Ann. **121.** p. 573 ff. 1864. Ueber das analoge Verhalten von Eis und Glas vgl. J. Drummond, Phil. Mag. (4) **18.** p. 102 ff. 1859.

2) Dieser Werth wurde aus fünf voneinander unabhängigen Beob-

wurde ich durch nothwendige Reisen verhindert, die ich im Auftrage der Polarcommission auszuführen hatte. Weil der so erhaltene wahrscheinlichste Werth so ausserordentlich von dem neuesten von Hrn. Reusch gefundenen ($E = 236{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$) Werthe abweicht, so wiederholte ich die Untersuchungen im Freiburger physikalischen Institute.

Das Material für diese Versuche bestand aus Blöcken, die ich aus den benachbarten Eisweihern erhielt; das Eis war nicht luftfrei, wie dasjenige, mit dem die Versuche in Labrador angestellt waren, sondern von Luftkanälen durchzogen. Die Längsaxe der Stäbe lag bei allen parallel zur Gefrierfläche. Eintretendes Thauwetter verhinderte leider die Untersuchung von Stäben, deren Längsaxen senkrecht zur Gefrierfläche lagen. Ich erhielt für 4 Stäbe aus vier verschiedenen Blöcken verschiedener Herkunft folgende Werthe:

Stab I	Elast. = 646 $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$;	Temperatur	= − 4,0° C.
„ II	„ = 628 „	„	= − 3,8 „
„ III	„ = 637 „	„	= − 6,8 „
„ IV	„ = 655 „	„	= − 7,0 „
Mittel 641,5	für eine	Temperatur von	− 5,4 „

Der Mittelwerth ist also ebenfalls beträchtlich grösser als der von Hrn. Reusch gefundene Werth = 236,3.

Hr. Reusch hat vermittelst eines Sonometers die Schwingungszahl des Tones bestimmt, den eine in der Nähe der äusseren Fünftel ihrer Länge unterstützte transversalschwingende Eislamelle gab, und daraus nach der bekannten Seebeck'schen Formel den Elasticitätscoëfficienten berechnet. Es lag nun nahe, zu vermuthen, dass die grossen Unterschiede in der Verschiedenheit der Methode begründet sind. Nach Analogie der meisten anderen Substanzen ist jedoch zu erwarten, dass die Werthe der Elasticitätscoëfficienten, welche nach einer dynamischen (akustischen) Methode bestimmt sind, grössere sind, als die durch statische Versuche (Biegung) erhaltenen; nach den Versuchen Wertheim's zeigt nur ein

achtungsreihen gewonnen; die Mittelwerthe der einzelnen Reihen gaben für den Pfeil der Biegung 0,203 mm, 0,201 mm, 0,205 mm, 0,206 mm, Mittel 0,204 mm.

Körper (das Eisen) das entgegengesetzte Verhalten.[1]) Ich wandte die von Hrn. **Warburg** angegebene Methode[2]) an, indem ich die Schallgeschwindigkeit S_e in einem Eisstabe verglich mit der bekannten Schallgeschwindigkeit S_m in einem Messingstabe, wenn beide durch einen festen Steg miteinander verbunden gemeinsame Schwingungen ausführen. Sind dann l_e und l_m die entsprechenden Längen der schwingenden Abtheilungen im Eisstabe und Messingstabe und h_e und h_m die zugehörigen Dicken derselben, so ist:

$$S_e = S_m \frac{l_e^2}{l_m^2} \cdot \frac{h_m}{h_e}.$$

Daraus bestimmt sich in bekannter Weise der Elasticitätscoëfficient des Eisstabes $E = (S_e^2 d)/g$, wenn d die Dichte und g die Intensität der Schwere bezeichnen. Die Beobachtung gelang an 3 Stäben, deren Längsaxen parallel der Gefrierfläche lagen, jedoch nur an einem Stabe, dessen Längsaxe senkrecht zu jener Fläche lag. Sieht man von dem Werthe ab, der bei der Untersuchung des letzten Stabes (der senkrecht zur Gefrierfläche orientirt war) gefunden wurde, weil nur eine Beobachtungsreihe an einem Stabe gelang, so erhält man als Mittelwerth des Elasticitätscoëfficienten für einen Stab, dessen Längsaxe parallel zur Gefrierfläche liegt, $E = 884 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$. Die Werthe des Elasticitätscoëfficienten der 3 Stäbe weichen jedoch untereinander mehr ab, als die Werthe, welche durch Biegung gefunden wurden; leider machte das eintretende Thauwetter die Fortsetzung der Versuche und die Ermittelung der Ursache jener Abweichungen unmöglich. Dieser nach der dynamischen (akustischen) Methode gefundene Coëfficient verhält sich zu dem durch statische Versuche (Biegung) erhaltenen wie 1,37 : 1. Versuche mit einem Spiegelglasstabe ergaben 1,26 (dynamisch) : 1 (statisch). Aehnlich grosse Abweichungen der nach diesen zwei verschiedenen Methoden erhaltenen Werthe zeigen nach den Versuchen **Wertheim's**:

---

1) **Werthheim**, vgl. Pogg. Ann. Erg. **2.** p. 60 ff. 1848.

2) **Warburg**, Pogg. Ann. **136.** p. 285 ff. 1869.

	Elasticitätscoëfficient		Verhältniss
	statisch	dynamisch	dynamisch / statisch
Blei gezogen	1803	2278	1,26
„ angelassen . . .	1727	2146	1,24
Gold angelassen . . .	5585	6372	1,14
Palladium angelassen .	9789	11281	1,15
Stahldraht angelassen .	17278	19200	1,11

Nimmt man mit Hrn. F. Kohlrausch[1]) an, dass die Unterschiede in den Elasticitätscoëfficienten, je nachdem man sie durch statische oder dynamische Versuche bestimmt, herrühren von der elastischen Nachwirkung, so befremdet das grosse Verhältniss 1,37 : 1 nicht bei der starken elastischen Nachwirkung, die das Eis zeigt. Jedenfalls sind die nach der akustischen Methode gewonnenen Werthe noch grösser als die durch die Beobachtung der elastischen Biegung erhaltenen; wie es analog dem Verhalten der meisten anderen Körper zu erwarten war. Die Differenz zwischen den Resultaten des Hrn. Reusch und den meinigen ist also nicht durch die Verschiedenheit der angewandten Beobachtungsmethoden zu erklären.

Zum Schlusse gebe ich in folgender Tabelle eine Zusammenstellung der bis jetzt gefundenen Werthe des Elasticitätscoëfficienten des Eises, so weit ich darüber in der mir zugänglichen Literatur directe Angaben gefunden habe.

Beobachter und Beobachtungsjahr	Elasticitätscoëfficient des Eises (Stabaxe parallel zur Gefrierfläche)	Temperatur	Methode
1826 Bevan[2]) . .	590	?	Biegung
1871 Reusch[3]) . .	236,3	Einige Grade unter Null	Schwingungszahl
$18^{82}/_{83}$ Koch . . .	696	−9° C.	Biegung
1886 „	641,5	−5,4° C.	Biegung
„ „	884	−7° C.	Abstand der Knotenlinien bei Transversalschwingungen

1) F. Kohlrausch, Prakt. Physik § 34.

2) Bevan, Phil. Trans. 1826. p. 304. Mousson Phys. **1.** § 217 gibt als Werth für Bevan's Versuche 541 an. Dieser Werth ist falsch. Bevan selbst gibt die mittlere Dicke seiner Lamelle unrichtig an. Aus diesem (unrichtigen) Werthe würde folgen 514.

3) Reusch, Wied. Ann. **9.** p. 331. 1880.

Anhang.

Ich will im Folgenden noch einige Beobachtungen mittheilen, die ich während meines Aufenthaltes in Labrador gelegentlich über einige andere physikalische Eigenschaften des Eises gemacht habe.

1) **Die elastische Nachwirkung.** Ein Stab dessen Längsaxe parallel zur Gefrierfläche lag, von ca. 314 mm Länge, 10 mm Dicke und 20 mm Breite wurde auf 2 Lagern ruhend während einer Zeit von 6 Stunden mit einem Gewichte von 250 g belastet. Er war stark gekrümmt. Alsdann wurde der Stand an der Scala notirt, die Belastung aufgehoben und das Zurückgehen des Stabes beobachtet. Die folgende Tabelle nebst der graphischen Darstellung (Fig. 5) zeigt (in Scalentheilen) die Grösse und den Verlauf der elastischen Nachwirkung. Die Temperatur schwankte zwischen $-12{,}5^{\circ}$ und $-15{,}0^{\circ}$ C.

Zeit	Ablesung an der Scala	Differenz	Zeit	Ablesung an der Scala	Differenz
Stand mit Belastung	518,5*		um — $19^{m}\ 30^{s}$	559,0	1,0
		12,5	— 21 15	561,0	1,1
Stand sofort nach Wegnahme der Belastung um $11^{h}\ 10^{m}\ 15^{s}$	531,0		— 21 30	561,5	1,0
			— 25 0	562,0	0,2
			— 26 30	562,3	0,2
		15,0	— 27 30	563,0	0,8
			— 29 0	563,5	0,3
11 11 15	546,0	per Min.	— 29 30	564,0	1,0
— 13 25	551,0	2,3	— 30 10	564,5	0,7
— 15 15	554,0	1,7	— 31 40	565,0	0,3
— 15 50	555,0	1,7	— 34 40	566,0	0,3
— 16 30	556,0	1,4	— 35 40	566,5	0,5
— 17 30	557,0	1,0	⋮	⋮	
— 18 25	558,0	1,0	$21^{h}\ 47\ 0$	576,0**	

* Temperatur der Luft $-12{,}5^{\circ}$ C. ** Temperatur der Luft $-15{,}0^{\circ}$ C.

Der Versuch wurde in Freiburg wiederholt. Das angewandte Gewicht (150 g) wirkte jedoch nur $1^{h}\ 30^{m}$ deformirend ein. Die Deformation selbst (Pfeil der Biegung) betrug nur 2,5 mm. Die Temperatur war dem Nullpunkte nahe; sie betrug im Mittel $-1{,}5^{\circ}$ C. Die Grösse der Nachwirkung ist

hier eine geringere, weil auch die Deformation des Stabes eine kleinere war, als die des in Labrador untersuchten. Die erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle und in Fig. 6 dargestellt.

Zeit	Ablesung an der Scala	Differenz per Minute
11h 19m 45s {	belastet 10,0	
	entlastet 40,0	30,0
11 20 0	47,0	7,0
— 21 0	50,0	3,0
— 22 0	50,8	0,8
— 23 0	51,3	0,5
— 24 0	51,6	0,3
— 25 0	51,8	0,2
— 26 0	51,8	0,0

Der Verlauf beider Curven ist ähnlich; beide zeigen, dass mit Entfernung der Belastung infolge der elastischen Nachwirkung anfänglich mit grosser Geschwindigkeit ein weiteres Zurückgehen erfolgt, das langsamer werdend den Stab in einen stationären Zustand überführt. Bei dem in Labrador angestellten Versuche ist dieser Zustand jedoch nach 12 Stunden Dauer scheinbar noch nicht erreicht.

2) Die Plasticität. Die bei den Messungen der elastischen Biegung beobachtete starke Deformation bewog mich, direct die Zähflüssigkeit des Eises zu untersuchen, indem ich nach der von Hrn. A. v. Obermayer angewandten Methode[1]) für einen Eiscylinder den Coëfficienten der inneren Reibung durch Pressung in der Richtung der Axe zu bestimmen suchte. Die ersten Versuche lieferten ein negatives Resultat. Ich verkleinerte alsdann den Radius des Cylinders auf 1 cm und beobachtete dann wirklich bei einem in der Richtung der Cylinderaxe wirkenden Drucke von 5 kg pro Quadratcentimeter bei Temperaturen zwischen -14 bis -20° C. eine von Stunde zu Stunde zu verfolgende Abnahme der Höhe des Cylinders. Die Messung wurde folgendermassen ausgeführt. Da die Anwendung eines Spiegelfühlhebels, wie der-

1) A. v. Obermayer, Wien. Ber. 75. p. 665 ff. 1877.

selbe zur Messung der elastischen Biegung benutzt wurde, aus verschiedenen Gründen nicht anwendbar war, so verfuhr ich so, dass ich ein leichtes Fernrohr (ich benutzte dazu das kleine Beobachtungsfernrohr eines Pistor und Martin'schen Reflexionskreises) auf einen Fühlhebel löthete; dieser hatte dieselbe Construction wie der oben beschriebene, sodass die ganze Vorrichtung aus einem auf 3 Nadelspitzen ruhendem Fernrohre bestand; zwei von ihnen α_1 α_2 standen auf einer festen Unterlage in einer in Glas geritzten Linie, die dritte Spitze β ruhte auf der oberen Platte, an welcher die Gewichte angriffen, mit denen der Eiscylinder gepresst wurde. Das Fernrohr des Fühlhebels (parallel dem von β auf α_1 α_2 gefällten Lothe) war auf eine 20 m entfernte senkrechte Scala gerichtet. Ein auf dieselbe Scala gerichtetes Versicherungsfernrohr gestattete, die Unbeweglichkeit der Unterlage zu controliren. Nimmt jetzt die Höhe des Cylinders ab, so sinkt die Spitze β des Fühlhebels; es erscheint ein anderer Theilstrich der Scala im Fadenkreuz. Aus der Differenz der Ablesungen an der Scala der Entfernung derselben von der Drehungsaxe des Fühlhebels (der auf das Glas geritzten Linie) und der Länge des Fühlhebels lässt sich dann in einfacher Weise der Werth finden, um welchen die Höhe des Eiscylinders abgenommen hat. Die Dimensionen des Fühlhebels wurden in der Weise gemessen, wie es oben beschrieben ist.[1])

1) Dieser einfache Apparat eignet sich auch mit einigen kleinen Hülfsvorrichtungen vorzüglich zu Messungen von Dicken und ersetzt, wie ich mich durch viele Versuche überzeugt habe, vollkommen die Mikrometerschraube. Für den Gebrauch bequemer ist es, wenn man dem Apparate die folgende Einrichtung gibt. An der horizontalen Drehungsaxe A (vgl. Fig. 7) eines Theodoliten (oder überhaupt eines um eine horizontale Axe drehbaren Fernrohres) ist ein Arm B (der Fernrohraxe parallel) angeschraubt der unten eine Spitze C trägt; dieser gegenüber steht auf einer festen Unterlage D (mit den Lagern der Umdrehungsaxe fest verbunden) eine Vorrichtung E, wie ich dieselbe in Wied. Ann. 3. p. 611 beschrieben habe; es führen also der Arm B und das Fernrohr bei einer Drehung um A die gleichen Bewegungen aus. Die Vorrichtung E ermöglicht, bei einer Bewegung der Spitze C gegen E den Augenblick des Contactes beider (ohne merklichen Druck aufeinander) mit grosser Präcision zu bestimmen. Das Fernrohr ist auf eine in Millimeter getheilte, entfernte, senkrechte Scala gerichtet. Da man den Abstand der Spitze C von der

Die hiermit angestellten Beobachtungen sind leider über das Stadium der Vorversuche nicht herausgekommen. Erst nachdem der Vorrichtung zum Pressen eine genaue Führung gegeben war, erhielt ich Resultate, welche die Erscheinung rein darstellten. Die Versuche erstrecken sich nur über 3 Tage (vom 16—18. April 1883.) (Von da ab war ich meiner obligatorischen Beobachtungen wegen an der Fortsetzung gehindert.) Der Eiscylinder hatte ursprünglich eine Höhe von 1 cm, der Radius betrug ebenfalls 1 cm. Die Belastung war 15 kg; gefunden wurde folgendes:

Dauer des Versuchs	Mittlere Temperatur	Abnahme der Höhe des Cylinders	
		im ganzen	in der Stunde
44,5h	−5,7° C.	0,041 mm	0,0009 mm
6,2	−2,5 "	0,103 "	0,017 "
3,4	−0,9 "	0,428 "	0,126 "

Man sieht, dass die Plasticität mit Annäherung der Temperatur an den Nullpunkt bedeutend zunimmt. Es ist dies bereits von Hrn. Pfaff aus seinen „Versuchen über die Plasticität des Eises[1]“ gefolgert worden. Dass das Eis auch bei tiefen Temperaturen noch plastisch ist, folgt aus den oben erwähnten directen Versuchen und aus der starken Deformation, welche die Stäbe bei der Bestimmung ihrer Elasticitätscoëfficienten zeigen.

3) Faseriges Eis. Bekanntlich bildet sich auf feuchtem Boden auf etwas geneigtem Terrain eine bestimmte Art Eis

Axe A nicht messen kann, so graduirt man den Apparat durch einen Körper (eine Glasplatte), dessen Dicke zwischen zwei bestimmten Marken mit dem Sphärometer gemessen ist. Bringt man zuerst C mit E in Contact und notirt den durch das Fernrohr anvisirten Theilstrich I, bringt dann den gemessenen Körper zwischen C und E und notirt wiederum den im Fadenkreuz erscheinenden Theilstrich II, so entspricht der bekannten Dicke des Körpers eine bestimmte Anzahl n von Theilstrichen; durch einfache Interpolation kann man alsdann die Dimensionen jedes anderen zwischen C und E gelegten Körpers bestimmen.

1) Pfaff, Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen. Heft 7. 1875. p. 72 ff.

das sogenannte faserige Eis.[1]) Dasselbe wuchs während des Winters in der Nähe der Missionsstation „Nain" an der Küste Labradors um 2—3 m. Es zeigte durchweg die faserige Structur; wie weit dasselbe in den Boden sich erstreckte, konnte ich nicht in Erfahrung bringen; jedenfalls verschwindet es während des Sommers nicht.

Phys. Inst. d. Univ. Freiburg i. B., 22. Febr. 1885.

IX. *Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herbert Tomlinson: Ueber den Einfluss von Spannung und Deformation*[2]) *auf die Wirkung der physikalischen Kräfte;*

von Dr. Andreas Miller in München.

Unter obigem Titel hat Hr. H. Tomlinson[3]) eine sehr umfangreiche Untersuchung publicirt, von der ich erst kurz nach der Veröffentlichung meiner Abhandlung: „Ein Beitrag zur Kenntniss der Molecularkräfte"[4]), und zwar aus einer Arbeit der Herren H. Götz und A. Kurz[5]) Kenntniss erhalten habe.

Die erstgenannte Arbeit zerfällt in 2 Theile, wovon nur der erste derselben, der vom Elasticitätsmodul handelt, hier in Betracht kommt. Obschon mir die bei meiner Untersuchung gemachten Erfahrungen Anlass geben, einige Punkte des erwähnten Theils der Arbeit von Tomlinson zu berühren, so ist doch nicht dieses der Grund, weshalb ich mir

---

1) Ueber die Structur desselben vergleiche: G. A. Koch im Jahrbuch f. Mineralogie 1877 p. 459 und Fr. Klocke in den Ber. über die Verh. der nat. Ges. in Freiburg. 7. p. 417 ff. 1879.

2) Stress und strain, vgl. Thomson und Tait, theoretische Physik deutsch. 1_1. p. XIII u. 1_2. p. XVI.

3) H. Tomlinson, Phil. Trans. 1883. p. 1.

4) A. Miller, Sitzungsb. d. math.-phys. Classe d. k. bayr. Acad. d. Wissensch. Hft. 1. 1885. p. 9.

5) H. Götz u. A. Kurz, Rep. d. Phys. 21. p. 78. 1885.

gestatte, die genannte Forschung einer kurzen Besprechung zu unterziehen, sondern ich beabsichtige vielmehr, auf einen Punkt hinzuweisen, der nicht über allen Zweifel erhaben sein dürfte, gleichwohl aber Tomlinson bei der Deutung seiner Versuchsergebnisse entgangen zu sein scheint.

Tomlinson bestimmt die longitudinale Elasticität verschiedener Metalle durch Anwendung eines Nonius und eines zusammengesetzten Mikroskops, wodurch eine Aenderung der Länge des Drahtes von 0,01 mm geschätzt werden konnte. Dadurch, dass der Nonius an dem zu prüfenden, der Maassstab an einem diesem ganz gleichen, constant belasteten Vergleichungsdraht angebracht war, hat Tomlinson den sonst die Versuche so sehr störenden Temperatureinfluss auf höchst einfache und sinnreiche Weise beseitigt.

Warum dagegen die Temperatur des untersuchten Drahtes von ihm gar nicht berücksichtigt worden ist, obschon er Versuchsergebnisse miteinander vergleicht, die sogar an verschiedenen Tagen erhalten wurden, dafür gibt er keinen Grund an. Auch wird nirgends gesagt, dass für constante Temperatur gesorgt gewesen sei. Bedenkt man aber, dass es sich hier um ganz kleine Differenzen handelt, auf welche Tomlinson seine Schlüsse basiren muss, und erwägt ferner, dass die Wärme die Elasticität ziemlich erheblich, in viel höherem Grade aber die elastische Nachwirkung beeinflusst, so muss das gänzliche ausser Acht lassen dieses Umstandes auffallen. Diese Unterlassung, zusammengehalten mit den Schlüssen, welche er aus seinen Versuchsergebnissen zieht, halte ich für geeignet, principielle Bedenken gegen manchen der ersteren zu erregen.

Weil nämlich Tomlinson die elastische Nachwirkung nicht berücksichtigt, aus diesem Grunde unterlässt er es vermuthlich auch anzugeben, wie lange nach jeder Be- und Entlastung des Drahtes er die Längenveränderung abliest: ob sogleich oder nach einer bestimmten Zeit oder beim Sicheinstellen irgend eines Kriteriums. Nur in dem Experiment VI — angestellt mit Kupfer — thut er dies, weshalb ich dieses, weil ein bestimmtes Urtheil zulassend, herausgreife und es unmittelbar unverändert folgen lasse.

Experiment VI.

Der Draht war einige Minuten mit einem Gewichte von etwas über 8 kg belastet; nach der Beseitigung desselben wurden folgende Beobachtungen gemacht.

1. Zahl der kg	2. Zeit nach der permanenten Elongation	3. Scalentheile	4. Aenderung der Länge
8	4 Minuten	5,80	
0	6 „	19,45	—13,65
8	8 „	5,95	+13,50
0	10 „	19,10	—13,15
8	12 „	5,80	+13,30
0	14 „	18,80	—13,00
8	16 „	5,75	+13,05
0	18 „	18,70	—12,95
8	20 „	5,68	+13,02
0	22 „	18,60	—12,92
8	17^h	5,65	
0	17^h 2^m	18,50	—12,85
8	— 4	5,60	+12,90

Hierzu bemerkt Tomlinson:

„Ein grosser Theil des hier beobachteten allmählichen Wachsens der Elasticität muss der Be- und Entlastung zugeschrieben werden. . . . Ein Theil nur rührt augenscheinlich von dem Einflusse der blossen Ruhe her. Dies wird am besten gezeigt, indem man für die verschiedenen Zeiten die Unterschiede zwischen den aufeinander folgenden + oder — Aenderungen nimmt.

Es ist auch zu beobachten, dass die + und — Werthe sowohl hier, als auch in den Versuchen über das Eisen unter dem Einflusse von Ruhe und der Be- und Entlastung allmählich gleich werden."

An einer früheren Stelle (Seite 6) findet sich: „Die in allen diesen Untersuchungen angewendete Schale (zur Aufnahme der Gewichte) wog 2 kg etc."

Aus der stufenweisen Abnahme der Werthe in Rubrik 4 schliesst also Tomlinson auf ein stufenweises Wachsen der Elasticität. Nun aber sehen wir aus den Zahlen der Rubrik 3 nach der ersten Ent- und Belastung ein fortgesetztes Längerwerden des Drahtes bei 0 + 2 kg Belastung und ebenso bei 8 + 2 kg, was auf eine Abnahme der Elasti-

cität deutet. Hier steht man augenscheinlich vor einem Widerspruch, denn nur bei der ersten Ent- und Belastung ist die Elasticität gewachsen, was übereinstimmend die Zahlen der Rubrik 3 und 4 bezeugen, dann aber zeigt die Rubrik 3 ein Fallen derselben zu einer bestimmten Grenze. Mit einer kleinen Streckung des Drahtes haben wir es hier nicht zu thun; denn für's erste war derselbe vor dem Versuche schon mit mehr als 8, resp. 8 + 2 kg belastet, und überdies könnte er, wie in diesem Falle, sich nicht wohl zuerst verkürzen und nachher wieder verlängern. Hier tritt uns höchst wahrscheinlich eine Nachwirkungserscheinung entgegen.

Um diesen Widerspruch zu lösen, ist zu berücksichtigen, dass die Metalle bei longitudinaler Deformation während der letzteren ihre Elasticität ändern. Ich habe dies in einer besonderen Abhandlung[1]) gezeigt und will hier nur einen Versuch daraus, wenn auch verkürzt, anführen. Bei demselben wurde die Dehnung mittelst eines Hebels bewerkstelligt. Die Last liess ich durch Anwendung einer Schraube succ. wirken. Die Messung der Verlängerung und Verkürzung des Drahtes geschah durch eine Spiegelablesung, die noch eine Schätzung von 0,001 mm gestattete. Die ständige Belastung des Drahtes während dieses Versuches war $\pi_1 = 8{,}117$ kg. Gedehnt wurde er mit $\pi_2 = 12{,}467$ kg so, dass die Gesammtbelastung bei fortgesetzter An- und Abspannung zwischen π_1 und $\pi_1 + \pi_2$ kg auf das Quadratmillimeter des Querschnittes schwankte. Abgelesen wurde beim Eintreten der Maximal- und Minimalspannung jedesmal sogleich. Die Länge des Drahtes war $d_1 = 1{,}091$ m, der Durchmesser $d = 0{,}686$ mm. Die Temperatur des Drahtes während des Versuches stieg von 7,68° auf 7,73° C. Der Einfluss der Temperaturänderung auf die Messung eliminirte sich durch die Messungsmethode von selbst. Eine Streckung des Drahtes war sicher nicht vorhanden. a_ν, b_ν, c_ν bedeuten die aufeinander folgenden (ν.) Scalenablesungen. Untersuchte Substanz: Kupfer Nr. II.

---

1) A. Miller, Sitzungsb. d. math.-physik. Classe d. k. bayr. Acad. d. Wissensch. 1885. p. 9.

ν	a_ν	b_ν	c_ν	$b_\nu - a_\nu$	$c_\nu - b_\nu$	$c_\nu - a_\nu$
1	−29,7	55,9	−28,1	85,6	−84,0	1,6
2	−28,1	56,1	−28,0	84,2	−84,1	0,1
3	−28,0	56,2	−27,9	84,2	−84,1	0,1
4	−27,9	56,3	−27,8	84,2	−84,1	0,1
5	−27,8	56,4	−27,7	84,2	−84,1	0,1

Unmittelbar nach Beendigung der ununterbrochenen Be- und Entlastung ist also bei der ständigen Spannung π_1 der Draht um $c_5 - a_1 = 2{,}0$ Scalenth. vorübergehend verlängert. Die Elasticität muss somit während des Versuches gesunken sein, obwohl am Schlusse die Verlängerungen und Verkürzungen $b_5 - a_5$ und $c_5 - b_5$, die den Belastungsänderungen augenblicklich folgen und sich beide ein und derselben Grenze nähern, kleiner sind als die erste Dehnung $b_1 - a_1 = 85{,}6$. Während der ersten Dehnung schon hat sich nämlich die Elasticität am stärksten vermindert, weshalb ausser π_2 sicher auch π_1 eine Verlängerungsmehrung erzeugen musste, von der $c_1 - a_1 = 1{,}6$ vermuthlich noch ein Rest ist. Diese Verlängerungsmehrung, herrührend von π_1, ist in $b_1 - a_1$ ebenfalls enthalten und höchst wahrscheinlich grösser als $c_1 - a_1 = 1{,}6$; sie wäre also von $b_1 - a_1$ abzuziehen, um auf die von π_2 wirklich erzeugte Dehnung zu kommen. Dasselbe findet bei $\nu = 2, 3, 4 \ldots$ etc. in sich verminderndem Maasse statt, bis $c_\nu - a_\nu$ der 0 sich nähert, was sich in dem vorstehenden Versuch weniger als in vielen anderen ausspricht. Man sieht, dass bei den Versuchen zur Bestimmung des longitudinalen Elasticitätsmoduls die ständige Belastung noch eine andere Rolle spielt, als die ihr gewöhnlich zugedachte des blossen Geradehaltens des Drahtes. Ich hielt es für falsch anzunehmen, die Elasticität habe sich successive erhöht, weil die Werthe der Verlängerungen $b_\nu - a_\nu$ successive abnehmen; das gerade Gegentheil, glaube ich, ist der Fall, solange die Werthe $c_\nu - a_\nu$ nur vorübergehend bestehen, also keine Streckungen stattfinden. Ebenso unrichtig hielt ich es, aus der Abnahme der Werthe der Verkürzungen $c_\nu - b_\nu$ auf eine Zunahme des Elasticitätsmoduls zu schliessen. Es geht dies schon aus der einfachen Ueberlegung hervor, dass ein Draht, der nach Entfernung der Belastung π_2 seine frühere Länge

wieder vollkommen annimmt, seine Elasticität während der Gestaltsänderungen nicht geändert hätte, indes ein Draht, der nach Beseitigung von π_2 sich gar nicht mehr zusammenzöge, entweder schon ursprünglich nicht elastisch, sondern nur ductil gewesen wäre oder während der Dehnung all seine Elasticität dauernd verloren hätte. Zieht er sich langsam zusammen, so stellt sich seine Elasticität ganz oder zum Theil wieder her. Aehnliche Erwägungen greifen Platz, wenn der Draht ursprünglich mit $\pi_1 + \pi_2$ belastet war und dann successive um π_2 entlastet wird. Wird nicht sogleich abgelesen, wenn die Maximal- oder Minimalspannung erreicht ist, wie Tomlinson in dem angeführten Versuche gethan hat und in anderen gethan zu haben scheint, so kann die Elasticitätsänderung während der Deformation in verschiedenem Sinne verlaufen, und wird nicht mit äusserster Vorsicht verfahren, so können die Versuchszahlen zu ganz unrichtigen Schlüssen verleiten. Dies ist in dem aus Tomlinson's Arbeit angeführten Versuch in der That der Fall, und der Schluss, den er daraus zieht, halte ich für mindestens höchst zweifelhaft. Tomlinson lässt, wie ich glaube mit Unrecht, bei der Bestimmung der Mittelwerthe die Dehnung beim Beginne des Versuches, deren Grösse von der der Verkürzungen aus den von mir oben angegebenen Gründen beträchtlich abweicht, vollständig ausser Rechnung. Er beachtet eben nach herkömmlicher Art ein Element der Erscheinung, die Nachwirkung, bei der Bestimmung der Elasticität, wie schon einmal erwähnt, gar nicht oder nicht in entsprechender Weise. Wie das nach meiner Ansicht passend geschehen könnte, habe ich in einer hier wiederholt citirten Abhandlung gezeigt.

Es scheint mir dem Begriff der Elasticität überhaupt nicht angemessen, sie, wie Tomlinson es öfters thut, nur aus der Ausdehnung bei der Belastung oder der Zusammenziehung des Drahtes nach der Entlastung desselben allein numerisch bestimmen zu wollen. Zur Beurtheilung des elastischen Verhaltens eines Körpers gehören offenbar beide in die Erscheinung tretenden Vorgänge zusammen. Würde man einen Draht belasten, ohne ihn nachher wieder zu entlasten,

so wüsste man gar nicht, ob und in welcher Art er elastisch ist; denn auf der Wiederherstellung der ursprünglichen Länge beruht der Begriff der Elasticität.

Die Herren Götz und Kurz haben in der bereits angezogenen Abhandlung andere Punkte der Arbeit Tomlinson's berührt. Ich bin weit entfernt, den hohen Werth seiner umfangreichen Forschung zu unterschätzen, glaubte aber darauf aufmerksam machen zu sollen, dass manche von Tomlinson aus seinen Versuchen im ersten Theil seiner Abhandlung gezogenen Schlüsse aus den hier angegebenen Gründen mit einiger Vorsicht aufzunehmen sein dürften.

X. *Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit; von Karl Strecker.*

(Fortsetzung von p. 273.)

IV. Methoden der galvanischen Widerstandsvergleichung.

Vergleichung von nahe gleichen Widerständen; Copirung der Widerstände der Normalröhren.

§ 21. Die Vergleichung der Copien mit den Quecksilberröhren wurde nach der Methode vorgenommen, welche F. Kohlrausch vor kurzem beschrieben hat.[1])

Ich benutzte dazu das Differentialgalvanometer, welches Hrn. Prof. Kohlrausch zu seinen Messungen gedient hatte; im Verlaufe meiner Untersuchung wickelte ich dasselbe von neuem und mit Sorgfalt, sodass ich Gleichheit der Wirkungen beider Hälften auf die Nadel bis auf 0,0001 und Gleichheit der Widerstände (von je 760 Q.-E.) bis auf etwa 9 Q.-E. erreichte; einen Widerstand von der letzteren Grösse, der aus demselben Kupferdraht wie das Galvanometer bestand und bifilar gewickelt war, fügte ich der Zuleitung zum Galvanometer bei und erreichte fast völlige Gleichheit der Widerstände beider Hälften.

---

1) F. Kohlrausch, Berl. Ber. 1883. p. 366; Wied. Ann. 20. p. 76. 1883.

Das Galvanometer enthielt zweimal 3000 Windungen in 68 Lagen; die Isolirung der beiden Galvanometerzweige war eine sehr vollkommene. Die Empfindlichkeit des Instrumentes war so gross, dass ein Strom von einem Daniell'schen Element in $2 . 10^7$ Q.-E., welcher durch eine Galvanometerhälfte ging, bei dem Scalenabstand von 3,5 m einen Ausschlag von 1 mm hervorbrachte.

Der Rheostat, den ich als Nebenschliessung zu dem grösseren der zu vergleichenden Widerstände verwandte, war ein älterer Siemens'scher Stöpselrheostat, dessen Correctionen sehr gering waren; seine Normaltemperatur lag nach meiner Messung bei 11°; sein Temperaturcoëfficient war nach meinen Bestimmungen gleich 0,0003. Da dieser Rheostat nur bei Temperaturen zwischen 8 und 17° benutzt wurde, die wichtigeren Messungen zudem zwischen 8 und 14° ausgeführt wurden, so habe ich eine Correction der am Rheostaten abgelesenen Widerstände auf richtige Quecksilbereinheiten unterlassen.

Der Rheostat konnte mittelst eines sechsnapfigen Commutators sowohl ausser jeder Verbindung gebracht, als auch durch einfaches Umlegen des Stromwenders dem einen oder dem anderen der zu vergleichenden Widerstände nebengeschaltet werden.

Um Erwärmung meiner Quecksilber- und Drahtwiderstände durch den Strom zu vermeiden, verwendete ich nur schwache Ströme, meist 1 Daniell oder 1 Smee in einem Stromkreise von 2 bis 8 Q.-E. Ging ein solcher Strom etwa eine Minute lang ununterbrochen durch die zu vergleichenden Widerstände (Quecksilber und Neusilber), so änderte er das Verhältniss derselben um mehrere Zehntausendtel; bei einer Dauer des Stromes von 8 Sec. betrug die Aenderung noch 0,0001 bis 0,0003; diese Veränderungen verschwanden nach Unterbrechung des Stromes in einigen Minuten wieder. Bei meinen Messungen wurde der Strom nur für Augenblicke geschlossen, auf etwa 0,1 bis 0,2 Sec., während 5 Min., der Dauer einer Bestimmung, etwa 20- bis 30 mal. Die durch einmaligen kurzdauernden Stromschluss hervorgerufene Erhöhung der Temperatur und damit Aenderung des Wider-

standes des Quecksilbers und des Neusilbers war jedenfalls so gering, dass sie nicht mehr bemerkt werden konnte; auch das häufigere Aufeinanderfolgen der Stromschlüsse hatte keinen bemerkbaren Einfluss, was ich durch öfter angestellte Controlbestimmungen nachwies.

§ 22. Die bei den Messungen nöthigen Stromleitungen wurden aus gewöhnlichem übersponnenem Kupferdraht hergestellt. Diejenigen Verbindungen von Drähten unter sich und mit den Commutatoren, welche während der verschiedenen Messungen nicht geändert werden sollten, waren durch Verlöthen hergestellt; die Löthstellen wurden zum Schutze gegen Quecksilber mit Schellack oder Collodium überzogen. Die auswechselbaren Verbindungen waren durch Kupfer- und Messingklemmen hergestellt; erstere wurden da verwendet, wo das Auftreten thermoelectrischer Kräfte zu Fehlern Veranlassung geben konnte.

Für die Drähte, welche die zu vergleichenden Widerstände mit dem Commmutator im Hauptstromkreis verbinden, hat F. Kohlrausch[1]) die Bedingung angegeben, dass die Summe der Widerstände des einen Paares derselben gleich sei der Summe der des anderen; diese Bedingung wurde sorgfältig erfüllt, ausserdem auch darauf geachtet, dass die Widerstände dieser Verbindungsdrähte nicht zu gross wurden gegen die zu vergleichenden Widerstände, und dass durch die Art, wie diese Drähte geführt wurden, sowohl eine Aenderung ihres Widerstandsverhältnisses durch Temperaturschwankungen im Beobachtungsraume als auch eine Fernewirkung des Stromes auf die Nadel des Galvanometers ausgeschlossen waren.

Die Stromzuleitungen zu dem Normalrohr wurden durch die angesetzten weiten Endgefässe vermittelt; in das in letzteren enthaltene Quecksilber tauchten je 2 Platinbleche und 1 Platindraht, der auf dem grössten Theile seiner Länge mit einem dünnen Glasröhrchen umgeben war und nur unten in einer kurzen Spitze heraustrat; dieser Draht bildete die Verbindung des Quecksilberrohres mit dem Galvanometer.

1) F. Kohlrausch, l. c. p. 470.

Die beiden Platinbleche versahen das eine die Verbindung mit dem Commutator des Hauptstromkreises, das andere die mit dem Rheostaten, wenn derselbe dem Quecksilberrohr zum Nebenschluss gegeben werden sollte.

Die sechs Platinelectroden waren in die aufgeschlitzten Enden von sechs dicken Kupferdrähten eingeklemmt, von denen je drei an einem Brettchen befestigt waren; die beiden Brettchen konnte man auf die Ränder des langen Wasserbades auflegen, und die Kupferdrähte waren so gebogen, dass dann die Platinelectroden in das Quecksilber der Endgefässe der Normalröhre eintauchten.

§ 23. Es genügt wohl auch, zwei solche Platinbleche, resp. Drähte für jedes Endgefäss zu nehmen, indem man die Abzweigung zum Rheostaten mit der Zuleitung des Hauptstromes oder mit der Abzweigung zum Galvanometer vereinigt; man hat dann nur an der beobachteten Differenz der zu vergleichenden Widerstände eine geringe Correction anzubringen. Ist nämlich Hg der Widerstand des Quecksilberrohres, δ die Summe der beiden kleinen Widerstände, welche auf jeder Seite zwischen dem Electrodengefäss und der Stelle liegen, wo die Abzweigung zum Rheostaten sich befindet, ist R' der bei dieser Verbindungsart beobachtete Widerstand, welcher dem Quecksilberrohr als Nebenschluss gegeben werden muss, so ist der bei streng richtiger Verbindung einzuschaltende Nebenschluss:

$$R = R'\left(1 - \frac{\delta}{Hg}\right).$$

Die weiter unten (§ 39) anzuführenden Werthe der Copien meiner Normaleinheiten sind zum Theil in dieser Weise corrigirt; die betreffenden Zahlen sind durch Sternchen gekennzeichnet. Die Correctionen waren meist unbeträchtlich; sie betrugen in 5 Fällen bis 0,00002, in 2 Fällen 0,00017 des Widerstandes. Eine Messung indess musste wegen zu hohen Betrages dieser Correction verworfen werden; deshalb fehlt in der genannten Tabelle einer der Werthe für eine Copie des Rohres Nr. 1. Später habe ich diese Unsicherheit durch Zufügen des dritten Platinbleches vermieden.

§ 24. Die Drahtwiderstände wurden auf folgende Weise in die Aufstellung eingefügt: an die Stellen der Electroden, wo die Widerstände der Rollen abgegrenzt waren, wurden Kupferklemmen angesetzt, welche je zwei 6 cm lange Stücke (ca. 0,7 mm starken) Kupferdraht trugen. Wenn die Widerstandsrollen in das Wasserbad gesetzt wurden, befanden sich die Kupferklemmen noch innerhalb des mit Filz ausgefüllten Raumes zwischen den Deckeln des Bades, während die Enden der Electroden und die der angeklemmten Drahtstücke aus der Umhüllung hervorragten. Die Enden der Electroden dienten zur Verbindung im Hauptstromkreis, während die dünneren Kupferdrähte die Abzweigungen zum Galvanometer und zum Rheostaten vermittelten.

§ 25. Der Gang einer Messung nach dieser Methode war der folgende:

Zunächst wurde das Quecksilberrohr durch Korkstopfen in den Endgefässen befestigt, die Korke selbst und die benachbarten Glastheile (zum Schutze gegen das Eindringen des Wassers in die Electrodengefässe) mit Collodium überzogen; darauf füllte man die Röhre mit Quecksilber und setzte sie in das oben (§ 14) beschriebene Wasserbad ein. Dann wurde der erwähnte 1 m lange Holzdeckel mit den beiden Thermometern auf das Bad gelegt, die Brettchen mit den Electroden an die passenden Stellen gebracht und der noch offene Theil des Wasserbades mit Glasscheiben gedeckt. Die mit dem Quecksilberrohr zu vergleichenden Drahtwiderstände waren schon mehrere Stunden vorher in das für sie bestimmte Wasserbad (§ 19) gebracht worden, in dem sich ebenfalls ein Thermometer befand. Nachdem nun alle nöthigen Verbindungen hergestellt worden, überliess man die ganze Aufstellung mindestens eine Viertelstunde lang der Ruhe; dann wurden die galvanischen Messungen ausgeführt, und schliesslich auf die oben (§ 12 u. 13) beschriebene Weise der Quecksilberinhalt des Rohres bestimmt.

Die Genauigkeit der Vergleichung nach dieser Methode war eine sehr grosse; jede einzelne Messung war mindestens auf 0,0001 sicher.

Als Beispiel gebe ich nachstehend eine vollständige Copirung.

Copirung des Rohres Nr. 5.

Thermometer, corrigirt		Nr. der Copie	Commutator im Hauptstr.	Rheostat im Nebenschluss			$W - Hg = \frac{Hg.W}{R}$	
Normalrohr	Copie			Temp.	Widerstand in Q.-E. R	bei	$\frac{1}{R}$	$\frac{Hg.W}{R}$
10,80 10,77	10,57	1	I	12,5°	3650	Copie ($= W$)	0,000 274	0,00038
			II		5000	Normalrohr ($= Hg$)	0,000 200	
		2	II		2240	Copie	0,000 446	0,00705
			I		1085	„	0,000 921	
		3	I		1705	„	0,000 586	0,00362
10,81 10,79	10,59		II	12,5°	8600	„	0,000 116	

Temperatur des Quecksilbers, bezogen auf das Luftthermometer 10,79°
„ der Copien „ „ „ 10,58°

Wägung der Quecksilberfüllung (als Controlbestimmung anzusehen).

Scheinbares Gewicht gegen Messing . . . . . . 9,6904 g } bei 10,79°
Absolutes Gewicht (vgl. § 13) . . . . 9,6899 „ }
Absolutes Gewicht, reducirt auf 10° (vgl. Tab. I) 9,6910 „

Widerstand des Quecksilberrohres nach Tab. I bei 10,79° = 3,20991 Q.-E.

Widerstände der Copien:

	bei 10,58°	bei 10,00°
Nr. 1	3,20991 + 0,00038 = 3,21029	3,20907
„ 2	3,20991 + 0,00705 = 3,21696	3,21575
„ 3	3,20991 + 0,00362 = 3,21353	3,21307

Vergleichung von stark ungleichen Widerständen; Herstellung von Normaleinheiten.

§ 26. Von den Copien meiner Normalröhren habe ich eine Anzahl von Normaleinheiten abgeleitet. Die Vergleichung der letzteren mit den Copien geschah nach der Methode des Differentialgalvanometers, welche von Kirchhoff[1]) herrührt, aber von demselben nur kurz beschrieben worden ist. Durch dieses Verfahren wird das Verhältniss zweier Wider-

1) G. Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. p. 601. — Wied. Ann. **13.** p. 410. 1881.

stände mit grosser Schärfe bestimmt. Angesichts der Bedeutung, welche infolge dessen der Methode zukommt, möge es mir gestattet sein, bei der Mittheilung meiner Erfahrungen über dieselbe etwas länger zu verweilen.

Bei der genannten Methode werden die beiden Galvanometerhälften den zu vergleichenden Widerständen zu Nebenschliessungen gegeben und in dieselben Nebenschliessungen zwei Rheostaten eingefügt. Seien die Widerstände der Galvanometerhälften gleich und $= G$; die beiden zu vergleichenden Widerstände seien W und w, und $W = nw$. Die Rheostatenwiderstände, welche in die Nebenschliessung zu W eingeschaltet werden, mögen mit R, die im Nebenschluss zu w mit r bezeichnet werden. Seien i_1 und i_2 die Intensitäten in den beiden Galvanometerzweigen, I die Intensität des unverzweigten Hauptstromes, so ist:

$$i_1 = I \cdot \frac{W}{W + G + R}, \quad i_2 = I \cdot \frac{w}{w + G + r}.$$

Wenn $i_1 = i_2$ ist, so bleibt die Nadel in Ruhe; dann ist $W : w = G + R : G + r$. Einen der Rheostatenwiderstände darf man willkürlich wählen; nehme ich r einmal $= 0$ und einmal $= r$, so erhalte ich 2 Gleichungen:

$$W : w = G + R_0 : G$$

und $$W : w = G + R_0 + R : G + r,$$

also auch: $$W : w = R : r = n.$$

Der Widerstand r bleibt noch so zu wählen, dass die Empfindlichkeit der Methode ein Maximum wird. Bei der Bestimmung, welche die Gleichung:

$$W : w = G + R_0 + R : G + r$$

lieferte, war: $$i_1 = i_2 = I \cdot \frac{w}{w + G + r}.$$

Wird einer der Rheostatenwiderstände R und r um einen Bruchtheil geändert, so sind die Intensitäten i nicht mehr gleich; man beobachtet dann am Galvanometer einen Ausschlag, welcher proportional ist der Differenz:

$$i_1 - i_2 = Iw \cdot \left[\frac{1}{w + G + r(1 + \delta)} - \frac{1}{w + G + r}\right],$$

und r ist so zu wählen, dass der beobachtete Ausschlag der Galvanometernadel ein Maximum wird. Differenzirt man den Inhalt der Klammer nach r, so erhält man:

$$-\frac{1+\delta}{[w+G+r(1+\delta)]^2}+\frac{1}{[w+G+r]^2}$$

und indem dies = Null gesetzt wird:

$$r = G + w.$$

Wenn G gegen die vergleichenden Widerstände W und w gross ist, so hat man also:

$$r = G$$

zu wählen, um eine möglichst grosse Empfindlichkeit zu erreichen. Zu demselben Resultate bin ich auch auf experimentellem Wege gelangt. — Bei meinen Messungen war $G = 760$, $r = 700$ Q.-E.

§ 27. Extraströme. Um mit der angegebenen Methode eine grosse Genauigkeit erreichen zu können, musste man ein Differentialgalvanometer von sehr vielen Windungen verwenden; dies brachte aber einen Uebelstand mit sich, welcher den durch Anwendung eines Multiplicators von grosser Windungszahl erstrebten Zweck zu vereiteln drohte.

In den beiden Zweigen des Differentialgalvanometers entstehen beim Schliessen und Oeffnen des Stromes durch wechselseitige und Selbstinduction electromotorische Kräfte, und zwar werden in jeder Galvanometerhälfte zwei electromotorische Kräfte von entgegengesetztem Vorzeichen und nicht ganz gleicher Grösse inducirt; in jedem Zweige bleibt also die Differenz dieser beiden Kräfte übrig, und die beiden übrig bleibenden Kräfte (in jedem Zweig eine) sind einander gleich. Da nun jeder Galvanometerzweig durch den Widerstand, dessen Nebenschluss er bildet, zu einem Stromkreise geschlossen ist, so erzeugen die beiden gleichen inducirten electromotorischen Kräfte Ströme, deren Intensitäten den Widerständen der Stromkreise, also auch den zu vergleichenden Widerständen umgekehrt proportional sind. Für das Verhältniss 1:1 heben sich die Wirkungen auf die Nadel auf, aber schon bei 1,2:1 ist der Inductionsstoss deutlich merkbar.

Ich versuchte, die störende Induction zu compensiren, indem ich eine unifilar gewickelte Drahtrolle in die eine Nebenschliessung einschaltete, dann auch einen Eisenstab in die Rolle einlegte, u. dgl. mehr. Alle diese Versuche führten indess zu umständlichen Operationen und gaben nicht genügende Sicherheit für die Richtigkeit der Messung.

§ 28. Aenderung der Kirchhoff'schen Methode. Ich musste deshalb zu einer Aenderung der Aufstellung greifen; durch dieselbe wird die Kirchhoff'sche Anordnung in eine Brückencombination verwandelt.

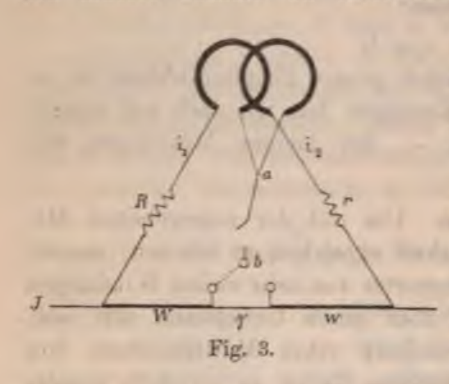


Fig. 3.

Die beiden zu vergleichenden Widerstände W und w sind durch den Widerstand γ, welcher der Bequemlichkeit wegen klein gegen W und w gewählt werden mag, verbunden; die beiden Galvanometerdrähte, welche an die einander zugewandten Enden der zu vergleichenden Widerstände angesetzt werden sollen, werden von a an gemeinsam geführt, und das gemeinsame Ende der beiden Drähte wird mit Hülfe eines dreinapfigen Commutators einmal an das eine und dann an das andere Ende von γ angesetzt. Die gemeinschaftliche Strecke ab (die Brücke) enthält einen Unterbrecher.

Ist der letztere offen, und wird der Hauptstromkreis geschlossen, so befinden sich die beiden Galvanometerhälften hinter- und gegeneinander im Nebenschluss zu $W + \gamma + w$; dann bleibt, Gleichheit der Wickelung beider Galvanometerzweige vorausgesetzt, die Nadel in Ruhe. Wird nun der Unterbrecher in ab geschlossen, so erfolgt kein Ausschlag der Nadel, wenn die Widerstände der Nebenschliessungen, in denen sich die Galvanometerzweige befinden, sich verhalten wie die zu vergleichenden Widerstände, d. h. einmal wie

$W : w + \gamma$ und einmal wie $W + \gamma : w$. Wir bestimmen also auf diese Weise:

$$W + \gamma : w = \frac{R}{r} = n_1, \quad W : w + \gamma = \frac{R'}{r} = n_2.$$

Setzt man $(n_1 + n_2)/2 = n$, so hat man hieraus:

$$W : w = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{R + R'}{2} + \frac{R - R'}{2} \cdot \frac{n - 1}{n + 1} \right].$$

Der Verbindungswiderstand γ wird vollständig eliminirt; man kann ihn aus den gegebenen Gleichungen ebenfalls berechnen zu:

$$\gamma = \frac{R - R'}{r} \cdot \frac{w}{n + 1}.$$

γ betrug bei meinen Vergleichungen meist 0,00024 bis 0,00036, in mehreren Fällen jedoch bis 0,015 Q.-E.; je grösser man γ nimmt, desto umständlicher werden Beobachtung und Rechnung.

§ 29. Das Differentialgalvanometer, welches ich benutzte, war das oben (§ 21) beschriebene von zweimal 3000 Windungen; ich habe schon hervorgehoben, dass die Wirkung der beiden Galvanometerzweige auf die Nadel fast gleich war; die geringe Ungleichheit von etwa 0,0001 compensirte ich durch 2 Drahtwindungen, welche verschiebbar auf dem Gestell des Galvanometers angebracht waren. Um noch geringere Ungleichheiten der beiden Galvanometerzweige — hervorgerufen durch Verziehen des Holzes, Aenderungen des magnetischen Meridians, welche auf die Wirkung der Correctionswindungen von Einfluss waren — zu eliminiren, diente ein Commutator, der die beiden Galvanometerzweige in Bezug auf die zu vergleichenden Widerstände vertauschte.

Die beiden Rheostaten, welche in die Nebenschliessungen der zu vergleichenden Widerstände eingeschaltet waren, befanden sich der Gleichheit der Temperatur wegen in einem gemeinschaftlichen Kasten; ich hatte nämlich in den Siemens'schen Stöpselrheostaten, von dem schon weiter oben die Rede war (§ 21), noch eine Widerstandsrolle von 700 Q.-E. eingesetzt, welche ebenfalls durch Stöpselung aus- und eingeschaltet werden konnte. Der Draht, aus dem diese Rolle

bestand, hatte denselben Temperaturcoëfficienten, wie die Widerstände des Rheostaten.

Der Siemens'sche Rheostat lieferte Widerstände von 0,1 bis 11111 Q.-E. Ich führte 3 Calibrirungen desselben aus, zwei bei 12° und eine bei 23°, welche sehr gut übereinstimmten und keine Verschiedenheit in den Temperaturcoëfficienten der Widerstände des Rheostaten erkennen liessen. Ich nahm aus den 3 Bestimmungen das Mittel und berechnete eine für alle Temperaturen gültige Correctionstabelle. Die Fehler, mit denen infolge der vorhandenen geringen Unsicherheit der Calibrirung die Widerstandsvergleichung behaftet sein kann, betragen höchstens 0,00003.

Die von mir angefertigte Correctionstabelle stimmte fast genau überein mit derjenigen, welche Hr. Prof. Kohlrausch 2 Jahre vorher festgestellt hatte. Man brauchte also auch nicht zu fürchten, dass die neue Tabelle infolge späterer Aenderungen des Rheostaten unbrauchbar würde.

§ 30. Bestimmung von r. Der Widerstand r wurde häufig mit einem ihm nahe gleichen Widerstand aus dem Siemens'schen Rheostaten verglichen; ich benutzte dazu sowohl die Wheatstone'sche Brücke, als auch ein anderes Verfahren, welches ich nun beschreiben will.

Vergleicht man nach der Methode, welche ich eben auseinandergesetzt habe, zwei nahe gleiche Widerstände, so erhält man:

$$\frac{W}{w} = \frac{R + R'}{2r},$$

indem das zweite Glied der rechten Seite unserer Formel aus § 28 verschwindet; kann man ausserdem W und w ohne Widerstand verbinden, so wird die Gleichung noch einfacher, weil dann $R = R'$ ist.

Nachdem diese Bestimmung ausgeführt ist, vertauscht man die beiden Rheostaten in den Nebenschliessungen miteinander, sodass nun r sich neben w befindet; nun bestimmt man:

$$\frac{W}{w} = \frac{2r}{R_1 + R_1'}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division:

$$\frac{(R+R')(R_1+R_1')}{4r^2}=1, \qquad r=\tfrac{1}{2}.\sqrt{(R+R')(R_1+R_1')}.$$

Bei der Vorrichtung, welche ich zu dieser Bestimmung von r gebrauchte, waren W und w ohne Widerstand verbunden; also hatte ich die einfachere Formel:

$$r=\sqrt{R.R_1}$$

anzuwenden.

Bestimmungen dieser Art führte ich zu verschiedenen Zeiten aus. Die Resultate stimmten vollkommen mit denen, welche ich durch Anwendung der Wheatstone'schen Brücke erhielt. Die Genauigkeit, welche erreicht werden kann, ist sehr gross; 7 Bestimmungen, welche ich innerhalb 6 Tagen anstellte, lieferten für r Werthe zwischen 700,10 und 700,14. Dieser Widerstand änderte sich aber langsam mit der Zeit, sodass es nöthig war, denselben bei jeder Messung von neuem zu bestimmen; die Veränderungen betrugen indess nur einige Zehntausendtel des Ganzen in einem Zeitraum von mehreren Monaten.

§ 31. Der Stromschlüssel, welchen ich bei diesen Messungen gebrauchte, bestand aus einem federnden Brettchen, in welchem zwei amalgamirte Kupferdrähte befestigt waren. Die letzteren tauchten beim Niederdrücken der Holzfeder in zwei Qecksilbernäpfe. Die beiden Unterbrechungsstellen, welche ich mit Hülfe dieser Einrichtung erhielt, befanden sich im Hauptstromkreis und in der Brücke, und die Stellung der eintauchenden Kupferdrähte, sowie die Menge des Queksilbers in den Näpfen war so gewählt, dass zuerst der Hauptstrom und unmittelbar darauf die Brücke geschlossen wurde; die umgekehrte Folge fand beim Oeffnen des Stromkreises durch Loslassen des federnden Brettchens statt.

§ 32. Nachstehend gebe ich eine vollständige Vergleichung zweier Widerstände nach dieser Methode. Der Commutator A, B vertauschte die beiden Galvanometerhälften; derjenige, dessen Stellungen durch 1, 2 bezeichnet sind, ist der dreinapfige Commutator der Figur in § 28, und der Commutator a, b vertauscht bei der Bestimmung von r die Rheostaten in den Nebenschliessungen. Die in den Neben-

schliessungen den Galvanometerzweigen zugefügten Widerstände sind in der mit „Rheostaten" überschriebenen Spalte enthalten.

Besimmung von r.

Commutatoren		Rheostaten		R	r
A	a	5,98	0		
	b	13,26	0		
	b	716,72	r	703,46	$r = \sqrt{703{,}46 \cdot 696{,}87}$
	a	702,85	r	696,87	$= 700{,}156$
B	a	0,98	0		
	b	8,28	0		
	b	711,67	r	703,39	$r = \sqrt{703{,}39 \cdot 696{,}89}$
	a	697,87	r	696,89	$= 700{,}131$

$r = 700{,}14.$

Vergleichung der Copie Nr. 1 des Normalrohres Nr. 5 (vgl. § 25) mit der Normaleinheit Nr. 6.

Temp. von W u. w	Commutatoren		Rheostaten		R		
11,09°	A	1	1715,56	0			
	A	2	1716,52	0			
	B	2	1718,54	0			
	B	1	1717,44	0			
	B	1	3967,19	700,14	2249,75	2250,20	$R = 2250{,}69$
	B	2	3969,19	700,14	2250,65		
	A	2	3967,24	700,14	2250,72	2250,20	$R' = 2249{,}71$
11,09°	A	1	3965,24	700,14	2249,68		

$\frac{R+R'}{2} = 2250{,}20;\quad \frac{R-R'}{2} = 0{,}49;\quad \frac{W}{w}$ näherungsweise $= 3{,}21,$

$$\frac{W}{w} = \frac{1}{700{,}14} \cdot \left(2250{,}20 + 0{,}49 \cdot \frac{2{,}21}{4{,}21}\right) = 3{,}21443,$$

gemeinschaftliche Temperatur von W und $w = 11{,}09°$. Die Temperaturcoëfficienten sind gleich:

W (nach § 25) bei 10,00° $= 3{,}20907$ Q.-E.

w (Normaleinheit Nr. 6) bei 10,00 $= \frac{3{,}20907}{3{,}21443} = 0{,}99833$ Q.-E.

§ 33. Prüfungen. Zur Prüfung der abgeänderten Methode verglich ich 3 Widerstände, welche nahe gleich 1 Q.-E. waren, auf drei verschiedene Arten miteinander:

1. Nach der Methode von Kohlrausch mit übergreifendem Nebenschluss.

2. Nach der ungeänderten Kirchhoff'schen Methode.

3. Nach der in eine Brückencombination verwandelten Kirchhoff'schen Methode.

Die drei verglichenen Einheiten seien mit I, II, III bezeichnet; es wurde gefunden:

	Methode 1	Methode 2	Methode 3
I : II	1,00149	1,00151	1,00149
II : III	1,00181	1,00172	1,00183
I : III	1,00331	1,00339	1,00335

Ausserdem wurden mehrmals nach der mit 3 bezeichneten Methode drei ungleiche Widerstände a, b, c miteinander verglichen und folgende Verhältnisse gefunden:

	$a:b$	1,85926	1,38217	1,86163	1,85955
beobachtet:	$c:a$	1,25595	2,76582	1,25393	1,25304
	$c:b$	2,33532	3,82319	2,33433	2,33026
berechnet:	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}$	2,33514	3,82283	2,33435	2,33009

Die Zahlen der letzten Zeile, welche durch Multiplication der in den beiden ersten Zeilen stehenden Grössen erhalten worden sind, sollten mit den Werthen der dritten Zeile identisch sein; die Abweichungen betragen weniger als 0,0001, finden aber grösstentheils im gleichen Sinne statt. Man könnte wohl vermuthen, dass hier ein einseitiger Fehler vorliegt, der in der Methode oder in den verwendeten Instrumenten begründet ist.

Ich habe noch eine grosse Anzahl von Messungen nach dieser Methode ausgeführt, welche etwas anders angeordnet waren. Ich verglich nämlich 3 Paare von Einheiten (meine Normaleinheiten) mit den Copien der Quecksilberröhren nach folgendem Schema: Bedeutet C die Copie und I_a, I_b die zu einem Paare gehörigen Einheiten, so bestimmte ich die Verhältnisse C/I_a und C/I_b nach der Kirchhoff'schen Methode und dann $I_a:I_b$ mit übergreifendem Nebenschluss. Aus $C:I_a$ und $C:I_b$ konnte nochmals $I_a:I_b$ berechnet werden. Solcher Sätze von je 3 Vergleichungen erhielt ich zwölf. Die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechne-

ten Werthen für dieselben Verhältnisse I_a/I_b betrugen meist mehrere Hunderttausendtel und gingen sogar bis zu 0,00013 hinauf. Da bei dieser Anordnung einseitige Fehler in den Bestimmungen nach der Kirchhoff'schen Methode die Werthe von $C:I_a$ und $C:I_b$ auf gleiche Weise beeinflussen, im Quotienten daher verschwinden müssten, so hat man einen Maasstab für die Genauigkeit an den Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Werthen des Verhältnisses $I_a:I_b$; dieselben zeigen, dass der Fehler einer Bestimmung nach dieser Methode etwa die Hälfte des beobachteten grössten Unterschiedes zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werthe für $I_a:I_b$ beträgt, d. i. etwa 0,00007.

Die oben bemerkten Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Werthen desselben Verhältnisses, welche grösstentheils in demselben Sinne ausfielen und deshalb zur Vermuthung eines einseitigen Fehlers in der Methode veranlassten, betragen bis 0,00008; jede derselben ist die Summe der Fehler von 3 Einzelbestimmungen, deren jeder 0,00007 ausmachen kann; man wird also die Ursache der Erscheinung, dass der grösste Theil jener Differenzen dasselbe Vorzeichen hat, nicht in einem einseitigen Fehler der Methode, als vielmehr in der zufälligen Combination der Fehler der Einzelbestimmungen zu suchen haben.

Nach dem Gesagten glaube ich die Genauigkeit einer einzelnen Messung nach der abgeänderten Kirchhoff'schen Methode auf 0,0001 angeben zu dürfen.

§ 34. Commutator. Um bei meinen Widerstandsvergleichungen rasch von einer der angewandten Methoden zur anderen übergehen zu können, verwendete ich einen Commutator, welcher mir erlaubte, durch eine einzige Drehung, ohne Aenderung eines Drahtes, die Aufstellung zur Vergleichung mit übergreifendem Nebenschluss in die zur Vergleichung nach der Kirchhoff'schen Methode zu verwandeln. Ich will mich begnügen, den Zweck dieses Commutators anzugeben und die Einfachheit seiner Handhabung hervorzuheben; eine Beschreibung würde zu viel Raum beanspruchen.

V. Hülfsbestimmungen.

§ 35. Einfluss der Art der Aufbewahrung und des Gebrauches des Quecksilbers auf das Leitungsvermögen des letzteren.

Ich verglich wiederholt, meist ohne Wägung des Quecksilberinhaltes, das Normalrohr Nr. 3 mit einer seiner Copien. Ich fand für den Widerstand der letzteren, wenn ich den des Rohrs aus Tab. I entnehme, fast unverändert dieselben Zahlen, obgleich ich gebrauchtes und ungebrauchtes, frisch destillirtes und längere Zeit aufbewahrtes Quecksilber zur Füllung der Röhre verwendete. Folgendes sind die Beobachtungen:

29.–30. Juni 1883.

Quecksilberfüllung des Normalrohrs	Widerstand der Copie bei 17°
Destillat vom 19. Februar 1883, ungebraucht	1,38325 Q.-E.
dasselbe Quecksilber aus dem Rohr ausgesaugt und wieder eingefüllt	1,38325 „
Wiederholung desselben	1,38315 „
Destillat vom 28. Juni 1883, ungebraucht	1,38317 „
aus derselben Flasche wie voriges, ungebraucht . . .	1,38317 „
dieselbe Füllung, nachdem das Rohr 5 St. im Wasserbad gestanden	1,38315 „
nach weiteren 13 Stunden	1,38317 „
gleich nachher	1,38322 „
Destillat vom 20. Februar 1883, ungebraucht	1,38318 „
8. August 1883.	
Destillat vom 1. August 1883, ungebraucht	1,38317 „
aus derselben Flasche, ungebraucht	1,38315 „
Destillat vom Februar 1883, ungebraucht	1,38325 „
Destillat vom 25. Juni 1883, ungebraucht	1,38310 [1]) „

Später füllte ich das Rohr Nr. 2 mit Quecksilber, indem ich das frische Destillat unmittelbar aus dem Destillationsapparat in das eine Endgefäss des Rohrs einfliessen liess; nachdem ich die 3 Copien des Rohrs mit letzterem verglichen hatte, entleerte ich das Rohr auf die gewöhnliche

1) Bei dieser Bestimmung wurde der Quecksilberinhalt des Rohrs Nr. 3 um 0,00016 geringer gefunden, als in Tab. I angegeben. Vgl. § 13.

Weise und wiederholte die Manipulationen des Einfüllens und Entleerens zehnmal. Als das Quecksilber zum elften mal in das Rohr eingefüllt worden war, wiederholte ich die Vergleichung. Die Resultate sind:

Copie	Widerstände der Copien bei 10°	
	ungebrauchtes Hg	gebrauchtes Hg
Nr. 1	1,00052	1,00057
„ 2	0,99907	0,99911
„ 3	0,99747	0,99754

Im Juni 1884 verglich ich das Rohr Nr. 4 mit seinen Copien, indem ich Quecksilber verwandte, welches im März desselben Jahres destillirt worden war; auf der Oberfläche des Metalls hatten sich Spuren eines schwärzlichen Häutchens gebildet, und ich wünschte zu erfahren, ob dies einen Einfluss auf das Leitungsvermögen habe. Nach dem älteren Destillat verwandte ich ganz frisch destillirtes Metall. Die Widerstände der Copien waren bei 15°:

Copie	Altes Destillat	Frisches Destillat	
Nr. 1	2,56752	2,56741	2,56744
„ 2	2,56844	2,56844	2,56855
„ 3	2,56757	2,56759	2,56761

§ 36. Luftgehalt des Quecksilbers. Schliesslich verglich ich noch das Leitungsvermögen von völlig luftfreiem, im Vacuum zum Sieden erhitzten Quecksilber mit demjenigen des mit Luft geschüttelten Metalls auf folgende Weise:

An die Enden eines Rohres von etwa 0,6 qmm Querschnitt und 15 cm Länge waren Erweiterungen angeblasen, durch deren Wände einige Platindrähte als Electroden führten; die eine Erweiterung stand durch eine Röhre in Verbindung mit einem kleinen cylindrischen Glasgefäss, das zur Aufnahme von Quecksilber diente, die andere setzte sich fort in eine Glasröhre, mittelst deren man die ganze Vorrichtung mit der Quecksilberluftpumpe verbinden konnte.

Zunächst wurde Quecksilber, welches in einer Glasflasche stark mit Luft geschüttelt worden, in den Apparat

gebracht und der Widerstand des Quecksilbers, welches die enge Röhre erfüllte, mit dem eines Neusilberdrahtes verglichen. Darauf pumpte ich die Luft aus dem Apparat aus, erhitzte das Quecksilber in dem am einen Ende der engen Röhre befindlichen Gefäss zum Sieden und schmolz das Metall luftfrei im Apparat ein. Nachdem ich nun die enge Röhre wieder mit dem Quecksilber angefüllt hatte, verglich ich abermals den Quecksilberwiderstand mit dem Neusilberdraht; nach Anbringung der wegen Temperaturänderungen nöthigen Correctionen blieb ein Unterschied von 0,00004 des Ganzen.

Die angeführten Zahlen beweisen, dass das Quecksilber in allen Fällen merklich dasselbe Leitungsvermögen hatte; die beobachteten geringen Differenzen, welche einer kleinen Vergrösserung des Leitungsvermögens durch den Zutritt der Luft entsprechen würden, lassen sich schon durch die Annahme eines Fehlers in der Temperaturbestimmung von 0,02 bis 0,04° völlig erklären.

Lenz[1]) findet einen ganz entschiedenen Einfluss des Zutrittes der Luft zum Quecksilber; er beobachtet dabei eine Abnahme des Leitungsvermögens. Seine Wahrnehmungen haben mich zu dem grösseren Theile der eben mitgetheilten Versuche veranlasst, deren Resultat mit dem seinigen nicht übereinstimmt. Auch Mascart, Nerville und Benoit[2]) haben keinen merklichen Unterschied im Leitungsvermögen des luftfreien und des mit Luft gemischten Quecksilbers gefunden.

§ 37. Veränderlichkeit des Leitungsvermögens des Quecksilbers mit der Temperatur. Zur Bestimmung der Temperaturcoëfficienten des Quecksilbers verwendete ich ein Glasrohr, dem ich eine für meine Aufstellung passende Gestalt gab. Das Rohr, von ca. 15 cm Länge und 1,1 Q.-E. Widerstand, war U-förmig gebogen; an seine Enden waren Erweiterungen angeblasen, in deren jede 3 Glasröhren mündeten, welche als Electroden dienten; diese 6 Röhren,

1) R. Lenz, Études électrométrologiques 1. 1884.
2) Mascart, Nerville und Benoit, l. c.

von verhältnissmässig grossem Durchmesser, liefen parallel und nahe neben einander und waren etwa 12 cm lang; nahe den oberen offenen Enden derselben waren Platindrähte durch die Glaswände durchgeschmolzen, welche die Verbindung zwischen dem Quecksilber und den kupfernen Leitungsdrähten der Aufstellung vermittelten. Die ganze Vorrichtung kam auf ein kleines Drahtgestell zu stehen, sodass die Biegung des Widerstandsrohres nach unten, die 6 Electrodenröhren senkrecht nach oben verliefen. Darauf wurde Quecksilber eingegossen, bis die erwähnten Platindrähte vollständig in das Metall eintauchten. Die offenen Enden der 6 Röhren wurden mit kleinen Korken verschlossen.

Den Widerstand dieses Rohres verglich ich bei verschiedenen Temperaturen mit einem Neusilberdraht von geringem Temperaturcoëfficienten, dessen Widerstand dem des Quecksilberrohres bei etwa 10° gleich war, nach der Methode des übergreifenden Nebenschlusses. Das Verhältniss der verglichenen Widerstände zu den Widerständen des Rheostaten, der als Nebenschluss diente, wurde mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt.

Die Resultate der einzelnen Messungen sind folgende:

Ist der specifische Widerstand des Quecksilbers bei 0° = 1, so ist derselbe, wenn die Temperaturen mit dem Luftthermometer gemessen werden, bei:

$$10^0 = \left.\begin{matrix} 1{,}00901 \\ 1{,}00905 \end{matrix}\right\} 1{,}00903 \qquad \begin{matrix} 15^0 = 1{,}01361 \\ 20 \quad\; 1{,}01818 \end{matrix}$$

Die Werthe der letzten Spalte lassen sich bis auf 0,000 015 genau darstellen durch:

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000\,900\,t + 0{,}000\,000\,45\,t^2$$

und auf 0,000 04 genau durch:

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000\,907\,t.$$

Unter Uebergehung der älteren Untersuchungen über die Abhängigkeit des specifischen Widerstandes des Quecksilbers von der Temperatur will ich zum Vergleich mit meinen Zahlen die Resultate einiger Bestimmungen aus den letzten zwei Jahren anführen; ich werde mir dabei erlauben, die meistens angegebenen scheinbaren Coëfficienten um den Betrag der Ausdehnung des Glases zu vermehren.

		absol. mittl. Coëff. bei 10°	15°
[1]) 1882.	Siemens und Halske	0,000 889	0,000 908
[2]) 1883.	Lord Rayleigh & Sidgwick (bei ca. 7°)	0,000 869	—
[3]) 1884.	Lenz und Restzoff	0,000 884	0,000 893
[4])	Mascart, Nerville und Benoit	0,000 895	0,000 906
	Strecker	0,000 909	0,000 914

Nur die Beobachtungen von Lenz und Restzoff und die meinigen beziehen sich auf das Luftthermometer; die anderen Zahlen sind mit einer Unsicherheit[5]) behaftet, welche leicht so viel betragen kann, als die Zahlen obiger Tabelle unter einander abweichen.

§ 38. Veränderlichkeit des Leitungsvermögens des Neusilbers mit der Temperatur. Auch für die von mir verwendeten beiden Sorten von Neusilberdraht habe ich die Temperaturcoëfficienten bestimmt. Von jeder Sorte wurde ein Stück von etwa 1 Q.-E. mit den Enden in starke Kupferelectroden eingelöthet; dicht an den Verbindungsstellen von Neusilber und Kupfer wurden an die Electroden je zwei dünnere Kupferdrähte angesetzt, welche die Abzweigung zum Galvanometer und die zum Rheostaten bildeten, sodass von dem Kupferdraht sehr wenig zu dem zu messenden Widerstand gehörte. Die Neusilberdrähte selbst wurden auf Stramincarton aufgenäht und in Form eines aufgeschnittenen Cylindermantels gebogen. Die 6 Electrodendrähte wurden durch einen Kork hindurchgesteckt und mit Siegellack befestigt; vermittelst dieses Korkes wurde die ganze Vorrichtung in ein Glas gesetzt, welches so weit mit Petroleum gefüllt war, dass der Widerstandsdraht völlig untertauchte; der Kork diente zugleich als Verschluss dieses Glases. Durch einen Rührer aus zwei concentrischen Ringen, dessen Stiel durch den Kork hindurchging, konnte die Flüssigkeit inner-

1) Siemens u. Halske, Reproduction de l'unité de résistance etc. 1882. — Electrotechn. Zeitschr. 3. p. 408. 1882.

2) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, l. c.

3) R. Lenz und N. Restzoff, Études électrométrologiques. 2. 1884.

4) Mascart, Nerville und Benoit, l. c.

5) R. Lenz und N. Restzoff, l. c. p. 4 und 5.

halb und ausserhalb des Cylindermantels, welchen der aufgenähte Neusilberdraht bildete, in Bewegung versetzt werden. In gleicher Höhe mit dem Neusilberdraht befand sich das Gefäss eines Thermometers, das ebenfalls von dem verschliessenden Kork getragen wurde. Dieses Glas mit dem Drahtwiderstande wurde in ein weites Wasserbad oder in Eis gesetzt; unter allen Umständen aber wurde nur die Temperatur des Petroleums gemessen.

Ich verglich die beiden Widerstände, welche bei mittlerer Temperatur einander gleich waren, miteinander nach der Methode des übergreifenden Nebenschlusses bei 0, 10 und 20°. Um die nöthige Genauigkeit zu erreichen, bestimmte ich die Grösse der erforderlichen Nebenschliessung in jedem Falle kurz vor der definitiven Messung; zu der letzteren wurde erst geschritten, wenn ich mich überzeugt hatte, dass die Temperaturen der Petroleumbäder während der zu einer Beobachtung nöthigen Zeit bis auf wenige Hundertelgrade constant blieben; kurz vor und sofort nach jeder galvanischen Messung wurden nach tüchtigem Rühren die Thermometer abgelesen und aus beiden Ablesungen für dasselbe Thermometer die Mittel genommen.

Die für dieselben Drahtstücke aus mehreren Messungen erhaltenen Coëfficienten stimmen sehr gut überein. Die für 10° berechnete Veränderung des Widerstandes ist danach bis auf mindestens 0,000 02 des ganzen Widerstandes sicher bekannt.

Ich habe darauf von der Drahtsorte, welche den grossen Temperaturcoëfficienten besitzt, eine grössere Anzahl von Stücken untersucht, welche von der Drahtrolle theils vor, theils während und theils nach Anfertigung meiner Drahtwiderstände genommen worden waren; diese Drähte besassen bis auf 1 Proc. denselben Coëfficienten.

Für die eine Drahtsorte von stark veränderlichem Leitungsvermögen habe ich den ersten und den zweiten Temperaturcoëfficienten ermittelt, für die zweite Sorte habe ich die Bestimmung eines mittleren Coëfficienten für ausreichend gehalten. Die Zahlen habe ich bereits oben (§ 18) angegeben.

Auf die kleinen durch Kupfer gebildeten Theile der Widerstände meiner Rollen (vgl. § 18) wurde genügende Rücksicht genommen.

VI. Resultate der galvanischen Messung.

§ 39. Ich gebe nun die Resultate meiner Widerstandsvergleichungen, welche für die Beurtheilung der Genauigkeit, welche in meinen Messungen erreicht worden ist, von Wichtigkeit sind.

Von meinen fünf Röhren besass ich im ganzen 15 Copien, von jeder Röhre 3, wovon je eine aus dem Neusilberdraht mit kleinen Temperaturcoëfficienten, zwei aus der älteren Sorte angefertigt waren.

Diese 15 Copien theilte ich in 3 Reihen, sodass jede Reihe von jeder Röhre eine Copie enthielt, und dass die Glieder einer und derselben Reihe aus derselben Drahtsorte bestanden.

Von jeder Reihe von Copien leitete ich ein Paar von Normaleinheiten ab; ich habe oben (§ 33) das Schema angegeben, nach dem ich bei diesen Vergleichungen verfuhr; ein Paar von Normaleinheiten wurde mit einer Copie einer Röhre in dasselbe Wasserbad (§ 19) gebracht; die Copie wurde mit jeder der Einheiten und dann die letzteren untereinander verglichen.

Für die Copirung eines Normalrohrs und für die Vergleichung einer Copie mit einer Normaleinheit habe ich bereits Beispiele mitgetheilt (§ 25 u. 32).

Die definitiven Vergleichungen wurden folgendermassen vorgenommen:

16. bis 18. Januar 1884. Vergleichung der 15 Copien mit den Normalröhren.

23. bis 29. Januar. Vergleichung der Copien mit den Normaleinheiten.

30. Januar bis 2. Februar. Wiederholung der am 16. bis 18. Januar ausgeführten Copirung.

Während sämmtlicher Messungen lagen die beobachteten Temperaturen zwischen 9,6 und 11,2°. Alle angegebenen Widerstände sind auf die Normaltemperatur von 10° reducirt.

Der erste Theil der nachfolgenden Tabelle enthält die Resultate beider Copirungen; ich habe der Berechnung der Werthe der Normaleinheiten die Mittel aus den Resultaten der Copirung zu Grunde gelegt; die grösste vorkommende Abweichung eines einzelnen Werthes für den Widerstand einer Copie vom Mittel beträgt 0,00005.

Der zweite Theil enthält die Werthe, welche ich für meine Normaleinheiten erhalten habe; wegen der Berechnung der Mittelwerthe vergleiche man die Bemerkung zu Tabelle I.

Tabelle II.

Widerstände der Copien der Normalröhren bei 10° in Q.-E.

	Rohr Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5
Erste Reihe	0,35820	1,00053	1,37470	2,55879	3,20904*
	0,35821	1,00052	1,37476	2,55858	3,20907*
Zweite Reihe	0,35821**	0,99907*	1,37705	2,55984	3,21573
		0,99906*	1,37708	2,55966	3,21575
Dritte Reihe	0,36061	0,99733**	1,37880	2,56388	3,21313
	0,36062	0,99733*	1,37892	2,56363	3,21307

* und ** corrigirte Werthe nach § 23. Die Correctionen betrugen bei den mit * bezeichneten Werthen bis 0,00002, bei den mit ** bezeichneten 0,00017 des Widerstandes

Widerstände der Normaleinheiten bei 10° in Q.-E.

	v. d. 1. Reihe d. Copien abgeleitete Normaleinheiten.		v. d. 2. Reihe d. Copien abgeleitete Normaleinheiten		v. d. 3. Reihe d. Copien abgeleitete Normaleinheiten	
	Nr. 6	Nr. 7	Nr. 10	Nr. 11	Nr. 24	Nr. 26
abgeleitet v. Rohr-Nr 1	0,99820	0,99647	0,99659	1,00403	0,99901	1,00273
" 2	0,99809	0,99640	0,99649	1,00382	0,99898	1,00280
" 3	0,99837	0,99658	0,99673	1,00422	0,99926	1,00300
" 4	0,99815	0,99643	0,99659	1,00398	0,99913	1,00286
" 5	0,99833	0,99651	0,99662	1,00404	0,99920	1,00299
Mittel	0,99827	0,99650	0,99663	1,00406	0,99916	1,00291

Eine (etwa 50 Tage) nach diesen Messungen angestellte Vergleichung einer Siemens'schen Doseneinheit mit 3 Normaleinheiten, welche durch unabhängige galvanische Mes-[illegible]n bestimmt worden sind, nämlich Nr. 7. 10. 26 ergab.

dass die Werthe dieser Einheiten bis auf 0,0001 genau in den Verhältnissen zu einander standen, welche durch die Mittelwerthe in der vorigen Tabelle angegeben werden.

§ 40. Um die Bedeutung des zweiten Theiles dieser Tabelle besprechen zu können, müssen wir die Entstehung der einzelnen Werthe dieser Tabelle vor Augen haben.

Die Zahlen einer und derselben wagerechten Zeile sind von demselben Rohr abgeleitet, und es liegen ihnen dieselben Copirungen der Röhre zu Grunde. Gemeinsam sind ihnen also die Fehler, welche bei der Calibrirung und Längenmessung der Röhre, bei der Bestimmung der Masse der Quecksilberfüllung und etwa bei der Füllung der Röhre zum Zwecke der Copirung gemacht worden sind.

Dem ersten Zahlenpaar einer Zeile, ebenso dem mittleren und dem letzten, liegt derselbe für die Copie der Normalröhre gefundene Werth zu Grunde; ein solches Paar von Zahlen hat also ausser den schon genannten Fehlern noch diejenigen gemeinsam, welche bei der Copirung der Röhre in der Temperaturbestimmung und bei den galvanischen Messungen gemacht worden sind.

Auf jede besondere Zahl kommen die Fehler, welche bei der Vergleichung der Copien mit den Normaleinheiten nach der modificirten Kirchhoff'schen Methode begangen worden sind.

Auf diese Weise setzen sich die Abweichungen der in einer und derselben senkrechten Spalte stehenden Zahlen zusammen; dieselben betragen bis 0,0004. Sucht man für die Zahlen der wagerechten Zeilen (d. i. für die von demselben Rohr abgeleiteten Werthe) die mittlere Abweichung der Einzelwerthe vom Mittel, so erhält man folgende Beträge:

	1.	2.	3.	4.	5. Zeile
Mittel – Einzelwerthe	+0,00008	+0,00019	–0,00010	+0,00006	–0,00003.

Diese Zahlen stellen ungefähr die Fehler dar, welche bei der Bestimmung der Dimensionen und der Calibercorrection der Normalröhren gemacht worden sind.

Ich glaube, dass die hauptsächlichste Fehlerquelle die

Bestimmung der Calibercorrection ist. Für die Röhren Nr. 3 und 5, deren Querschnitt sich verhältnissmässig wenig ändert, dürfte die Länge des zur Calibrirung benutzten Quecksilberfadens wohl klein genug sein, aber es scheint, als ob die Röhren Nr. 1, 2 und 4 so sehr veränderlichen Querschnitt besitzen, dass man mit den angewandten Mitteln noch immer ein zu kleines C erhält.[1]) Die mit den beiden guten Röhren Nr. 3 und 5 gemessenen Widerstände stimmen durchschnittlich auf etwa 0,000 07 überein, während die am meisten abweichenden Werthe (durch Nr. 2 und 3 erhalten) durchschnittlich um 0,0003 von einander verschieden sind.

Angesichts der geringeren Zuverlässigkeit der mit Rohr Nr. 2 (wo die Calibercorrection wahrscheinlich am unsichersten ist) bestimmten Werthe darf man dieselben bei Beurtheilung der Genauigkeit der Endresultate wohl ausser Acht lassen und annehmen, dass die Mittelwerthe für die Normaleinheiten auf 0,0001 richtig bestimmt sind.

§ 41. Fügt man die eben angegebenen Beträge als Correctionen den Werthen der Tabelle als Normaleinheiten zu, so entsteht eine neue Tabelle, in der die Zahlen einer senkrechten Spalte nur noch höchstens um 0,000 15 von einander abweichen. Die Hälfte dieser Grösse stellt also ungefähr den Betrag der Fehler dar, welche bei den galvanischen Messungen begangen worden sind.

Die Zufügung dieser Correctionen zu Einzelwerthen sehe ich an als eine Reduction auf den Mittelwerth meiner Bestimmungen der Quecksilbereinheit; dieser Mittelwerth ist derselbe, welcher den Mittelwerthen der Tabelle der Normaleinheiten zu Grunde liegt.

Indem ich dieselben procentischen Beträge den von einander völlig unabhängig berechneten Widerständen der Normalröhren in der letzten Spalte der Tab. I zufüge, erhalte ich die auf eine und dieselbe mittlere Einheit bezogenen Zahlen:

---

1) Man vgl. darüber Mascart, Nerville und Benoit l. c. p. 48, wo durch Versuche nachgewiesen wird, dass durch Wahl eines kürzeren Quecksilberfadens ein grösseres C erhalten wird.

Reducirte Widerstände der Normalröhren:

	Nr. 1	2	3	4	5
W_{10}	0,354 93	0,999 40	1,372 61	2,552 67	3,207 54 $\frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$ Hg von 0°.

Die mittlere Einheit, auf welche diese Zahlen bezogen sind, ist auf 0,0001 richtig.

Diese Einheit liegt den Messungen des folgenden Abschnittes zu Grunde.

VII. Vergleichungen der Einheit der British Association und der von Siemens und Halske ausgegebenen Einheit mit der von mir hergestellten Quecksilbereinheit.

§ 42. Die zur Vergleichung gelangenden Stücke waren:

Ein Widerstand von Neusilberdraht, welcher von Hrn. Glazebrook, Cavendish Laboratory, Cambridge, zu:

0,999 37 B.-A.-U. bei 17,7° C.

Mittel aus 2 Bestimmungen am 2. und 4. Februar 1884.

Temperaturcoëfficient 0,000 294

bestimmt war und:

2 Widerstände aus Neusilberdraht, welche von der Telegraphenbauanstalt Siemens und Halske in Berlin als:

1.. { 1,000 25 S.-E. bei 20° C. Mittel aus 10 Bestimmungen zwischen 19. März und 16. October 1883.
1,000 38 S.-E. bei 20° C. Mittel aus 2 Bestimmungen zwischen 15. und 21. Februar 1884.

Temperaturcoëfficient 0,00033 und

2.. { 1,999 72 S.-E. bei 20° C. Mittel aus 5 Bestimmungen zwischen 17. März und 25. October 1883.
1,999 71 S.-E. bei 20° C. Mittel aus 1 Bestimmung am 16. Februar 1884.

Temperaturcoëfficient 0,00035

ausgegeben wurden. Ich wähle für meine Vergleichungen die Werthe aus den neuesten Bestimmungen, indem ich annehme, dass kleine zeitliche Aenderungen der Widerstände vorliegen könnten.

Ausser diesen untersuchte ich noch vier Siemens'sche Einheiten in der gewöhnlichen Dosenform.

Im Folgenden theile ich die Resultate aller einzelnen Vergleichungen mit.

Die Messungen wurden am 11. bis 17. März 1884 bei Temperaturen zwischen 9,0 und 10,5° angestellt.

1. Die Einheit der British Association, ausgedrückt durch die Länge einer Quecksilbersäule von 0° und 1 qmm Querschnitt, ist gleich:

1,04898 m	aus der Vergleichung mit Rohr-Nr.	2[1]
1,04887 „	„ „ „ „ „	3
1,04891 „	„ „ „ „ „	} 5
1,04904 „	„ „ „ „ „	} 5

2. Die von Siemens und Halske ausgegebene Einheit ist ebenso gleich:

1,00010 m	aus der Vergleichung des Rohres Nr.	2[1]	} mit 1..
1,00003 „	„ „ „ „ „ „	3	} mit 1..
1,00010 „	„ „ „ „ „	} „ 5	} mit 1..
1,00012 „	„ „ „ „ „	} „ 5	} mit 1..
1,00017 „	„ „ „ „ „ „	3	} mit 2..
1,00030 „	„ „ „ „ „	} „ 5	} mit 2..
1,00034 „	„ „ „ „ „	} „ 5	} mit 2..

Die mitgetheilten elf Messungen sind Vergleichungen der oben beschriebenen Stücke, des Widerstandes der British Association und der Siemens'schen Normalrollen 1.. und 2.., mit meinen Quecksilberröhren.

Durch Vergleichung der beiden Siemens'schen Normalrollen fand ich, dass die Widerstände derselben nicht genau in dem Verhältnisse standen, welches ich aus den Angaben der Firma für meine Beobachtungstemperatur (10°) berechnete. Halte ich für die Rolle 1 den Werth 1,00038 S.-E. bei 20° C. fest, so wäre nach meinen Messungen der Widerstand von 2 bei 20° C.:

2,00007, 2,00017, im Mittel 2,00012 S.-E.

Unter derselben Voraussetzung lässt sich auch aus den mitgetheilten Vergleichungen der beiden Rollen mit Quecksilberröhren der Widerstand von 2.. berechnen zu

2,00009 S.-E. bei 20° C.

Die Vergleichung der vier Doseneinheiten, zum Theil mit

---

1) Bei der zu dieser und der ersten unter 2. folgenden Messung gemeinschaftlich gehörigen Auswägung der Röhre Nr. 2 wurde der Quecksilberinhalt um 0,000 18 kleiner gefunden, als in Tab. I angegeben.

Quecksilberröhren, zum Theil mit Normaleinheiten, ergab folgende Resultate:

Doseneinheit	Angabe der Firma	meine Bestimmung richtig bei
Nr. 2705	December 1882 richtig bei 15,6°	15,3°
„ 2706	„ 1882 „ „ 16,1	16,1
„ 2707	„ 1882 „ „ 17,1	17,0
„ 2674	Februar 1884 „ „ 19,5	19,4

Die Uebereinstimmung der von Siemens und Halske ausgegebenen Einheit und meiner Quecksilbereinheit befriedigt vollständig.

3. Endlich habe ich durch directe Vergleichung das Verhältniss der Einheit der British Association zu der von Siemens und Halske ausgegebenen Einheit gefunden wie folgt:

$$\frac{\text{B. A.}}{\text{S.-E. (Berlin)}} = \left.\begin{matrix}1{,}04895\\1{,}04881\end{matrix}\right\} \text{Vergleichung mit 1..}$$

$$\left.\begin{matrix}1{,}04864\\1{,}04867\end{matrix}\right\} \text{Vergleichung mit 2..}$$

Resultate:

$$\left.\begin{matrix}1\ \text{B. A.} = 1{,}04894\\1\ \text{S.-E. (Berlin)} = 1{,}00017\end{matrix}\right\} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}, \text{ Quecksilber von } 0^0.$$

$$1\ \text{B. A.} = 1{,}04877\ \text{S.-E. (Berlin)}.$$

Zum Vergleich gebe ich einige Zahlen aus den in der letzten Zeit angestellten Untersuchungen über denselben Gegenstand. Die Einheit der British Association ist nach:

	$\frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$, Hg von 0°	S.-E. (Berlin)
[1]) 1882: Lord Rayleigh und Sidgwick	= 1,04809	= 1,04860
[2]) 1884: Roiti	= 1,04859	= 1,04862
[3]) Mascart, Nerville und Benoit	= 1,04850	= 1,04847
Strecker	= 1,04894	= 1,04877

Hierzu ist zu bemerken, dass Roiti zur Vergleichung der B.-A.-Einheit mit m/mm², Hg von 0° einen von mir bestimmten Drahtwiderstand benutzte.

1) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, l. c.
2) Roiti, Nuov. Cim. (3) **15.** p. 97. 1884.
3) Mascart, Nerville et Benoit, l. c.

Nachtrag.

Nach Beendigung der vorstehenden Arbeit war es mir durch die Güte der Herren Geh. Reg.-Rath Dr. W. Siemens und Dr. Frölich ermöglicht, im Laboratorium der Telegraphenbauanstalt von Siemens und Halske in Berlin einige meiner Drahtwiderstände mit den Siemens'schen Quecksilberröhren zu vergleichen.

Ehe ich auf die Resultate meiner Messungen eingehe, will ich darauf hinweisen, dass die Formeln, nach denen Siemens und Halske die Widerstände ihrer Normalröhren berechnen, sich in zwei Punkten nicht unbeträchtlich von den meinigen unterscheiden.

Der Ausbreitungscoëfficient an den Enden der Quecksilberröhren ist dem Radius der Röhre proportional $= a.r$; Siemens und Halske setzen $a = 1$, während ich $a = 1,6$ nahm.[1]) Die Wahl des einen oder des anderen Werthes bedingt einen Unterschied von mehreren Zehntausendteln in den berechneten Widerständen.

Ausserdem haben Siemens und Halske für die Aenderung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers mit der Temperatur etwas andere Werthe gefunden als ich; setzt man den Widerstand einer mit Quecksilber gefüllten Glasröhre bei $0^0 = 1$, so ist der Widerstand bei t^0 (scheinbare Aenderung in Glas) nach Siemens und Halske[2]):

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000\,852\,3\,t + 0{,}000\,001\,356\,t^2$$

nach Strecker:

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000\,891\,5\,t + 0{,}000\,000\,45\,t^2.$$

Die nach diesen beiden Formeln berechneten σ_t zeigen bei etwa $21{,}5^0$ den grössten Unterschied mit 0,00032, während sie für etwa 40^0 gleich gross werden.

Um zu erfahren, wie genau die gegenwärtig im Gebrauche der Wissenschaft und Technik befindlichen, von Siemens und Halske ausgegebenen Widerstandseinheiten mit der von mir hergestellten Einheit übereinstimmen, wird man

1) Vgl. § 2 der vorstehenden Abhandlung.
2) Siemens und Halske, l. c.

diese beiden Unterschiede nicht weiter berücksichtigen, wie ich auch in der mitgetheilten Abhandlung gethan habe.

Meine neuerdings angestellten Vergleichungen, über welche ich jetzt berichten will, geben eine gute Bestätigung der am Schlusse meiner Abhandlung mitgetheilten Vergleichungen; ich fand nämlich, wenn ich für die Siemens'schen Quecksilberröhren die von der Firma angegebenen Capacitäten für 0^0 ansetzte und die Aenderung des Widerstandes nach der Siemens'schen Formel berechne, dass:

1 S.-E. (gegenwärtig im Gebrauch) = 1,00027 m/mm^2, Quecksilber von 0^0 (Strecker) ist.

Indess scheint es mir von Interesse zu sein, zu untersuchen, welches das Verhältniss der Siemens und Halske'schen Einheit zu der meinigen ist, wenn man von den Dimensionen der Normalröhren ausgehend dieselbe Formel für die Berechnung der Widerstandscapacitäten und dieselbe Formel für die Aenderung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers mit der Temperatur anwendet.

Solange es sich nur um das Verhältniss der beiden Einheiten, nicht um den richtigen absoluten Werth der Quecksilbereinheit handelt, brauchen wir uns nicht für die Richtigkeit der einen oder der anderen Formel zu entscheiden. Im vorliegenden Fall, wo die Ausbreitungswiderstände nur einen sehr geringen Theil der gesammten Widerstände ausmachen, erhalten wir bis auf 0,0001 dasselbe Resultat, ob wir durchgehends die Siemens'schen oder durchgehends meine Formeln anwenden. Es genügt also hier, wenn wir allen Berechnungen dieselben Formeln zu Grunde legen; die Wahl der Formeln selbst bleibt unserer Willkür überlassen. Ich werde der Einfachheit wegen die in meiner Abhandlung angegebenen Formeln (§§ 8. 16. 37) nehmen; nach diesen werden im Folgenden auch die Widerstände der Siemens'schen Normalröhren berechnet.

Ich gehe nun zur Beschreibung der angestellten Messungen über.

Vom 29. October bis 4. November 1884 führte ich im physikalischen Institut zu Würzburg die Vergleichung von fünf meiner Normaleinheiten (Nr. 6. 10. 11. 24. 26) unter

einander und mit Rohr Nr. 2 aus. Die Methode der Vergleichung war die Kohlrausch'sche des übergreifenden Nebenschlusses. Die fünf Röhren wurden jede mit jeder verglichen, um möglicherweise vorkommende spätere Veränderungen der Widerstände genau nachweisen zu können; bei der Vergleichung mit Rohr Nr. 2 wurde dem letzteren der auf das Mittel meiner Bestimmungen der Quecksilbereinheit reducirte Werth: $W_{10} = 0{,}99940$, nebst der Reductionsformel:

$$W_t = W_{10}[1 + 0{,}000\,892\,(t-10) + 0{,}000\,000\,45\,(t-12)^2],$$

zu Grunde gelegt; die Beobachtungstemperaturen lagen zwischen 11,1° und 11,5°. Bei diesen wie den folgenden Messungen wurden die Angaben der Quecksilberthermometer auf das Luftthermometer bezogen.

Vom 17. bis 22. November 1884 nahm ich die Messungen im Siemens'schen Laboratorium vor, wobei mich Hr. Sittig in dankenswerther Weise unterstützte. Die befolgte Methode war die der Wheatstone'schen Brücke. Ich verglich wieder meine fünf Rollen jede mit jeder, und dann Nr. 26. 24. 11 mit der Summe der Siemens'schen Quecksilberröhren Nr. 17 und 124, Nr. 10 und 6 mit Rohr Nr. 122; die Beobachtungstemperaturen lagen zwischen 14 und 16°. Die Capacitäten der Quecksilberröhren bei 0° sind (nach meiner Formel berechnet):

Rohr Nr.	17 bei 0°	0,34403 Q.-E.
„ „	122	1,01381 „
„ „	124	0,73833 „

Die Resultate der Vergleichungen sind folgende:

1. Vergleichung der Einheiten Nr. 6. 10. 11. 24. 26 untereinander; die Tabellen geben die beobachteten Differenzen in Hunderttausendteln der Quecksilbereinheit; die erste senkrechte Spalte jeder Tabelle enthält die Minuenden, die erste wagrechte Zeile die Subtrahenden.

bei 10°:

gemessen in Würzburg, 29. October bis 4. November 1884

	Nr. 26	−24	−6	−10
Nr. 11	86	461	573	733
26		374	490	650
24			119	277
6				159

gemessen in Berlin, 17. bis 22. November 1884

	Nr. 26	−24	−6	−10
Nr. 11	83	471	582	739
26		379	493	654
24			116	267
6				157

Die Widerstände der fünf Rollen wurden gefunden durch Vergleichung mit Quecksilberröhren zu:

bei 10°:

	Würzburg $\frac{m}{mm^2}$, Hg von 0° (Strecker)	Berlin S.-E. (nach der Umrechnung)	Differenz	
Nr. 11	1,00415	1,00499	0,00084	Vergleichung mit der Summe der Röhren Nr. 17 und 124.
„ 26	1,00324	1,00418	0,00094	
„ 24	0,99949	1,00046	0,00097	
„ 6	0,99837	0,99905	0,00068	Vergleichung mit Rohr Nr. 122.
„ 10	0,99679	0,99747	0,00068	
„ 11 + 26 + 24	3,00688	3,00963	Vergleichung mit Nr. 17 + 124	
„ 6 + 10	1,99516	1,99652	„ „ „ 122.	

1 S.-E. (nach der Umrechnung):

= 0,99909 $\frac{m}{mm^2}$, Hg von 0°; Vergleichung mit Nr. 17 + 124
= 0,99932 „ „ „ „ „ „ 122
Mittel 0,99920 „ „

XI. *Die Hochdruck-Influenz-Electrisirmaschine;* von *Walther Hempel.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 8 u. 9.)

Im Januar 1884 habe ich in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft einen Aufsatz veröffentlicht „über den Einfluss, welchen die chemische Natur und der Druck der Gase auf die Electricitätsentwickelung der Influenzmaschinen hat". Ich hatte damals gefunden, dass die Electricitätsmenge, welche eine Influenzmaschine erzeugt, sowohl abhängig ist von der Natur als dem Druck des Gases, in welchem sich dieselbe befindet. Die Fortführung dieser Untersuchung ist bedeutungsvoll geworden, weil es sich herausgestellt hat, dass Maschinen, welche die Anwendung höheren Druckes gestatten, ganz beträchtlich mehr Electricität liefern als die jetzt gebräuchlichen.

Fig. 8 zeigt die Anordnung der Maschine, wie ich solche zu meinen anfänglichen Experimenten benutzte. In Bezug

auf die Anordnung der Scheiben, Belege und Sauger unter sich, ist die von Töpler gefundene Construction gewählt, nur ist die Axe nicht horizontal, sondern vertical gestellt. Die Axe ist luftdicht durch einen eisernen Teller A geführt, bei a in einer Stopfbüchse, bei b auf einer Spitze gelagert. Der Antrieb erfolgt durch einen kleinen Schnurlauf c und den Riemen d. Die Polkugeln e und f der Maschine sind an allseitig im Raum beweglichen Haltern, welche mittelst grosser Hartgummischeiben in dem eisernen Teller isolirt eingesetzt sind.

An dem eisernen Teller sind an dem äussersten Rande zwei ringsumlaufende Wände gegossen, die eine tiefe Rinne bilden, in welche die Glasglocke B eingesetzt werden kann. Der Eisenteller trägt ausserdem zwei Hähne g und einen Tourenzähler h, um vergleichende Messungen zu ermöglichen.

Aller todte Raum unter der Glasglocke, welcher nicht von den Glastheilen der Maschine eingenommen wird, ist möglichst mit Paraffin ausgegossen. Bringt man in die Rinne des Tellers etwas Quecksilber, so ist die Maschine vollkommen gasdicht eingeschlossen, trotzdem lässt sie sich ohne Schwierigkeit öffnen.

Setzt man ferner unter die Glocke concentrirte Schwefelsäure, so befindet sich die Maschine nach kurzer Zeit in einer absolut trockenen und staubfreien Atmosphäre, was den grossen Vortheil bietet, dass sich dieselbe immer sofort anregt und selbst in der schlechtesten Laboratoriumsatmosphäre brauchbar bleibt.

Es hat sich gezeigt, dass die Gläser so hergestellter Maschinen nicht lackirt zu werden brauchen, sodass dann alle Theile der Maschine gegen das Ozon, welches die Maschine bei ihrem Gange in Luft erzeugt, vollkommen widerstandsfähig sind. Man kann ferner, unbeschadet für die Wirkung der Maschine, gewöhnliches Fensterglas, was für die gebräuchliche Construction ganz unbrauchbar sein würde, zur Herstellung der Scheiben benutzen, da dasselbe in vollkommen trockener Luft ganz ausreichend isolirt.

Da die Papierbelege der Maschine bei vollkommener Trockenkeit jedoch die Electricität nicht mehr leiten, so

müssen diese mit etwas Graphit eingerieben werden, um sie dadurch schwach leitend zu machen.

Die beschriebene Einrichtung gestattet die Anwendung verschiedener Gase, schliesst jedoch die Benutzung höheren Druckes aus.

Fig. 9 zeigt die Anordnung, welche gewählt wurde, um das Verhalten der Maschine unter verschiedenem Druck zu studiren.

Um Messungen zu ermöglichen, die nicht von der Reibung in einer Stopfbüchse beeinflusst würden, wurde die Maschine auf einem eisernen Teller *A* unter einer eisernen Glocke *B* (dieselbe ist in der Zeichnung abgehoben dargestellt) so aufgestellt, dass die Bewegung derselben durch eine kleine Dynamomaschine *C* erfolgt, welche von aussen durch eine Batterie *D* in Gang gesetzt werden konnte. Es war so möglich, die Zapfenreibung bei den wechselnden Drucken constant zu erhalten und eine wirklich vollkommene Dichtung des Hohlraumes unter der geschlossenen Glocke herzustellen. Aller Raum unter der Glocke, welcher nicht für die bewegten Theile der Maschine nöthig war, wurde theils mit Paraffin ausgegossen, theils mit passend hergestellten Paraffinstücken *E* ausgesetzt. Die eiserne Glocke wurde mit einem zolldicken Mantel von Paraffin im Inneren überkleidet, dieselbe konnte ferner durch vier eiserne Schrauben *F* fest auf einem auf dem Teller *A* aufliegenden Gummiring aufgepresst werden. Der eiserne Teller enthielt zwei Ventile *g*, deren eines mit einer Druckpumpe *G*, das andere mit einem Manometer *H* in Verbindung stand.

Die Zuleitungen zu den Polkugeln *e*, *f* waren mittelst langer Glasröhren isolirt durch den Teller geführt. Zur Messung diente eine Leydener Flasche *I*, welche in einem mit Paraffin ausgegossenen Kasten stand. Die Leydener Flasche war durch Drähte mit den Polkugelhaltern verbunden.

Ausserdem befand sich in der Maschine ein Tourenzähler *h*, welcher durch Drähte in Verbindung mit einem Element *K* und einer electrischen Klingel *L* stand und so eingerichtet war, dass alle 100 Umdrehungen durch Schliessen

eines Contactes ein Glockensignal erfolgte. Die Verbindung zwischen der Dynamomaschine und der Axe der Influenzmaschine war durch Schnurläufe und Riemen hergestellt. Um zu ermöglichen, dass die Dynamomaschine in jeder Stellung durch einfaches Schliessen der Kette in Gang gebracht werden konnte, war dieselbe als Zwillingsmaschine construirt, sodass also zwei kleine Dynamomaschinen zu einer verbunden waren. Die Anker derselben sassen auf ein und derselben Axe und waren so gegeneinander gestellt, dass die eine Maschine im Maximum ihrer Wirkung war, wenn die andere sich auf dem todten Punkte befand. Die beschriebene Einrichtung gestattet, die Influenzmaschine unter der Glocke in verschiedenen Gasen unter wechselndem Drucke beliebig in Gang zu setzen, die Tourenzahl der Glasscheiben zu zählen und die producirte Electricitätsmenge zu messen.

I. Versuche mit der Influenzmaschine, Fig. 8 entsprechend.

Die Electricitätsmenge wurde in der Weise gemessen, dass man zählte, wie viele Entladungen bei gleicher Tourenzahl der Maschine und gleichem Abstand der in Luft befindlichen Polkugeln eine Leydener Flasche gab.

Die Maschine hatte lackirte Scheiben.

Dabei zeigte sich, dass bei der Benutzung von Wasserstoff die Sauger der Maschine im Dunkeln nicht leuchteten, während dies in allen anderen Gasen in sehr auffälliger Weise erfolgte.

1. Die Maschine gab mit Wasserstoff bei 850 Umdrehungen in der Minute neun Entladungen, während sie sich in Luft bei 850 Umdrehungen 45 mal entlud.

2. In Kohlensäure erfolgten bei 850 Umdrehungen im Mittel 47 Entladungen, gleichzeitig wurde ein Theil der Kohlensäure in Kohlenoxyd und Ozon zerlegt.

3. Die Maschine gab ferner bei 400 Umdrehungen pro Minute beim Laufen in Luft von gewöhnlichem Druck fünfzehn Entladungen bei einer Atmosphäre Ueberdruck 32. Bei einer Verminderung des Druckes um $^1/_2$ Atmosphäre unter

den herrschenden Luftdruck konnte die Leydener Flasche überhaupt nicht mehr geladen werden.

Ein Versuch, grössere Quantitäten von Electricität dadurch zu erhalten, dass man die Maschine unter Petroleum laufen liess, was ein ausgezeichneter Nichtleiter für Electricität ist, schlug fehl. Möglich, dass unter Anwendung von schleifenden Federn an Stelle der saugenden Spitzen der Influenzmaschine ein Erfolg erzielt werden könnte, da es wohl denkbar ist, dass das Petroleum so gut isolirt, dass die Spitzen nicht mehr im Stande sind, die Electricität zu übertragen.

II. Versuche mit der Hochdruckinfluenzmaschine, Fig. 9 entsprechend.

Die Leydener Flasche, welche zur Messung verwendet wurde, hatte etwa 1236 qcm Fläche pro Beleg, der Abstand der Polkugeln betrug 15 mm.

1. Versuchsreihe in atmosphärischer Luft.

Die Maschine hatte lackirte Glasscheiben.

Ueberdruck in Atmosphären	Zahl der Bunsenelemente, welche zur Bewegung d. Dynamomaschine dienten	Zahl der Umdrehungen	Zeit, in welcher 400 Umdrehungen erfolgten in Secunden	Zahl d. Entladungen, welche die Leydener Flasche bei 400 Umdrehungen ergab
0	5	400	54	$5^1/_2$ Funken
1	5	400	52	14 "
2	5	400	58	18 "
3	5	400	62	20 "
4	5	400	72	23 "
5	6	400	68	25 "
6	6	400	77	28 "
6	7	400	94	31 "
5	6	400	85	27 "
4	6	400	79	26 "
3	5	400	74	24 "
2	4	400	82	20 "
1	4	400	71	15 "
0	4	400	66	5 "

Die nachfolgenden Versuche sind mit unlackirten Glasscheiben ausgeführt.

2. Versuchsreihe in atmosphärischer Luft.

Temperatur 15°.

Ueberdruck in Atmosphären	Zahl der Bunsenelemente, welche zur Bewegung d. Dynamomaschine dienten	Zahl der Umdrehungen	Zeit, in welcher 400 Umdrehungen erfolgten in Secunden	Zahl d. Entladungen, welche die Leydener Flasche bei 400 Umdrehungen ergab
—206 mm	6	—	—	Flasche konnte nicht geladen werden
—380 „	6	—	—	
756 „ Der gerade herrschende Luftdruck	5	400	74	17 Funken
+ 1 Atm.	5	400	95	31 „
+ 2 „	6	400	88	42 „
+ 3 „	6	400	120	46 „
2 „	6	400	98	48 „
1 „	6	400	84	34 „
0 „	6	400	58	14 „

3. Versuchsreihe in Wasserstoff.

Ueberdruck in Atmosphären	Zahl der Bunsenelemente, welche zur Bewegung d. Dynamomaschine dienten	Zahl der Umdrehungen	Zeit, in welcher 400 Umdrehungen erfolgten in Secunden	Zahl d. Entladungen, welche die Leydener Flasche bei 400 Umdrehungen ergab
0	5	400	63	6 Funken
+1	5	400	75	18 „
2	5	400	83	27 „
3	5	400	92	34 „
$3^3/_4$	6	400	84	34 „
$3^1/_2$	6	400	86	36 „
3	6	400	84	33 „
2	6	400	72	27 „
1	6	400	68	18 „
0	6	400	58	8 „
$-^1/_2$	6	Erfolgte keine Ladung mehr		

4. Versuchsreihe in Kohlensäure.

Ueberdruck in Atmosphären	Zahl der Bunsenelemente, welche zur Bewegung d. Dynamomaschine dienten	Zahl der Umdrehungen	Zeit, in welcher 400 Umdrehungen erfolgten in Secunden	Zahl d. Entladungen welche die Leydener, Flasche bei 400 Umdrehungen ergab
0	5	400	59	8 Funken
1	5	400	96	35 „
2	6	400	101	47 „
$2^2/_3$	6	400	204	48 „
Die Gasreibung war bei $2^2/_3$ Atmosphären so stark, dass die Dynamomaschine die Influenzmaschine kaum noch zu bewegen vermochte.				
2	6	400	96	48 Funken
2	6	400	96	44 „
1	6	400	76	32 „
0	6	400	42	8 „

Diese Versuche lehren, dass die chemische Natur der Gase einerseits einen Einfluss auf die Electricitätsentwickelung der Influenzmaschine ausübt, dass aber andererseits mit wachsendem Druck eine enorme Vermehrung der producirten Electricitätsmengen eintritt.

Zur Verwerthung der durch Influenzmaschinen erzeugten Electricität wird man zweckmässig eine Einrichtung wählen, wie es Fig. 8 zeigt, nur mit dem Unterschied, dass man an Stelle der Glasglocke eine eiserne Haube nimmt, die sich mit starken Schrauben luftdicht aufpressen lässt.

Die vorliegenden Untersuchungen sind mit dem rohen Messapparat, einer Leydener Flasche, angestellt um einen Ueberblick über den Verlauf der Gesammterscheinungen zu erhalten, während die sich hieran anschliessenden rein electrischen Bestimmungen der Diëlectricitätsconstanten der Gase bei hohem Drucke weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben muss.

Hr. Oskar Leuner, Mechanikus des Polytechnikums in Dresden, hat die sämmtlichen Apparate in ausgezeichneter Weise hergestellt.

XII. *Notiz über eine Influenzmaschine einfachster Form;*

von Julius Elster und Hans Geitel.

(Hierzu Taf. V Fig. 1.)

Die Influenzmaschinen haben infolge der unleugbaren Vortheile, die mit der schnellen Herstellung grosser Electricitätsmengen verknüpft sind, überall Eingang als Unterrichtsmittel gefunden. Indessen wird ihr Werth in pädagogischer Hinsicht dadurch nicht unbeträchtlich herabgedrückt,

...fänger erhebliche Schwierigkeiten

...gen, empfiehlt es sich, dass man

...m übersichtlichen Apparat

...dung zweier entgegen-

...weist.

...pparates, den wir uns

hier mitzutheilen erlauben, und der in seiner Construction dem Thomson'schen „replenisher" nahe steht, ist nur erforderlich die Bekanntschaft mit der electrischen Influenz und der Thatsache, dass die Electricität ihren Sitz auf der Oberfläche der Leiter hat. Die Einrichtung des Apparates ist folgende: Um eine mittelst einer Kurbel drehbaren Axe AB sind sechs — in der Figur sind nur zwei gezeichnet — cylindrische Metallconductoren CC', wir verwenden dazu mit Stanniol überzogene Korkstopfen, an isolirenden, radial zur Drehungsaxe verlaufenden Stützen DD' T-förmig in einer zur Axe senkrechten Ebene befestigt. Dieselben passiren frei bei der Drehung zwei isolirte, feste, beiderseits offene Metallcylinder EE', die, um den Stützen DD' Durchgang zu gewähren, an ihrer der Drehungsaxe zugewandten Seite der Länge nach aufgeschnitten sind. Zugleich sind diese an den Stellen, an welchen bei der Drehung in der Richtung des Pfeiles die beweglichen Cylinder CC' austreten, an der der Drehungsaxe zugewandten Seite schräg abgeschnitten, um im Momente des Austretens einen möglichst grossen Zwischenraum zwischen die beweglichen Conductoren CC' und die festen EE' zu bringen. Diese letzteren tragen an den nicht abgeschrägten Enden zwei metallische, nach Innen gekehrte Federn FF', die soweit vorragen, dass sie die beweglichen Conductoren CC' bei der Drehung berühren. Ferner führen zwei weitere Contactfedern GG' durch zwei in den festen Conductoren (ungefähr in der Mitte) angebrachte, kreisförmige Oeffnungen in das Innere derselben, wo sie ebenfalls mit den beweglichen Conductoren in Berührung kommen. Diese beiden Federn sind unter sich in leitender Verbindung (resp. zur Erde abgeleitet). Das Spiel dieses Apparates ist nun folgendes:

Angenommen dem Cylinder E sei eine bestimmte Ladung $+e$ mitgetheilt. Sobald bei Drehung der Axe einer der beweglichen Conductoren so weit in denselben eintritt, dass er die Ableitungsfeder G berührt, so wird derselbe durch Influenz negativ electrisch. Bei weiterer Drehung wird zunächst die Feder G verlassen; dann tritt der Conductor mit negativer Ladung behaftet völlig aus dem ersten Cylinder heraus und berührt die Feder F' des zweiten. Er bleibt

mit dieser so lange in Berührung, bis er völlig in das Innere des Cylinders E' eingetreten ist, also seine Ladung fast vollständig an diesen abgegeben hat. Nun ist E' negativ geladen. Kommt jetzt also der bewegliche Conductor mit der Feder G' in Berührung, so wird er durch Influenz positiv electrisch und führt seine Ladung bei fernerer Drehung in gleicher Weise dem Cylinder E zu, dessen Spannung verstärkend. So tritt eine gegenseitige Verstärkung der Ladungen sehr schnell ein bis zum erreichbaren Maximum. Dasselbe kann hier kein sehr hohes sein, da aus den zur Erde abgeleiteten Federn GG' sehr bald ein Ausströmen der entgegengesetzten Electricitäten eintritt, was sich durch Ozongeruch, sowie im Dunkeln durch Lichtbüschel zu erkennen gibt. Der Apparat wirkt stets selbsterregend. Befestigt man zwei electrische Pendel an E und E', so ist das rapide Wachsen der Ladung deutlich zu sehen.

Selbstverständlich würde sich der Apparat bedeutend wirksamer gestalten, wenn man statt der radial zur Axe gestellten, beweglichen Metallcylinder eine rotirende Glasscheibe mit Stanniolsectoren benutzte und E und E' durch je zwei parallele Glasplatten, aussen mit Stanniol belegt, ersetzte. Dann würde man aber im wesentlichen auf die Construction der Töpler'schen Maschine zurückkommen, denn es ist jetzt offenbar nur noch ein Schritt, die Ladungen der festen Conductoren E und E' gar nicht zu benutzen, und statt dessen eine Funkenstrecke in die metallische Verbindung der beiden Federn G und G', (die nun natürlich isolirt sein müssen) einzuschalten. Lässt man schliesslich auch die Stanniolsectoren der rotirenden Scheibe weg und ersetzt die Contactfedern durch Spitzen, so ist damit auch das Wesentliche der Holtz'schen Construction gegeben. Der hierdurch angedeutete Zusammenhang zwischen den verschiedenen Formen der Influenzmaschinen ist übrigens schon vollständig dargelegt und theoretisch begründet in einer Abhandlung von Veltmann[1]): „Theorie der Influenzmaschine", auf die wir hiermit verweisen.

Wolfenbüttel, im April 1885.

1) Veltmann, Pogg. Ann. **151.** p. 513. 1874.

XIII. *Ueber die electromagnetische Rotation einer Flüssigkeit;*
von Eduard Riecke.

(Aus den Gött. Nachr. vom 30. Dec. 1884; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)
(Hierzu Taf. V Fig. 2.)

I. Bezeichnet man eine aus verschiedenartigen Leitern gebildete, von einem galvanischen Strome durchlaufene Kette, deren Glieder theils fest liegen, theils eine bestimmte Beweglichkeit besitzen, als einen electrodynamischen Kreis, so sind mit Bezug auf die Anordnung eines solchen Kreises verschiedene Fälle zu unterscheiden. Der einfachste Fall ist der, beim welchem die Stromfäden stets an dieselbe Reihe ponderabler Theilchen gebunden bleiben; dies findet statt bei allen Kreisen, deren bewegliche Theile aus Drähten oder biegsamen Fäden zusammengesetzt sind, und bei welchen der Uebergang von den festliegenden zu den beweglichen Theilen der Leitung nicht durch Gleitstellen vermittelt wird. Der zweite Fall ist der, in welchem infolge der Bewegung neue ponderable Elemente als Träger des Stromes zu den schon früher vorhandenen hinzutreten; es ist dies der Fall bei den meisten derjenigen Anordnungen, bei welchen die beweglichen Stromtheile durch Gleitstellen mit den ruhenden verbunden sind; ferner gehört hierher der Fall einer elastischen Dehnung der vom Strome durchflossenen Leiter. Der dritte Fall ist dadurch ausgezeichnet, dass eine relative Verschiebung der Stromfäden, welche das Innere von körperlichen Leitern erfüllen, gegen die ponderabeln Theilchen der letzteren eintritt. Dieser Fall findet statt, wenn der vom Strome durchflossene Körper elastische Biegungen erleidet, er kann eintreten bei Kreisen, welche mit Gleitstellen behaftet sind und bei der Bewegung eines von einem galvanischen Strom durchflossenen flüssigen Leiters.

Sind in der Nähe des electrodynamischen Kreises galvanische Ketten oder Magnete fest aufgestellt, so werden die von denselben ausgeübten Kräfte eine Verschiebung der beweglichen Theile jenes Kreises zur Folge haben. Die

hierbei geleistete Arbeit ist bei denjenigen Anordnungen, welche wir dem ersten und zweiten Fall unterordnen können, jederzeit bestimmt durch den negativen Zuwachs, welchen das Potential jener Ströme und Magnete auf den electrodynamischen Kreis bei der Verschiebung erleidet. Es gilt dieser Satz daher für die Wechselwirkung geschlossener Spiralen, für die von Zöllner beschriebenen Versuche mit Gleitstellen; es bestimmt derselbe die Gestalt der electrodynamischen Kettenlinie, die Dehnung eines elastischen Leiters unter der Wirkung electrodynamischer Kräfte.

Dagegen unterliegt die Anwendung des Potentialgesetzes gewissen Schwierigkeiten in dem dritten Fall. In diesem lassen sich leicht solche Anordnungen treffen, dass bei einer Verschiebung des Systemes der ponderabeln Stromträger eine entsprechende Verschiebung oder Verlängerung der Stromfäden nicht eintritt, also auch das electrodynamische Potential eine merkbare Aenderung nicht erleidet. Eine Ausdehnung des Potentialgesetzes auf derartige Fälle ist nur möglich auf Grund hypothetischer Hülfsvorstellungen über die molecularen Beziehungen zwischen den Theilchen der leitenden Körper und der sie durchströmenden Electricitäten.

Es ergibt sich hieraus das besondere Interesse, welches sich an die Untersuchung derjenigen electrodynamischen Kreise knüpft, welche dem dritten Falle entsprechen. Wie schon erwähnt wurde, gehört hierher die Bewegung einer Flüssigkeit unter der Wirkung electrodynamischer oder electromagnetischer Kräfte, und es ist daher im Folgenden der Versuch gemacht worden, die Theorie einer derartigen Bewegung zu entwickeln und die Resultate derselben mit der Erfahrung zu vergleichen.

II. Es möge zunächst die Vorrichtung beschrieben werden, mit Hülfe derer die im Folgenden untersuchte Bewegung erzeugt wurde. Auf eine kreisförmige Kupferscheibe von 132 mm Durchmesser wurde ein Kupferring von demselben äusseren Durchmesser, einer Breite von 10 mm und einer Dicke von 1 mm aufgelöthet. Es wurde sodann ein Zinkring abgedreht von 4,02 mm Dicke, einem äusseren

Durchmesser von 132 mm, einem inneren Durchmesser von 80,16 mm. Auf die untere Fläche dieses Ringes wurde eine dünne Glasplatte aufgekittet und sodann der eben abgeschliffene Ring auf den ebenfalls eben geschliffenen Kupferring aufgeschraubt, so dass eine möglichst innige Berührung der beiden Ringflächen erzielt wurde. Auf diese Weise wurde eine flache Schale hergestellt, deren Boden durch die Glasplatte, deren Rand durch den Zinkring gebildet wurde; dieselbe wurde mit einer Lösung von Zinkvitriol gefüllt. In ihrer Mitte wurde eine kreisförmige Zinkscheibe von 4,08 mm Dicke und 19,48 mm Durchmesser eingesetzt; auf die obere Seite dieser Scheibe war eine Glasplatte aufgekittet, welche sich auf den durch den Zinkring gebildeten Rand auflegte. Es wurde so eine ringförmige Flüssigkeitsplatte hergestellt, welche oben und unten von zwei parallelen Glasplatten, nach innen und aussen von zwei cylindrischen Zinkflächen abgegrenzt wurde; die Dicke der Platte betrug im Mittel 4,05 mm, der innere Halbmesser 9,74 mm, der äussere 40,08 mm. Die Zinkflächen dienten als Electroden für die Zu- und Ableitung eines radial in der Flüssigkeitsplatte verlaufenden Stromes. Die auf der Zinkscheibe aufgekittete Deckplatte war in der Mitte durchbohrt, sodass ein Zuleitungsdraht von Kupfer in die Scheibe eingeschraubt werden konnte. Die Kupferplatte, welche die Grundlage der ganzen Vorrichtung bildete, trug in der Mitte einen vertical nach unten gehenden Zuleitungsdraht von Kupfer. Die ganze Vorrichtung wurde auf die horizontale Polfläche eines in der Axe durchbohrten Electromagnets aufgesetzt. Wurde der Electromagnet erregt, der durch die Zinkvitriolplatte gehende Strom geschlossen, so gerieth die Flüssigkeit in eine rotirende Bewegung, welche mit Hülfe von Schellacktheilchen beobachtet wurde, die in derselben suspendirt waren.

Unter der Voraussetzung, dass die Theilchen der Flüssigkeit und die Schellacktheilchen concentrische Kreisbahnen um den gemeinsamen Mittelpunkt der Zinkelectroden beschrieben, konnte die Winkelgeschwindigkeit in verschiedenen Entfernungen von jenem Mittelpunkt gemessen werden. Zu diesem Zweck wurde auf der die Flüssigkeit bedeckenden

Glasplatte ein System von unter Winkeln von 45° gegen einander geneigten Durchmessern mit dem Diamant gezogen, und es wurde dann die Zeit beobachtet, welche ein bestimmtes Schellacktheilchen brauchte, um den halben Umfang seiner Bahn zu durchlaufen. Die Bestimmung der Entfernung des Theilchens von dem Mittelpunkt der Electrodenkreise, d. h. die Bestimmung seines Bahnhalbmessers geschah mit Hülfe eines Glasmaassstabes, der so auf die Deckplatte aufgelegt wurde, dass die Enden der Theilstriche genau mit einem der Diamantstriche auf der Platte zusammenfielen. Der Radius Vector der von dem beobachteten Theilchen durchlaufenen Bahn wurde vor und nach der Bestimmung der Umlaufszeit gemessen und so gleichzeitig eine Prüfung der Annahme gewonnen, der zufolge die ganze Bewegung der Flüssigkeit in concentrischen Kreisen vor sich gehen sollte.

Im Folgenden sind die Resultate dreier verschiedener Beobachtungsreihen mitgetheilt; die beiden ersten Columnen enthalten die Radien Vectoren des betreffenden Schellacktheilchens vor und nach der Bestimmung der halben Umlaufszeit, welche in der dritten Columne angegeben ist; die einzelnen Beobachtungen sind in der Reihenfolge angeführt, in welcher sie der Zeit nach gemacht worden sind.

I. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
11,3	11,4	8,6	19,9	19,8	14,1	20,8	20,8	15,9
11,8	11,8	8,4	22,0	22,0	18,2	27,6	27,5	27,5
13,3	13,3	8,0	26,7	26,7	25,0	10,8	10,8	10,3
16,2	16,0	10,6	33,7	33,7	35,0	11,9	11,8	8,0
16,8	17,0	11,1	33,8	33,8	35,3	13,8	13,8	7,4
17,8	17,7	12,9	33,8	33,8	35,5	14,1	14,3	7,8
22,7	22,8	20,5	11,9	11,9	7,8	15,5	15,6	8,9
20,0	20,7	15,9	13,3	13,4	7,8	21,3	21,5	16,6
25,7	25,8	24,6	15,5	15,6	8,8	28,3	28,6	28,0
27,7	27,1	28,3	20,9	20,9	16,1	33,9	33,9	35,9
28,8	28,3	29,8	23,6	23,8	21,7	34,9	34,4	50,3
30,3	29,4	32,7	26,3	26,8	25,6	12,5	12,3	7,7
33,0	33,1	34,0	27,3	27,3	27,9	12,6	12,6	7,0
37,9	39,3	81,6	34,0	33,9	36,5	15,8	15,8	9,0
12,0	12,0	8,0	33,9	33,9	36,4	15,8	15,7	9,2
11,9	11,9	7,9	11,9	11,9	8,1	21,0	21,0	16,6
12,6	12,7	7,7	13,1	13,1	7,7	21,0	20,9	16,4
15,3	15,3	9,0	15,2	15,2	8,8	32,7	32,8	32,8
17,8	17,9	12,9	19,1	19,7	15,2	33,9	33,9	36,1

II. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
13,8	13,8	9,2	17,6	17,6	14,3	35,6	35,9	49,1
17,3	17,7	11,3	17,9	18,2	14,3	14,6	14,8	10,2
14,5	14,6	9,6	18,9	19,0	15,5	15,7	15,8	11,5
12,7	12,7	8,1	28,3	28,7	28,6	18,9	18,9	13,4
11,7	11,8	8,7	32,8	32,9	36,4	18,8	18,9	13,1
17,5	17,7	12,8	15,0	15,0	10,9	20,9	20,9	15,3
22,3	21,9	17,1	18,2	18,4	15,2	22,0	22,1	17,1
31,3	31,9	35,1	17,8	18,1	14,6	23,1	23,3	19,3
32,8	32,9	37,2	26,2	26,4	25,5	23,4	23,4	19,9
33,6	33,6	37,5	29,6	29,6	29,6	23,6	23,6	20,1
16,3	16,7	12,1	33,9	34,4	38,8	10,8	10,8	9,6
18,3	18,5	14,7	35,8	35,8	48,0	12,8	12,8	8,1
22,4	22,8	19,2	11,0	11,0	8,4	19,0	19,3	13,3
24,9	25,7	22,9	10,8	10,8	9,0	19,3	19,5	13,4
29,3	29,5	31,1	11,6	11,6	8,6	22,6	22,6	17,7
30,7	30,1	35,5	17,6	17,7	14,0	22,3	22,5	17,8
36,1	36,8	51,2	18,8	18,8	13,0	28,9	29,0	27,8
16,2	16,4	12,0	19,3	19,3	13,8	29,9	30,6	36,9
15,1	15,4	10,7	25,4	25,7	26,7	33,6	33,4	40,6
			30,8	31,3	32,0			

III. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
15,0	15,4	10,2	12,6	12,6	7,7	34,8	35,0	37,1
10,9	11,1	9,3	12,8	12,8	7,9	10,6	10,7	11,1
11,9	12,0	7,8	14,9	14,9	9,8	12,6	12,6	7,8
13,4	13,7	8,0	14,8	14,9	9,5	12,7	12,7	8,0
15,9	16,4	10,4	18,8	18,9	13,8	14,8	14,8	9,7
16,9	17,4	12,0	22,9	23,5	18,7	16,7	16,6	11,0
18,0	18,6	13,6	29,7	30,0	29,4	35,9	35,9	38,7
18,9	19,0	14,0	35,9	36,7	40,7	12,8	12,8	7,9
19,3	19,3	14,3	37,9	38,6	58,8	13,5	13,6	8,6
20,1	20,2	16,6	11,7	11,8	7,8	13,4	13,5	9,0
25,7	25,9	21,9	15,1	15,1	10,3	14,7	14,5	9,1
27,8	28,0	25,4	15,6	15,6	10,2	16,8	17,0	11,1
10,1	10,5	11,3	17,2	17,5	12,1	24,8	24,8	21,9
10,6	10,4	9,3	25,3	25,8	22,1	24,9	24,9	22,5
11,7	11,8	7,8	27,8	28,3	26,5	27,6	28,2	25,9
12,7	12,7	7,7	30,8	31,1	30,5	33,1	33,8	32,8
14,5	14,6	9,4	35,4	35,8	38,1	12,8	12,8	7,9
16,5	16,7	10,2	12,7	12,8	7,9	12,8	12,9	8,0
17,9	18,2	12,1	14,8	14,8	9,7	20,6	20,6	14,9
21,8	22,0	17,1	15,2	15,6	9,7	21,2	21,5	16,0
22,2	22,9	18,0	16,6	16,7	10,9	21,2	21,3	16,9
23,8	24,4	19,5	16,6	16,6	11,1	27,6	27,7	26,5
28,9	29,4	27,5	17,7	17,8	13,0	31,0	31,2	32,9
32,8	33,6	32,6	22,2	22,4	18,3	38,0	38,3	56,4
			35,3	34,9	37,4			

III. Es möge nun die Theorie der im Vorhergehenden beschriebenen Bewegung entwickelt werden. Wir setzen hierbei voraus, dass das magnetische Feld, in welchem die Bewegungen der Flüssigkeit sich vollziehen, ein homogenes ist, und dass die Kraftlinien desselben senkrecht gegen die beiden die Flüssigkeit begrenzenden Ebenen gerichtet sind. Wir nehmen ferner an, dass die Bewegung des galvanischen Stromes von dem inneren nach dem äusseren Electrodenring in radialer Richtung verlaufe, sowie, dass die Dichtigkeit der Strömung in der Richtung der Plattendicke keine Veränderung erleide. Bei der getroffenen Anordnung lag die Flüssigkeitsplatte horizontal, die Bewegung der electrischen Theilchen und der mit denselben beladenen Ionen des Zinkvitriols war demnach als horizontal und die Geschwindigkeit in allen Punkten einer und derselben Verticallinie als gleich zu betrachten.

Die Mittelebene der Flüssigkeitsplatte werde zur xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Axe der concentrischen Electrodenringe zur z-Axe desselben genommen.

Die Intensität des magnetischen Feldes werde bezeichnet durch J. Es sei ferner e diejenige Menge strömender positiver, beziehungsweise negativer Electricität, welche sich in der Volumeneinheit befindet; x_p', y_p' seien die Geschwindigkeitscomponenten der positiven, x_n' und y_n' die der negativen Electricität. Unter diesen Umständen sind die Componenten der Kräfte, welche auf die strömende positive und negative Electricität eines Volumenelementes $d\tau = dx\,dy\,dz$ ausgeübt werden:

$$X_p d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e y_p' \, dx\,dy\,dz, \qquad Y_p d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e x_p' \, dx\,dy\,dz,$$

$$X_n d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e y_n' \, dx\,dy\,dz, \qquad Y_n d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e x_n' \, dx\,dy\,dz.$$

Somit sind die Componenten der auf das ganze Volumenelement ausgeübten ponderomotorischen Wirkung:

$$X d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e (y_p' - y_n') \, dx\,dy\,dz,$$

$$Y d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e (x_p' - x_n') \, dx\,dy\,dz.$$

Hier sind die Producte $e(y_p'-y_n')$ und $e(x_p'-x_n')$ nichts anderes als die Strömungscomponenten; bezeichnen wir diese durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, so ist:

$$X d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J \mathfrak{v}\, dx\, dy\, dz, \qquad Y d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J \mathfrak{u}\, dx\, dy\, dz.$$

Ist λ das galvanische Leitungsvermögen der Flüssigkeit, so können wir:

$$\mathfrak{u} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{v} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

setzen, wo unter φ das electrostatische Potential der freien Electricität zu verstehen ist. In unserem Falle, in welchem die Strömung in dem ringförmigen Zwischenraume zwischen zwei concentrischen cylindrischen Electroden vor sich geht, ergibt sich:

$$\varphi = -\frac{i}{2\pi\lambda d} \log r.$$

Hier bezeichnet i die Stromstärke, d die Dicke der Flüssigkeitsplatte und r den Abstand des betrachteten Punktes von der Axe des Ringes, der z-Axe des Coordinatensystems; es ist also:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Hiernach ergibt sich:

$$X = \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d} \frac{\partial \log r}{\partial y}, \qquad Y = -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d} \frac{\partial \log r}{\partial x}.$$

Führen wir diese Ausdrücke ein in die Differentialgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung, so ergibt sich, wenn unter u und v die Geschwindigkeitscomponenten in dem Punkte x, y, z, unter p der Druck, unter μ die Dichtigkeit, unter k die Reibungsconstante verstanden wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{\mu} \Delta u + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{c} \frac{Ji}{2\pi d \mu} \frac{\partial \log r}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k}{\mu} \Delta v + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\sqrt{2}}{c} \frac{Ji}{2\pi d \mu} \frac{\partial \log r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Den früheren Annahmen entsprechend, ist die Geschwindigkeitscomponente in der Richtung der z-Axe gleich Null gesetzt. Um die Gleichungen zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall der stationären Bewegung, wir nehmen ferner an, dass die Geschwindigkeiten u und v klein sind, sodass wir die mit denselben multiplicirten Glieder vernachlössigen können, und wir setzen endlich den Druck p als constant voraus. Dann ergeben sich, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d k} = A$$

die Gleichungen:

$$\Delta u = -A \frac{\partial \log r}{\partial y}, \qquad \Delta v = A \frac{\partial \log r}{\partial x},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2$.

Da durch die Beobachtungen gezeigt ist, dass die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in einer Rotation um den Mittelpunkt des Coordinatensystems besteht, so können wir für u und v den Ansatz machen:

$$u = -\frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial W}{\partial x},$$

wo W eine Function, die nur abhängig ist von r und z. Es ist dann die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit in verschiedenem Abstande r von der z-Axe gegeben durch:

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Zur Ermittelung der Function W ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\Delta W = A \log r \qquad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = A \log r.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist im allgemeinen noch eine willkürliche Constante hinzuzufügen. Wir setzen dieselbe gleich Null, da sie auf den Verlauf unserer Rechnung ohne Einfluss ist.

Wir setzen:

$$W = U_1 \cos \frac{z\pi}{d} + U_3 \cos \frac{3z\pi}{d} + \dots$$

dann wird die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{d U_1}{dr}\cos\frac{z\pi}{d} + \frac{1}{r}\frac{d U_3}{dr}\cos\frac{3z\pi}{d} + \ldots$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\omega_1 = \frac{1}{r}\frac{d U_1}{dr}, \qquad \omega_3 = \frac{1}{r}\frac{d U_3}{dr}\ldots$$

$$\omega = \omega_1 \cos\frac{z\pi}{d} + \omega_3 \cos\frac{3z\pi}{d} + \ldots$$

Es wird somit $\omega = 0$ für $z = \pm d/2$, d. h. für alle Punkte der beiden die Flüssigkeit begrenzenden der xy-Ebene parallelen Glasflächen. Setzen wir den für W gemachten Ansatz ein in der Differentialgleichung, welcher W genügen muss, so ergibt sich:

$$\left(\frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d U_1}{dr} - \frac{\pi^2}{d^2}U_1\right)\cos\frac{z\pi}{d}$$

$$+ \left(\frac{d^2 U_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d U_3}{dr} - \frac{9\pi^2}{d^2}U_3\right)\cos\frac{3z\pi}{d} + \ldots = A\log r.$$

Mit Hülfe der Relation:

$$\frac{\pi}{4} = \cos\frac{z\pi}{d} - \tfrac{1}{3}\cos\frac{3z\pi}{d} + \cdots$$

kann auch die rechte Seite der Gleichung nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von $z\pi/d$ entwickelt werden, und wir erhalten dann zur Bestimmung von U_n die Gleichung:

$$\frac{d^2 U_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d U_n}{dr} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}U_n = \varepsilon\frac{4A}{n\pi}\log r,$$

wo: $\varepsilon = +1$ für $n = 1, 5, 9\ldots$, $\varepsilon = -1$ für $n = 3, 7, 11\ldots$

Durch Differentiation ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung eine andere zur Bestimmung von:

$$\omega_n = \frac{1}{r}\frac{d U_n}{dr}$$

$$\frac{d^2\omega_n}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\omega_n}{dr} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}\omega_n = \varepsilon\frac{4A}{n\pi}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist:

$$\omega_n = -\varepsilon\frac{4A}{n^3\pi^3}\frac{d^2}{r^2}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich, wenn man zu diesem Ausdrucke noch das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 v_n}{d r^2} + \frac{3}{r} \cdot \frac{d v_n}{d r} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2} v_n = 0$$

hinzufügt. Diese Gleichung kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2 (v_n r \sqrt{r})}{d r^2} - \left(\frac{n^2 \pi^2}{d^2} + \frac{3}{4 r^2}\right) v_n r \sqrt{r} = 0,$$

oder für grössere Werthe von r:

$$\frac{d^2 (v_n r \sqrt{r})}{d r^2} = \frac{n^2 \pi^2}{d^2} v_n r \sqrt{r}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$v_n = \frac{A_n e^{n \pi \frac{r}{d}} + B_n e^{-n \pi \frac{r}{d}}}{r \sqrt{r}}$$

und somit:

$$\omega_n = -\varepsilon \frac{4 A}{n^3 \pi^3} \cdot \frac{d^2}{r^2} + \frac{A_n e^{n \pi \frac{r}{d}} + B_n e^{-n \pi \frac{r}{d}}}{r \sqrt{r}}.$$

Die Integrationsconstanten A_n und B_n bestimmen sich durch die Annahme, dass die Winkelgeschwindigkeit an den beiden Electrodenflächen gleich Null werde. Bezeichnen wir durch a und b die Radien der entsprechenden Kreise, so ergibt sich:

$$\omega_n = -\varepsilon \frac{4 A}{\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3} \frac{d^2}{r^2} \times \left\{ 1 - \sqrt{\frac{r}{a}} \cdot \frac{e^{n \pi \frac{b-r}{d}} - e^{-n \pi \frac{b-r}{d}}}{e^{n \pi \frac{b-a}{d}} - e^{-n \pi \frac{b-a}{d}}} - \sqrt{\frac{r}{b}} \cdot \frac{e^{n \pi \frac{r-a}{d}} - e^{-n \pi \frac{r-a}{d}}}{e^{n \pi \frac{b-a}{d}} - e^{-n \pi \frac{b-a}{d}}} \right\}.$$

Wofür näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\omega_n = -\varepsilon \frac{4 A}{\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{d^2}{r^2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{r}{a}} e^{-n \pi \frac{r-a}{d}} - \sqrt{\frac{r}{b}} e^{-n \pi \frac{b-r}{d}} \right\}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen im Abstande r von der Rotationsaxe erhalten wir somit die Reihe

$$\frac{\pi^3}{4A}\omega = -\frac{d^2}{r^2}\left\{1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-\pi\frac{b-r}{d}}\right\}\cos\frac{z\pi}{d}$$
$$+\frac{1}{27}\cdot\frac{d^2}{r^2}\left\{1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-3\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-3\pi\frac{b-r}{d}}\right\}\cos\frac{3z\pi}{d}$$
$$-+\cdots$$

IV. Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen. — Aus der im Vorhergehenden gegebenen Formel kann die mit dem constanten Factor $\pi^3/4A$ multiplicirte Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, welche in einer bestimmten Entfernung r von der Axe des Flüssigkeitsringes und in einer bestimmten Tiefe z der Flüssigkeit vorhanden ist. Andererseits geben die früher mitgetheilten Beobachtungen die Winkelgeschwindigkeit der in der Flüssigkeit suspendirten Theilchen in verschiedenen Entfernungen von der Rotationsaxe; die Tiefe aber, in welcher sich die beobachteten Theilchen in der Flüssigkeit befinden, war ohne Zweifel für die einzelnen Theilchen verschieden und war bei den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen für keines derselben bestimmt worden. Um trotzdem eine Vergleichung der theoretischen Formel mit den Beobachtungen zu ermöglichen, wurde die Annahme gemacht, dass alle beobachteten Theilchen in der Mitte der Flüssigkeitsschicht sich befunden haben, dass also für alle $z = 0$ gesetzt werden könne. Dieser Annahme war bei der Ausführung der Messungen dadurch einigermassen entsprochen worden, dass möglichst nur die mit den grössten Rotationsgeschwindigkeiten behafteten Schellacktheilchen beobachtet wurden. Unter dieser Annahme wurde der Werth von $\omega\pi^3/4A$ berechnet mit Benutzung der zwei ersten Glieder der Reihenentwickelung für alle ganzen Werthe von $r = 10$ bis $r = 40$ und für $r = 11{,}5$ und $r = 12{,}5$. Hierbei war nach den früher mitgetheilten Messungen zu setzen:

$$a = 40{,}08;\quad b = 9{,}74;\quad d = 4{,}05.$$

Die den beobachteten Entfernungen der suspendirten Theilchen entsprechenden Werthe von $\omega\pi^3/4A$ wurden aus den berechneten Werthen dieser Function mittelst graphischer Interpolation bestimmt. Durch Division der beobachteten Winkelgeschwindigkeiten mit jenen Werthen von $\omega\pi^3/4A$

ergab sich der Werth von $4A/\pi^3$. Aus sämmtlichen für die einzelnen Entfernungen berechneten Werthen dieses Factors wurde das Mittel genommen und durch Multiplication der theoretischen Werthe von $\omega\pi^3/4A$ mit diesem Mittelwerth sind die berechneten Werthe von ω erhalten.

In den folgenden Tabellen sind die verschiedenen in Betracht kommenden Grössen für die früher mitgetheilten Beobachtungsreihen zusammengestellt. Hierbei sind die einzelnen Beobachtungsreihen geordnet nach den Werthen von r, und sind nahe beisammen liegende Werthe von r und ω zu einem Mittelwerth vereinigt.

I. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
10,8	0,305	0,0675	4,52	0,358	20,8	0,197	0,0367	5,36	0,194
11,3	0,366	0,0833	4,39	0,441	20,9	0,193	0,0362	5,33	0,192
11,8	0,375	0,0872	4,30	0,462	21,4	0,189	0,0345	5,48	0,183
11,9	0,395	0,0875	4,52	0,464	22,0	0,173	0,0326	5,31	0,173
12,0	0,393	0,0877	4,48	0,465	22,7	0,153	0,0306	5,00	0,162
12,4	0,409	0,0872	4,69	0,462	23,7	0,145	0,0282	5,14	0,149
12,6	0,429	0,0865	4,95	0,458	25,7	0,128	0,0240	5,33	0,127
13,1	0,409	0,0839	4,87	0,445	26,5	0,123	0,0226	5,44	0,120
13,3	0,398	0,0819	4,85	0,434	26,7	0,126	0,0223	5,65	0.118
13,8	0,425	0,0784	5,42	0,415	27,3	0,112	0,0212	5,28	0,112
14,2	0,403	0,0752	5,36	0,398	27,5	0,114	0,0210	5,43	0,111
15,2	0,353	0,0665	5,29	0,352	28,4	0,112	0,0197	5,68	0,104
15,5	0,355	0,0645	5,50	0,342	28,5	0,106	0,0196	5,41	0,104
15,8	0,345	0,0630	5,48	0,334	29,8	0,096	0,0179	5,36	0,094
16,1	0,296	0,0610	4,85	0,323	33,0	0,091	0,0141	6,50	0,075
16,9	0,283	0,0550	5,15	0,291	33,7	0,089	0,0138	6,43	0,073
17,8	0,244	0,0498	4,90	0,264	33,9	0,086	0,0136	6,35	0,072
19,4	0,206	0,0419	4,91	0,222	34,6	0,063	0,0130	4,85	0,069
19,8	0,223	0,0401	5,56	0,212	38,6	0,038	0,0068	5,59	0,036
20,3	0,197	0,0382	5,16	0,202					

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen

von $r = 10$ bis $r = 15$: $4A/\pi^3 = 4,76$
„ „ $= 15$ „ „ $= 20$ „ $= 5,20$
„ „ $= 20$ „ „ $= 25$ „ $= 5,25$
„ „ $= 25$ „ „ $= 30$ „ $= 5,45$
„ „ $= 30$ „ „ $= 40$ „ $= 5,81$

Das Hauptmittel ist:

$$4A/\pi^3 = 5,30$$

der Werth, mit Hülfe dessen die berechneten Werthe von ω erhalten sind.

II. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
10,8	0,338	0,0660	5,13	0,343	20,9	0,204	0,0363	5,62	0,189
11,0	0,375	0,0753	4,98	0,399	22,1	0,184	0,0322	5,55	0,167
11,7	0,364	0,0865	4,20	0,458	22,4	0,177	0,0315	5,62	0,164
12,7	0,389	0,0862	4,51	0,448	22,6	0,170	0,0310	5,50	0,161
12,8	0,389	0,0858	4,53	0,446	23,4	0,159	0,0289	5,48	0,150
13,8	0,342	0,0785	4,36	0,408	25,3	0,138	0,0248	5,56	0,129
14,5	0,328	0,0723	4,55	0,376	25,5	0,128	0,0243	5,27	0,126
14,7	0,308	0,0711	4,33	0,370	26,3	0,123	0,0229	5,37	0,119
15,0	0,289	0,0686	4,21	0,357	28,5	0,110	0,0197	5,58	0,102
15,2	0,294	0,0668	4,40	0,347	29,5	0,103	0,0182	5,68	0,094
16,3	0,262	0,0592	4,42	0,308	30,3	0,086	0,0172	5,40	0,089
16,5	0,260	0,0580	4,48	0,301	31,0	0,098	0,0163	6,01	0,084
17,6	0,230	0,0509	4,51	0,265	31,6	0,090	0,0159	5,65	0,083
18,0	0,217	0,0487	4,45	0,253	32,8	0,085	0,0145	5,90	0,075
18,3	0,206	0,0471	4,37	0,245	33,5	0,080	0,0139	5,77	0,072
18,4	0,213	0,0465	4,58	0,242	34,1	0,081	0,0134	6,05	0,070
18,9	0,231	0,0441	5,25	0,229	35,7	0,064	0,0119	5,37	0,062
19,3	0,228	0,0424	5,38	0,220	36,4	0,062	0,0111	5,63	0,058
19,4	0,235	0,0419	5,61	0,218					

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen:

von $r = 10$ bis $r = 15$: $4A/\pi^3 = 4,57$
„ „ $= 15$ „ „ $= 20$ „ $= 4,70$
„ „ $= 20$ „ „ $= 25$ „ $= 5,55$
von „ $= 25$ „ „ $= 30$ „ $= 5,49$
„ „ $= 30$ „ „ $= 40$ „ $= 5,68$

Im Mittel ist: $4A/\pi^3 = 5,20.$

III. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
10,3	0,278	0,0410	6,78	0,227	19,3	0,219	0,0422	5,19	0,234
10,5	0,338	0,0511	6,62	0,283	20,6	0,210	0,0375	5,60	0,208
10,6	0,283	0,0585	4,84	0,324	21,2	0,190	0,0352	5,39	0,195
11,0	0,338	0,0753	4,49	0,417	21,9	0,184	0,0328	5,61	0,182
11,8	0,404	0,0873	4,62	0,483	22,4	0,173	0,0314	5,52	0,174
12,7	0,400	0,0861	4,65	0,477	23,2	0,168	0,0294	5,71	0,164
13,5	0,379	0,0802	4,73	0,444	24,1	0,161	0,0272	5,92	0,151
14,5	0,342	0,0727	4,70	0,403	24,8	0,142	0,0257	5,52	0,142
14,8	0,330	0,0700	4,71	0,388	25,5	0,142	0,0243	5,84	0,134
15,1	0,305	0,0678	4,50	0,375	25,8	0,144	0,0239	6,03	0,131
15,3	0,316	0,0662	4,77	0,366	27,6	0,118	0,0208	5,67	0,122
15,6	0,308	0,0644	4,78	0,357	28,0	0,119	0,0202	5,91	0,112
16,1	0,302	0,0601	5,03	0,333	29,2	0,114	0,0187	6,10	0,103
16,6	0,291	0,0571	5,12	0,316	29,8	0,107	0,0179	6,01	0,099
17,0	0,272	0,0542	5,02	0,300	31,0	0,099	0,0164	6,01	0,091
17,3	0,260	0,0525	4,95	0,291	33,3	0,095	0,0141	6,77	0,078
17,7	0,242	0,0500	4,84	0,277	35,0	0,084	0,0126	6,67	0,070
18,0	0,260	0,0485	5,36	0,268	35,7	0,082	0,0119	6,88	0,066
18,3	0,231	0,0470	4,91	0,260	36,3	0,077	0,0112	6,87	0,062
18,9	0,226	0,0442	5,10	0,245	38,2	0,054	0,0079	6,73	0,044

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen:

von $r = 10$ bis $r = 15 : 4A/\pi^3 = 4{,}53$
" $r = 15$ " $r = 20$ " $= 4{,}96$
" $r = 20$ " $r = 25$ " $= 5{,}61$
" $r = 25$ " $r = 30$ " $= 5{,}93$
" $r = 30$ " $r = 40$ " $= 6{,}65$.

Hierbei sind die beiden ersten Werthe für $r = 10{,}3$ und $r = 10{,}5$ nicht mit berücksichtigt.

Das Hauptmittel ist:

$$\frac{4A}{\pi^3} = 5{,}54.$$

Die berechneten Werthe der Winkelgeschwindigkeiten sind auf Taf. V Fig. 2 durch die Curven I, II und III dargestellt, während die den beobachteten Werthen entsprechenden Punkte durch gerade Linien miteinander verbunden sind. Die Abweichung der aus den Beobachtungen sich ergebenden gebrochenen Linien von den der theoretischen Formel entsprechenden Curven dürfte vorzugsweise durch die folgenden Umstände bedingt sein.

1. Die Schellacktheilchen, deren Umlaufszeiten beobachtet worden sind, gehören nicht der Mittelebene der Flüssigkeitsplatte an, für welche die theoretischen Werthe berechnet sind, sondern befinden sich in verschiedenen Entfernungen von dieser.

2. Bei der Entwickelung der Theorie wurde die Voraussetzung gemacht, dass in den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen die Glieder, welche die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen und die ersten Differentialquotienten derselben nach den Coordinaten enthalten, zu vernachlässigen sind. Es ist wahrscheinlich, dass dies für die dem inneren Electrodenrand benachbarten Theile der Flüssigkeit nicht zulässig ist.

3. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen werden überdies integrirt nur für grosse Werthe des Radius vectors r. Auch hierdurch kann eine Abweichung des theoretischen Werthes der Geschwindigkeit von dem beobachteten bedingt sein.

Der erste Umstand macht sich ohne Zweifel geltend bei

der zweiten Beobachtungsreihe. Man sieht, dass die Linie, welche die beobachteten Werthe der Winkelgeschwindigkeit verbindet bei $r = 18{,}3$ eine plötzliche Verschiebung erleidet, entsprechend einem Uebergang zu verhältnissmässig grösseren Geschwindigkeiten der Theilchen. Es würde dies darauf hinweisen, dass die von dem inneren Electrodenring bis zu jenem Radius vector beobachteten Theilchen der Mittelebene der Flüssigkeitsscheibe ferner liegen, als die in dem äusseren Theil des Flüssigkeitsrings beobachteten. Durch denselben Umstand dürfte auch die dritte Beobachtungsreihe entstellt sein.

Der Einfluss des zweiten und dritten Punktes gibt sich deutlich bei der ersten Beobachtungsreihe zu erkennen dadurch, dass von $r = 11$ bis $r = 13{,}3$ die beobachteten Geschwindigkeiten erheblich hinter den berechneten zurückbleiben. Wenn hierbei der zweite Punkt derjenige ist, welcher den grössten Einfluss ausübt, so muss der Anschluss der beobachteten Winkelgeschwindigkeiten an die berechneten ein um so besserer sein, je kleiner die absoluten Werthe dieser Geschwindigkeiten sind. Dies wird bestätigt durch eine vierte Beobachtungsreihe, bei der die Winkelgeschwindigkeiten nur $^2/_3$ der bisherigen betrugen, und deren Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

IV. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
12,3	0,283	0,0876	3,23	0,312	19,5	0,139	0,0414	3,36	0,147
12,5	0,286	0,0869	3,29	0,310	20,0	0,154	0,0393	3,92	0,140
12,9	0,281	0,0850	3,31	0,303	20,8	0,140	0,0368	3,80	0,131
13,0	0,281	0,0840	3,34	0,299	21,5	0,110	0,0340	3,24	0,121
13,7	0,255	0,0789	3,23	0,281	23,7	0,100	0,0281	3,56	0,100
13,8	0,260	0,0784	3,32	0,279	24,9	0,101	0,0256	3,94	0,091
15,6	0,237	0,0645	3,67	0,230	25,5	0,080	0,0244	3,28	0,087
15,7	0,233	0,0635	3,67	0,226	26,5	0,080	0,0227	3,52	0,081
15,8	0,224	0,0629	3,56	0,224	31,3	0,063	0,0160	3,94	0,056
16,8	0,222	0,0556	3,99	0,198	31,7	0,056	0,0156	3,59	0,055
17,1	0,209	0,0539	3,87	0,192	38,2	0,031	0,0080	3,87	0,029
18,8	0,145	0,0448	3,24	0,159					

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen:

von $r = 10$ bis $r = 15 : 4A/\pi^3 = 3,29$
„ „ $= 15$ „ „ $= 20$ „ $= 3,62$
„ „ $= 20$ „ „ $= 25$ „ $= 3,69$
„ „ $= 25$ „ „ $= 30$ „ $= 3,40$
„ „ $= 30$ „ „ $= 40$ „ $= 3,80$

Das Hauptmittel ist $4A/\pi^3 = 3,56$.

Die für diesen letzteren Werth sich ergebende Geschwindigkeitscurve ist in der Tafel gleichfalls mit den beobachteten Werthen der Winkelgeschwindigkeit zusammengestellt.

XIV. *Beobachtungen mit der magnetischen Wage von Toepler; von J. Freyberg.*

(Hierzu Taf. V Fig. 3—5.)

Bekanntlich hat Hr. Prof. Toepler in den Sitzungsberichten der Berliner Academie vom 18. October 1883[1]) die Einrichtung einer Wage angegeben, welche den Zweck hat, bei Absolutbestimmungen der Horizontalintensität die Schwingungsbeobachtung durch eine Wägung zu ersetzen.

Die von Toepler benutzte Wage wurde von demselben inzwischen mit einigen Abänderungen versehen, namentlich wurde an ihr eine Spiegelablesung angebracht. Da mit Anwendung dieses Hülfsmittels eine grössere Genauigkeit der Wägungen zu erwarten war, so schien es nicht unzweckmässig, die Toepler'schen Angaben durch die im Nachfolgenden mitgetheilten Beobachtungen zu ergänzen, bei denen auf den Einfluss der Temperatur besonders geachtet worden ist.

Zunächst will ich mit Ermächtigung von Prof. Toepler an der schematischen Fig. 3 die Einrichtung der benutzten Wage beschreiben. Die Figur ist nur eine Uebersichtszeichnung; die feineren Details der Correctionsvorrichtungen u. s. w. fehlen in derselben.

Auf einem festen eisenfreien Dreifuss D mit Stellschrau-

1) Vgl. auch Wied. Ann. **21.** p. 158—175. 1884. Auf diese Abhandlung beziehen sich auch alle weiter folgenden Citate.

ben lässt sich mittelst eines conischen Zapfens und einer kleinen Kurbel *k* der ganze obere Theil des Instrumentes (die ganze Wage sammt Tragsäule, Glasgehäuse *G* und dessen Bodenplatte *P*) um die Lothlinie drehen. Die Drehungen sind an dem festen Theilkreis *t* unterhalb der Bodenplatte mit Nonien bis auf Minuten ablesbar. Der Kurbelmechanismus besteht zur Vermeidung von Erschütterungen aus einem Schraubengetriebe.

Die schwingenden Theile der Wage haben eine kreuzförmige Anordnung, bestehend aus einem ungefähr lothrecht stehenden Magneten *m* (gebildet aus zwei kräftigen Lamellen) und einem fest mit ihm verbundenen, sehr leichten Messingbalken *b*. Dieses System ruht vermittelst einer in der Mitte befestigten Schneide auf ebenen Achatplatten, welche in einen Rahmen am oberen Ende der Tragsäule eingelassen und alsdann zusammen plan geschliffen sind. Letzterer Rahmen kann durch Justirschrauben, welche in der Figur weggelassen sind, so gestellt werden, dass die Schliffläche der Achatplatten genau senkrecht zur Drehaxe ist, also in die Horizontalebene fällt. Sowohl die Senkrechtstellung der Drehaxe des Instrumentes, als auch die vorhergenannte Justirung der Achatunterlage lässt sich nach bekannten Methoden mit der Libelle bis auf wenige Secunden genau herstellen. Die Enden des Balkens tragen nach innen zu geschärfte Ringschneiden, an welche sehr leichte Aluminiumschalen angehängt werden können, von denen eine in Fig. 3 rechter Hand gezeichnet ist. Das Gewicht einer Schale beträgt nur 0,185 g.

Die Wage ist mit einer Arretirungsvorrichtung versehen, welche den Wagebalken mit zwei Korkpolstern von unten berührt und denselben zu beruhigen gestattet, ohne die Mittelschneide von den Achatplatten abzuheben.

Die Wageausschläge werden nach der bekannten Methode der Umkehrbeobachtungen mit dem kleinen Fernrohr *F* in einem Spiegel, der in der Verlängerung der Mittelschneide liegt, abgelesen. Zu dem Ende ist dicht neben dem Fernrohr eine kleine photographirte Scala *s* am Fernrohrträger befestigt. Fernrohr und Scala nehmen somit an der Umdrehung der Wage theil. Die Wagschalen sind vermittelst kleiner

verschliessbarer Klappen rechts und links am Gehäuse zugänglich.

Im Inneren des Instrumentes wurde ein feines Thermometer angebracht. — Das Glasgehäuse lässt sich von der Bodenplatte P abheben; ist dies geschehen, so kann auch der Magnet sammt Balken von der Mittelschneide gehoben und zu einer Ablenkungsbeobachtung benutzt werden.

Das ganze Instrument ist klein; Fig. 3 ist etwa in $^1/_6$ natürlicher Grösse gezeichnet.

Bezüglich der Benutzung des Instrumentes bei Bestimmung der Horizontalintensität verweise ich auf die Toepler'sche Abhandlung. Hier sei nur erwähnt, dass, um das Product aus dem magnetischen Moment M und der Horizontalintensität H zu bestimmen, man die Schwingungsebene der Wage in den Meridian orientirt und sie durch entsprechende Belastung der zu leicht erscheinenden Schale ins Gleichgewicht bringt, wobei irgend ein Theilstrich der Fernrohrscala als Nullpunkt gelten kann. Alsdann dreht man die Wage auf ihrem Zapfen um 180° und äquilibrirt wieder auf derselben Schale. Die Gewichtsdifferenz $Q_1 - Q_2$ misst das Product MH nach der Formel:

$$(1) \qquad MH = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2) . l . g,$$

wobei l die Armlänge für diejenige Schale bedeutet, auf welcher die Belastungen Q_1 und Q_2 stattfinden. Vorausgesetzt ist bei einer derartigen Doppelwägung, dass die drei Schneiden annähernd in eine Ebene fallen, und die Magnetaxe nahezu senkrecht auf dieser Ebene steht. Abweichungen von letzterer Bedingung haben ungefähr denselben Einfluss, wie kleine Winkelabweichungen des ablenkenden Magnets bei Ablenkungsbeobachtungen. Die Bequemlichkeit der Methode beruht hauptsächlich darin, dass unter angenäherter Erfüllung vorgenannter Bedingungen diejenige Stellung der Magnetaxe, welche bei der Doppelwägung als Nulllage angenommen wird, nicht genau die Verticalstellung zu sein braucht.

Prof. Toepler fand durch Beobachtungen ohne Spiegelablesung, dass das Product MH durch eine einzelne Doppel-

wägung bis auf etwa $\pm ^1/_{4000}$ seines Werthes genau bestimmt wurde. Da das Gewicht des Lamellenpaares 332 g betrug und aus den Toepler'schen Beobachtungen für jedes Milligramm Stahl nicht mehr als etwa 183 [$\mathrm{mm}^{5/2}\,\mathrm{mg}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$] Stabmagnetismus sich ergibt, so würden sich bei kräftigeren Lamellen die Verhältnisse noch günstiger gestalten. Bei den unten folgenden Beobachtungen, ausschliesslich der allerersten, waren die Magnete noch schwächer, und zwar infolge der stattgehabten Bearbeitung der Wage (specifischer Magnetismus = 154 [$\mathrm{mm}^{5/2}\,\mathrm{mg}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$]). Ich habe dieselben nicht kräftiger magnetisiren wollen, um die Leistungen der Wägungsmethode selbst unter ungünstigen Umständen zu studiren.

I. Declinationsvariationen.

Prof. Toepler hat erwähnt[1]), dass seine Wage die Eigenschaft eines Declinationsvariometers besitzt, falls man die Schwingungsebene senkrecht zum Meridian stellt und das vorher äquilibrirte Instrument sich selbst überlässt. Wenngleich die Wage für diesen Zweck nicht bestimmt ist, so sind Beobachtungen der Art doch geeignet, über die Einstellungssicherheit Aufschluss zu geben.

Bezeichnet $d\varphi$ eine kleine Declinationsänderung, dA die mit Fernrohr und Scala beobachtete gleichzeitige Aenderung des Wagenstandes in Scalentheilen, e denjenigen Ausschlag der Wage, ebenfalls in Scalentheilen, welcher durch die Zulage von 1 mg hervorgebracht wird, so ist:

$$(2) \qquad \frac{dA}{d\varphi} = \frac{1}{2}\,(Q_1 - Q_2) \cdot e\,,$$

wenn $Q_1 - Q_2$ wie oben die Gewichtsdifferenz beim Stellungswechsel im Meridian, selbstverständlich auch in Milligrammen, bedeutet.[2]) Die Variationen des Wagenstandes und der

1) Toepler, l. c. p. 169.

2) Eine einfache Ableitung dieser Beziehung, welche mir Prof. Toepler mittheilte, ist folgende: Sei die Wage so eingestellt, dass die Richtung des magnetischen Meridians mit einem Lothe auf die Schwingungsebene den beliebigen Winkel φ bilde, und sei bei dieser Stellung Gleichgewicht hergestellt, so hat eine Variation $d\varphi$ eine Gleichgewichtsstörung zur Folge, welche durch eine entsprechende Variation dQ_1 der

Declination sind also einander proportional, insofern die durch die Gewichtsdifferenz $Q_1 - Q_2$ gemessene Grösse MH nur um kleine Bruchtheile ihres Werthes schwankt und e wesentlich nur von der Temperatur des Instrumentes beeinflusst wird.[1] Aus den Beobachtungen mit Spiegelablesung lässt sich diese Proportionalität sicher nachweisen. Fig. 4 zeigt eine ältere vergleichende Beobachtung vom 28. September 1883.[2] Die voll ausgezogene Curve bezeichnet den Gang der Declinationvariation von 6 Uhr morgens bis 6 Uhr abends mit einer Amplitude von etwa elf Minuten, beobachtet an dem Magnet einer gedämpften Spiegelbussole. Die punktirte Curve zeigt den Gang der mit Fernrohrablesung bestimmten Wagenstände. Die nach willkürlichen Einheiten aufgetragenen Ordinaten sind dem Absolutwerth nach nicht vergleichbar, ebensowenig wie genaue Proportionalität erwartet werden konnte, wegen der ungleichen Beobachtungstemperaturen. Nichtsdestoweniger ist das Zusammengehen beider Variationen unverkennbar.

Später habe ich sehr genaue Beobachtungen bei möglichst constanter Temperatur wiederholt, und zwar an einem Tage, an welchem die Amplitude der Declinationsvariation nur etwa 4,5 Minuten betrug (6. Januar 1884). Fig. 5 zeigt den Verlauf der Declination in Minuten von vormittags 9 Uhr bis 4 Uhr nachmittags, desgleichen die zugehörige

---

das Gleichgewicht herstellenden Belastung Q_1 ausgeglichen werden kann. Sind die im vorigen Abschnitte erwähnten Constructionsbedingungen mit hinreichender Annäherung erfüllt, so folgt, wenn man nach dem Schema der Gl. (1) der Toepler'schen Abhandlung den Gleichgewichtsfall ausdrückt, für die genannten Variationen unmittelbar die Beziehung:

$$MH \cos(\alpha + \gamma) \cos\varphi \, d\varphi - l \cos\gamma \, d Q_1 = 0 .$$

Wird die durch die Variationen $d\varphi$ bewirkte Gleichgewichtsstörung nicht durch die entsprechende Zulage dQ_1 ausgeglichen, so entsteht der Ausschlag $dA = dQ_1 . e$. Substituirt man diesen Werth und zugleich aus der oben im Text mit (1) bezeichneten Gleichung den Werth für MH, und beachtet man, dass α und γ kleine Winkel sind, so folgt für kleine Werthe von φ, d. h. für die magnetische West-Oststellung der Wage, das oben unter (2) angegebene Verhältniss $dA : d\varphi$.

1) Siehe die Bemerkung über den Einfluss der Temperatur auf die Empfindlichkeit l. c. p. 166.

2) Auf diese Beobachtung ist bereits bei Toepler, p. 170 verwiesen.

Variation der Wagenstände in Scalentheilen. Die durch besondere Beobachtung festgestellte Empfindlichkeit der Wage betrug hierbei sechzehn Scalentheile auf 1 mg Zulage. Die halbstündlichen Einzelbeobachtungen während des Zeitraumes der grössten Declinationsschwankungen und der kleinsten Temperaturänderungen sind wie folgt:

Zeit	Temperatur C°	Ausschlag in Scalentheilen von der Bussole	Ausschlag in Scalentheilen von der Wage	Berechnet. Ausschlag der Wage
12 Uhr 30 Min.	15,4	3,4	1,3	1,2
1 „ — „	15,5	4,3	1,6	1,5
1 „ 30 „	15,5	4,1	1,1	1,4
2 „ — „	15,4	2,9	1,0	1,0
2 „ 30 „	15,4	2,3	0,9	0,8
3 „ — „	15,3	1,1	0,5	0,4
3 „ 30 „	15,3	0,9	0,3	0,3

Die Columnen 3 und 4 geben die auf die Zeit von 9 Uhr früh bezogenen Variationen der Bussole und Wage. Bildet man das Verhältniss je zweier zusammengehöriger Werthe, und bestimmt man den Mittelwerth dieser Verhältnisse, so folgt aus den Beobachtungen:

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0{,}3553.$$

Rechnet man dagegen dasselbe Verhältniss aus der obigen Formel (2), wobei für $d\varphi$ in Minutenmaass $d\varphi/3438$ zu setzen ist, so ergibt sich, da $Q_1 - Q_2 = 151{,}195$ mg durch Doppelwägung gefunden war, und $e = 16$ betrug:

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0{,}3516.$$

Mit dieser theoretisch berechneten Zahl sind in Columne 5 diejenigen Wagenausschläge berechnet, welche aus Gl. (2) folgen würden. Die Uebereinstimmung mit den Beobachtungen ist überraschend. Man kann sagen, dass die Abweichungen in die Fehlergrenzen der Scalenablesung fallen. Freilich ist so gute Uebereinstimmung nur bei sehr constanter Temperatur zu erreichen. Die Differenz der Zahlen in Columne 4 und 5 beträgt im Mittel 0,1 Scalentheil oder in Gewichten ausgedrückt $^1/_{160}$ mg. Da das Product MH in Milligrammen durch 151,195/2 gemessen wird, so lässt sich

schliessen, dass, wenn die Wage in der Meridianstellung des Balkens äquilibrirt und sich selbst überlassen werden würde, eine Veränderung von H von im Mittel um $^1/_{12000}$ ihres Werthes unter sonst ungeänderten Umständen zu erkennen sein würde. Dieses Resultat zeigt, dass die Wage hinsichtlich ihrer Beweglichkeit sehr strengen Anforderungen entsprach. Bei Absolutbestimmungen, bei denen die Wage unter Einfluss, wenn auch kleiner Erschütterungen in verschiedene Stellung gebracht wird, treten allerdings noch anderweitige Fehlerquellen hinzu. Auch muss ich erwähnen, dass bei meinen Beobachtungen nur eine Wagschale (siehe Fig. 3) zur Anwendung kam. Bei der Neubearbeitung der Wage waren die festverbundenen Theile (Wagebalken und Magnete) nicht so ausgeglichen worden, dass dieselbe in der West-Ostlage ohne angehängte Schalen einspielte, was bei symmetrischer Massenvertheilung der Fall sein würde. Die linke Seite (Fig. 3) hatte ein Uebergewicht, sodass rechts eine der sehr leichten Schalen für die Wägung genügte. Diese Ungleichheit wurde belassen, da es nicht ohne Interesse war, bei ihrem Vorhandensein das Instrument zu prüfen.

II. Bestimmung des magnetischen Meridians.

Prof. Toepler hat ferner gezeigt[1]), dass sich die Wage ohne anderweitige Hülfsmittel zum Zweck der Intensitätsbestimmung orientiren, d. h. so einstellen lässt, dass die Schwingungsebene in die Meridianebene fällt. Da Zahlenangaben hierüber nicht vorliegen, so habe ich nachfolgende Beobachtungen angestellt.

Die in Rede stehende Einstellung wird bewirkt, indem man die Wage in beliebiger Stellung zum Meridian mittelst entsprechender Belastung zum Einspielen bringt und sie hierauf auf dem Horizontalkreise so lange dreht, bis sie bei derselben Belastung wieder einspielt. Die Halbirungslinie des Drehwinkels Θ gibt sodann die gewünschte Meridianstellung. Wegen der Genauigkeit ist es zweckmässig, die Ausgangsstellung so zu wählen, dass sie mit dem Meridian

1) Toepler, l. c. p. 164.

einen Winkel von beiläufig 90° bildet. Die erwähnten Operationen will ich der Kürze halber eine Meridianbestimmung nennen.

Bei der Ausführung verfuhr ich folgendermassen. Nachdem die Wage in einer beliebigen, durch Ablesungen am Theilkreis fixirten Stellung durch ein bestimmtes Gewicht soweit äquilibrirt worden war, dass das Fernrohrbild der photographirten Scala ungefähr mit dem mittleren Theilstrich um das Fadenkreuz schwang, wurde der Einstellungspunkt durch Rückkehrbeobachtungen genau ermittelt. Mit Hülfe der Arretirungsvorrichtung hinderte man nun die Bewegung des Balkens, ohne denselben jedoch von seiner Unterlage abzuheben, und drehte hierauf durch vorsichtiges Handhaben der Kurbel *k* die Wage in eine Lage, in welcher das Fernrohrbild bei der gleichen Belastung wiederum in der Nähe der ursprünglichen Einstellung spielte. War auf diese Weise die der Ausgangsstellung correspondirende zweite Lage der Schwingungsebene jenseits des Meridians annähernd gefunden, so lies sich dieselbe durch Interpolation leicht genau bestimmen. Ich ermittelte in zwei um einen Grad der Kreistheilung verschiedenen Nachbarpositionen der Schwingungsebene die Einstellungen der Fernrohrscala und berechnete daraus denjenigen Punkt des Theilkreises, bei welchem der Kreuzungspunkt der Fäden genau wieder dieselbe Stellung an der Fernrohrscala haben würde, wie bei der Ausgangsposition der Wage. Die kleinen Drehungen innerhalb eines Grades wurden bei freispielender Wage vorgenommen. Da hierbei durch Verschiebung der Mittelschneide auf den Achatplatten möglicherweise kleine Verdrehungen der Schwingungsebene der Wage auftreten konnten, so waren auf der photographirten Scala ausser den horizontalen Theilstrichen noch verticale Linien angebracht, um die erwähnten Verdrehungen erkennbar zu machen.

Eine nach obigem Schema ausgeführte Beobachtungsreihe ist in der folgenden Tabelle wiedergegeben. Die Lesungen am Theilkreise erfolgten an zwei einander gegenüberstehenden Nonien (1 und 2). Die Beobachtungen I beziehen sich auf die Ausgangsstellung der Schwingungsebene

II auf die behufs Interpolation benutzten Endstellungen. Die 8. Columne gibt den Werth von $\frac{1}{2}\Theta$, d. h. denjenigen Drehwinkel, um welchen die Wage von der Ausgangslage I zu drehen wäre, um in die Meridianebene zu gelangen. In Columne 9 sind zum Vergleich wegen etwaiger Declinationsänderungen correspondirende Ablesungen an der Spiegelbussole notirt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Stellung d. Schwingungsebene	Ablesungen am Theilkreis Non. 1	Ablesungen am Theilkreis Non. 2	Ablesungen an der Fernrohrscala	Auf 1° Drehung der Schwingungsebene kommen Scalenth.	Durch Interpolation bestimmte Endstellung der Wage Non. 1	Durch Interpolation bestimmte Endstellung der Wage Non. 2	$\frac{1}{2}\Theta$	Ablesung am Declinatorium
I	93° 0'	273° 1'	24,5	—	—	—	—	—
II	278 0	98 0	18,9	19,9	278° 16,9'	98° 16,9'	87° 21,8'	465,2
	279 0	99 0	38,8					
I	93 0	273 0	24,9	—	—	—	—	—
II	278 0	97 59	19,1	20,2	278 17,2	98 16,2	87 21,7	464,8
	279 0	98 59	39,3					
I	93 0	273 0	25,5	—	—	—	—	—
II	278 0	98 0	19,5	20,3	278 17,8	98 17,8	87 21,1	464,6
	279 0	98 59	39,8					
I	93 0	273 0	24,7	—	—	—	—	—
II	278 0	97 59	19,1	20,1	278 16,7	98 15,7	87 21,9	463,7
	279 0	98 59	39,2					
I	93 0	273 0	24,6	—	—	—	—	—
II	278 0	97 59	18,2	20,9	278 18,3	98 17,3	87 21,1	462,7
	279 0	98 59	39,1					

Zu jeder Meridianbestimmung bedurfte man etwa zwölf bis fünfzehn Minuten Zeit. Columne 5 zeigt, dass in den beiden Stellungen diesseits und jenseits des Meridians geringe Verdrehungen am Theilkreise schon bedeutende Wagenausschläge veranlassen. Bei der geringen Dämpfung der Wage dauerte es immerhin einige Minuten, bevor zur Ablesung der Rückkehrpunkte für die Ruhelagenbestimmung geschritten werden konnte, zumal damit erst begonnen wurde bei einem Schwingungsbogen von etwa acht Scalentheilen, um die durch eine minder vollkommene Schneide bedingten Fehler möglichst zu eliminiren. Die erzielten Werthe für $\frac{1}{2}\Theta$ zeigen grosse Uebereinstimmung; jedenfalls ist bewiesen, dass die Genauigkeit der Einstellung in den Meridian viel grösser ist, als sie für den Zweck der Bestimmung der Horizontal-

intensität nöthig ist, da der Fehler der Winkelstellung mit dem Cosinus in das Resultat eingeht. — Die Ausführung der Meridianbestimmung erweist sich freilich nicht als so genau, um die inzwischen stattgehabte kleine Aenderung der Declination (2,5 Minuten) festzustellen. Diese Ungenauigkeit hat wahrscheinlich zum grössten Theil ihren Grund in kleinen Lagenänderungen der Mittelschneide auf ihrer Unterlage bei der Operation II, welche Fehler sich möglicherweise der Wahrnehmung entzogen haben. Es muss bemerkt werden, dass bei den Doppelwägungen in der Meridianebene, für welche das Instrument bestimmt ist, der Einfluss dieser Fehlerquelle ein Minimum wird. Grössere Declinationsschwankungen würden bei den Meridianbestimmungen übrigens auch zu erkennen gewesen sein.

III. Wägungen zur Bestimmung von MH.

In der mehrfach erwähnten Abhandlung von Prof. Toepler findet sich das Resultat einer Reihe von Doppelwägungen, wie solche bei Bestimmung der Horizontalintensität nothwendig und zu Anfang dieser Zeilen erläutert worden sind. Zum Vergleich mit diesem führte ich mit der durch die optische Ablesevorrichtung vervollkommneten Wage eine grössere Anzahl solcher Wägungen aus, die zu den Angaben nachfolgender Tabelle führten.

Die Stellungen des zu belastenden, abwechselnd nach Norden und Süden gerichteten Armes der Wage sind dabei durch n und s gekennzeichnet. Die Empfindlichkeit des Instrumentes betrug bei diesen Wägungen 18,3. Mit letzterem Werthe sind die aus Columne 5 in Scalentheilen sich ergebenden Einstellungsdifferenzen in Milligramme umgerechnet worden (siehe Col. 6). Vor jeder Wägung wurde die Temperatur im Inneren des Wagegehäuses, sowie zu gewissen Zeiten der Stand eines Intensitätsvariometers beobachtet. Die Aufstellung der Scala vor letzterem Instrumente war so getroffen, dass der zunehmenden Intensität wachsende Scalentheile entsprechen.

1. Ablesung am Intens.-Variomet. Scalenth.	2. Ablesung am Thermometer C°.	3. Richtung des Wagebalkens	4. Belastung mg	5. Einstellungspunkt	6. Differenz der Einstellungen in mg	7. Werthe von $(Q_1 - Q_2)$ mg	8. Reducirte Werthe mg	9. Mittel der Einstellungen
312,3	18,60	*n*	577	30,85	0,26	152,26	152,26	33,23
	18,63	*s*	425	35,61	0,24	152,24	28	33,37
311,6	18,70	*n*	577	31,13	0,21	152,21	28	33,04
	18,70	*s*	425	34,94	0,17	152,17	28	33,37
	18,76	*n*	577	31,80	0,15	152,15	29	33,17
	18,82	*s*	425	34,53	0,12	152,12	29	33,47
310,3	18,86	*n*	577	32,40	0,08	152,08	29	33,15
	18,90	*s*	425	33,90	0,02	152,02	27	33,68
	19,00	*n*	577	33,45	0,00	152,00	28	33,44
	19,10	*s*	425	33,44	−0,03	151,97	28	33,70
308,0	19,20	*n*	577	33,97	−0,08	151,92	27	33,23
	19,20	*s*	425	32,48	−0,12	151,88	26	33,61
	19,30	*n*	577	34,74	−0,16	151,84	26	33,69
307,1	19,45	*s*	425	31,85				
						Mittel:	152,28	33,37

Die Zahlen der Columne 1 lassen eine stetige Abnahme der Horizontalintensität während der $1^1/_2$ stündigen Beobachtungszeit erkennen. Da für das benutzte Bifilarvariometer der Scalenwerth $E = 0{,}00039$ gefunden war, so rechnet sich, zugleich mit Rücksicht auf die Temperaturcorrection des Variometermagnets die Gesammtabnahme der Intensität zu $^1/_{670}$ ihres anfänglichen Werthes. Die Grösse dieser Verminderung ist zweifellos zum Theil localen Umständen zuzuschreiben.[1])

Die Differenzen von $Q_1 - Q_2$ in Columne 7 zeigen gleichfalls eine stetige Abnahme von 152,260 bis 151,842 mg, also bis zu $^1/_{360}$ des Anfangswerthes, welche hauptsächlich einen zweifachen Grund hat. Einmal ist es die bereits bestimmte Abnahme der Intensität während der Beobachtungszeit, von der aber der localen Umstände halber nicht ausgesagt werden kann, ob dieselbe am Orte der Wage dieselbe Grösse besass, sodann ist es aber der Einfluss der Temperatur auf den Wagemagnet, welcher das Drehungsmoment MH fortgesetzt verkleinert. Man könnte diesen Coëfficienten μ aus

1) Die l. c. p. 170 von Prof. Toepler erwähnte eiserne Heizungsanlage, welche sich unter dem Beobachtungslocale befindet, war am Beobachtungstage in Benutzung.

den Doppelwägungen selbst ermitteln, wenn diese bei hinreichend grossen Temperaturdifferenzen wiederholt würden. Ergeben zwei bei den Temperaturen t und t' ausgeführte Doppelwägungen die Werthe $Q_1 - Q_2$, resp. $Q_1' - Q_2'$, so folgt unter Berücksichtigung der inzwischen stattgefundenen Aenderung der Horizontalintensität:

$$(3) \qquad \mu = \frac{1}{t' - t}\left[1 - \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t} \cdot \frac{1}{1 + nE}\right],$$

worin α den Ausdehnungscoëfficienten des Wagebalkens, n die Anzahl der am Bifilarvariometer abgelesenen Scalentheile und E den Scalenwerth bedeutet.

In den allermeisten Fällen, wo es sich um Bestimmung von MH handelt, wird von dessen Aenderung innerhalb einer einzelnen Doppelwägung abgesehen werden können. Zwischen aufeinander folgenden Werthen der Columne 7 besteht sehr gute Uebereinstimmung. Es werden daher zwei rasch nacheinander ausgeführte Doppelwägungen, welche drei Werthe von MH ergeben, meistens genügen; bei einiger Uebung sind dazu nur wenige Minuten erforderlich.

Betrachtet man die vorgekommenen Aenderungen als gleichförmig vor sich gegangen und reducirt die Angaben der Col. 7 auf den ersten Werth derselben, so ergeben sich die Zahlen unter 8. Diese stimmen sehr gut überein; die grösste Abweichung vom Mittel beträgt etwa $^1/_{50}$ mg, also $^1/_{8000}$ der zu wägenden Grösse. — Wenn der gleiche Genauigkeitsgrad von der Längenbestimmung des benutzten Balkenarmes verlangt wird, so müsste dieselbe bis auf $\pm\,^1/_{64}$ mm richtig ausgeführt werden.

Zur Controle sind in Columne 9 die Mittel der Einstellungen angegeben. Die grösste Abweichung beträgt $^1/_3$ Scalentheil, das ist $^1/_{55}$ mg, woraus zu schliessen ist, dass die Einstellung der von dem Einfluss der Horizontalcomponente befreiten Wage inzwischen sich nicht wesentlich geändert hatte.

Man ersieht aus den verschiedenen Resultaten der Wägungen, dass mit Hülfe der optischen Ablesevorrichtung sich erheblich übereinstimmendere Beobachtungen erzielen lassen, als früher ohne dieselbe möglich war.

VI. Empfindlichkeit der Wage.

Bei der Benutzung der Wage wird die Einstellungssicherheit durch unvermeidliche Erschütterungen der Wagschalen beeinflusst. Das einfachste Mittel die Grösse des bei einer gewissen Gewichtszulage möglichen Fehlers zu ermitteln, ist offenbar eine Reihe von nacheinander vorgenommenen Empfindlichkeitsbestimmungen.

Beobachtungen dieser Art, bei denen die Schwingungsebene der Wage im Meridian stand und das Auflegen und Abnehmen des Zulagsgewichts von 1 mg bei halbarretirter Wage vorgenommen wurde, ergaben bei sehr constanter Temperatur die Daten folgender Tabelle.

Belastung der Schale mg	Einstellungspunkt der Wage	Empfindlichkeit Scalenth.	Temperatur C°.
577	30,42		18,60
576	13,05	17,37	18,62
577	30,05	17,00	18,64
576	13,24	16,81	18,65
577	30,51	17,27	18,70
576	13,63	16,88	18,70
Mittel	—	17,07	18,66

Die grösste Abweichung (0,3 Scalentheile) vom Mittel macht $^1/_{57}$ mg aus. Der Einfluss dieser relativ unsicheren Bestimmung der Empfindlichkeit ist trotzdem gering, weil nur Bruchtheile von Milligrammen damit zu bestimmen sind; unter günstigen Umständen kann dadurch bei der Doppelwägung von MH ein Fehler von $\pm {}^1/_{8660}$ entstehen, was auch in der That den Beobachtungen unter III. entspricht.

Von nicht zu unterschätzendem Einflusse auf die Empfindlichkeit ist die Temperatur. Ein Steigen derselben bewirkt eine Schwächung der Magnete, wodurch eine Zunahme der Empfindlichkeit bedingt wird, und umgekehrt.[1])

Um diese Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Temperatur zu constatiren, wurde das Beobachtungslocal im Laufe eines Tages auf verschiedene Temperaturen gebracht, welche am Thermometer unter dem Glasgehäuse G abgelesen wurden. Die Bestimmung der Empfindlichkeit fand in

1) Vgl. Formel (3) l. c. p. 161.

Intervallen von etwa zwei Stunden statt, in welcher Zeit ein Ausgleich zwischen der Temperatur der Magnete und der sie umgebenden Luft angenommen werden konnte.

Belastung der Schale mg	Einstellungspunkt an der Fernrohrscala	Empfindlichkeit in Scalenth.	Temperatur C°.	Aenderung d. Empfindlichk. für 1° in Scalenth.
347 348	16,59 28,08	11,49	11,50	—
347 348	27,96 43,15	15,15	22,05	0,35
347 348	31,80 49,61	17,81	28,25	0,38
347 348	25,78 41,50	15,72	22,35	0,39
347 348	21,55 36,98	15,43	18,30	0,58
347 348	12,53 26,48	13,95	12,40	0,37

Die Aenderung der Empfindlichkeit für einen Grad Temperaturschwankung beträgt hiernach im Mittel 0,4 Scalentheile (etwa $^1/_{40}$ mg).

Bei genauerem Operiren mit der magnetischen Wage muss daher auch dieser Einfluss der Temperaturschwankungen in Rücksicht gezogen werden. Inwieweit derselbe mit der oben erwähnten unsymmetrischen Massenvertheilung am Balken zusammenhängt, lässt sich aus den vorliegenden Beobachtungen nicht angeben. Immerhin wird man bei Temperaturänderungen innerhalb zweier Grade, falls die Wage mit hinreichend kräftigen Magneten versehen ist, von den Variationen der Empfindlichkeit absehen können, wenn man sich mit einer Genauigkeit bis auf etwa $\pm\, ^1/_{4000}$ begnügen will.

Zum Schlusse fühle ich mich veranlasst, Hrn. Geh. Hofrath Prof. Dr. Toepler meinen Dank auszusprechen für die freundliche Unterstützung, welche derselbe mir bei Ausführung der Beobachtungen bereitwilligst zu Theil werden liess.

Dresden, Mitte Januar 1885.

XV. *Ueber die von dem electrischen Strom bei der Zersetzung von Electrolyten geleistete Arbeit;* von Hans Jahn.

Vor einiger Zeit[1]) habe ich in Uebereinstimmung mit den älteren, weniger genauen Versuchen von Joule und E. Becquerel nachgewiesen, dass auch in Electrolyten die gesammte Stromarbeit in Wärme verwandelt wird, wenn der Strom ausser der Ueberwindung des Leitungswiderstandes keine Arbeit leistet. In diesem Falle ist:

$$J\Delta = \frac{W}{\alpha},$$

wenn J die Stromintensität, Δ die Potentialdifferenz zwischen den beiden Electroden, W die während der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge, α das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bezeichnet. Hat der Strom jedoch ausserdem noch Arbeit zu leisten, so muss:

$$J\Delta > \frac{W}{\alpha}, \quad \text{somit} \quad J\Delta = \frac{W}{\alpha} + X \quad \text{sein.}$$

Aus den Versuchen von Favre, Raoult, Berthelot, Woods, Kiechl u. a.[2]) geht mit grosser Wahrscheinlichkeit hervor, dass der grösste Theil der nicht Wärme liefernden Stromarbeit zu chemischer Arbeit verwendet wird. Dann würde X wesentlich nichts anderes bedeuten, als die zur Trennung der Ionen der von dem Strome zerlegten Verbindung nöthige Arbeit, und: $\alpha X = Z$,
d. h. das Wärmeäquivalent der von dem Strome geleisteten Arbeit müsste mit der Bildungswärme der betreffenden Verbindung nahe zusammenfallen.

Da die von mir zum Nachweis der Gültigkeit des Joule'schen Gesetzes angewendete Methode einen bisher nicht erreichten Grad von Genauigkeit ermöglicht, schien es mir nicht überflüssig, unter Benutzung derselben Methode, zu untersuchen, inwieweit die obige Schlussfolgerung den Thatsachen entspricht.

Betreffs der Einzelheiten der bei der vorliegenden Untersuchung angewendeten Methode, der Anordnung der Apparate,

1) Jahn, Wied. Ann. 25. p. 49. 1885.
2) G. Wiedemann, Electricität. 2. p. 863 flgde.

Aichung derselben, sowie des Ganges der Versuche muss auf die eingangs erwähnte Abhandlung verwiesen werden.

Was die Berechnung der Versuche anbelangt, so möge bemerkt werden, dass die beiden Galvanometer zur Bestimmung der Stromintensität, sowie der Potentialdifferenz in regelmässigen Intervallen von 5 Minuten abgelesen wurden. Die mittlere Stromintensität:

$$\bar{J} = \frac{1}{t}\int_0^t J\,dt,$$

sowie die mittlere Stromarbeit:

$$\bar{A} = \frac{1}{t}\int_0 J(iR - J\varrho)\,dt,$$

unter Beibehaltung der in der erwähnten Abhandlung benutzten Bezeichnungsweise, wurden mit Hülfe der Simpson'schen Regel berechnet. Die zur Berechnung von $\bar{A}$ benutzten Einzelwerthe der Stromarbeit wurden erhalten durch Multiplication der dem jeweiligen Zeitmoment entsprechenden Stromintensität mit der fast gleichzeitig bestimmten Potentialdifferenz. Als J_0, resp. A_0 wurden in die Simpson'sche Formel die aus der ersten, wenige Secunden nach Schliessung des Stromes ausgeführten Beobachtung gewonnenen Daten eingeführt. Die letzte Beobachtung konnte selbstverständlich nicht im Moment des Stromöffnens ausgeführt werden.

Wenn die nicht Wärme liefernde Stromarbeit für chemische Arbeit verwendet wird, so muss:

$$\alpha \bar{A} = \frac{W_h + Z}{t} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{W_h + Z}{t \cdot \bar{A}}$$

sein, wenn W_h die während der Zeit t entwickelte Wärmemenge, t die in Secunden ausgedrückte Versuchszeit, Z die der zersetzten Menge der betreffenden Verbindung entsprechende Bildungswärme ist.

Die Menge des während des Versuches ausgeschiedenen Kation, resp. der zersetzten Verbindung, wurde unter Zugrundelegung des von F. und W. Kohlrausch bestimmten electrochemischen Aequivalentes des Kupfers: 0,3281 mg

aus der mittleren Stromintensität berechnet. Für die Bildungswärmen der drei untersuchten Verbindungen wurden die von J. Thomsen ermittelten Werthe angenommen, und zwar:

$$\left.\begin{aligned}(Cu, O, SO_3 aq) &= 55\,960^{1)}\\(Zn, O, SO_3 aq) &= 106\,090^{2)}\\(H_2, O) &= 68\,357^{3)}\end{aligned}\right\}\text{ Calorien.}$$

Die zwei ersten Zahlen beziehen sich auf verdünntere Lösungen, als die für die Electrolyse verwendeten; allein bei der Geringfügigkeit der Verdünnungswärmen konnten dieselben, ohne der Genauigkeit der Resultate wesentlichen Abbruch zu thun, eingesetzt werden. Ebenso konnte die kleine Correctur vernachlässigt werden, die an den Thomsen'schen Zahlen wegen der Verschiedenheit der zu Grunde liegenden Wärmeeinheit noch hätte angebracht werden sollen.

Für die Atomgewichte wurden die von L. Meyer und Seubert berechneten Werthe:

$Cu = 63{,}18$, $Zn = 64{,}88$, $O = 15{,}96$ benutzt.

Es bedarf kaum der ausdrücklichen Erwähnung, dass die in der Zersetzungszelle befindliche Lösung nach jedem Versuch erneuert wurde. Die Zersetzungszelle hatte ganz dieselbe Form wie die in der citirten Abhandlung beschriebene und abgebildete. Die Anode bestand aus Platin, die Kathode bei den Versuchen mit Kupfer-, resp. Zinksulfat, aus electrolytischem Kupfer, resp. Zink. Bei den Versuchen über die Zersetzung des Wassers wurden zwei Platinelectroden verwendet. Um das Entweichen der bei der Zersetzung sich entwickelnden Gase zu ermöglichen, wurde durch eine dritte Bohrung des die Zersetzungszelle verschliessenden Kautschukstopfens eine silberne Capillare geführt.

Als Stromgeber fungirten bei allen Versuchen drei Bunsen'sche Elemente.

In den nachfolgenden Tabellen bezeichnet:

φ den Ablenkungswinkel im Galvanometer T[4])

ψ " " " G

1) J. Thomsen, Thermochem. Untersuchungen. **3.** p. 310.

2) l. c. **3.** p. 276. 3) l. c. **2.** p. 52.

4) Mit T wird das zur Messung der Stromintensität, mit G das zur Messung der Potentialdifferenz bestimmte Galvanometer bezeichnet.

φ_1 den Ablenkungswinkel im Galvanometer T } bei Einschaltung des Normalwiderstandes
ψ_1 " " " " G }
C die electromotorische Kraft des Normalelementes für die beobachtete Temperatur,
ϑ den Ablenkungswinkel im Galvanometer G während der Einschaltung des Normalelementes,
$iR - J\varrho$ die Potentialdifferenz zwischen den beiden Electroden,
J die Stromintensität,
t die in Minuten ausgedrückte, von dem Moment des Stromschlusses bis zu der entsprechenden Ablesung verflossene Zeit,
N den zur Aichung des Galvanometers T benutzten Normalwiderstand,
G das corrigirte Gewicht des während des Wärmeausgleiches von dem Calorimeter eingesaugten Quecksilbers,
W_h die G entsprechende Wärmemenge,
$\bar{A}$ die mittlere Stromarbeit pro Zeiteinheit,
$\bar{J}$ die mittlere Stromintensität,
α das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit.

Versuche mit Kupfersulfat.

Tabelle I.

Versuch I. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung $CuSO_4 + 200\,H_2O$.

t	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{tg}\,\psi$	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,024 031	0,077 800	0,035 008	5,6518	0,197 85
5	0,024 557	0,077 618	0,035 774	5,6384	0,201 71
10	0,025 901	0,077 457	0,037 732	5,6265	0,212 3
15	0,027 452	0,077 413	0,039 991	5,6231	0,224 87
20	0,029 529	0,077 359	0,043 017	5,6189	0,241 71
25	0,031 136	0,077 310	0,045 358	5,6151	0,254 69
30	0,032 898	0,077 251	0,047 925	5,6105	0,268 88
35	0,034 972	0,077 163	0,050 946	5,6039	0,285 5
40	0,036 520	0,077 089	0,053 201	5,5983	0,297 83
45	0,038 358	0,076 981	0,055 879	5,5901	0,312 37
50	0,040 348	0,076 942	0,058 778	5,5870	0,328 4
55	0,042 547	0,076 907	0,061 982	5,5841	0,346 11
59	0,044 537	0,076 825	0,064 88	5,5779	0,361 9
	$\mathrm{tg}\,\varphi_1$	$\mathrm{tg}\,\psi_1$	$\mathrm{tg}\,\vartheta$	C Volt	N Ohm
	0,040 985	0,077 026	0,019 758	1,4362	93,776
		G Gramm.	W_h Calor.	$\bar{A}$	$\bar{J}$ Ampère
		2,796 8	181,49	0,27108	0,048 359

Ausgeschiedene Kupfermenge .	0,05712 g	
Zersetzungswärme	50,592	Cal.
Entwickelte Wärmemenge . .	181,49	
	232,08	
pro Zeiteinheit	0,064467	

$\alpha = 0,2378.$

Tabelle II.

Versuch II. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $CuSO_4 + 200 H_2O$.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,024 765	0,077 800	0,036 095	5,6115	0,202 55
5	0,025 319	0,077 702	0,036 902	5,6043	0,206 82
10	0,024 654	0,077 677	0,035 116	5,6027	0,196 74
15	0,026 122	0,077 616	0,038 073	5,5980	0,213 13
20	0,028 283	0,077 604	0,041 223	5,5969	0,230 72
25	0,030 541	0,077 555	0,044 514	5,5929	0,248 96
30	0,031 053	0,077 653	0,045 26	5,6000	0,253 46
35	0,033 767	0,077 530	0,049 216	5,5907	0,275 15
40	0,035 732	0,077 604	0,052 08	5,5958	0,291 43
45	0,037 957	0,077 432	0,055 323	5,5830	0,308 87
50	0,040 087	0,077 371	0,058 427	5,5783	0,325 92
55	0,041 745	" "	0,060 844	5,5780	0,339 39
59	0,042 989	" "	0,062 657	5,5778	0,349 49
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,040 929	0,077 545	0,019 891	1,4356	93,818
		G Gramme	W_h Calor.	A	J Amp.
		2,746 5	178,23	0,26439	0,047 282

Ausgeschiedene Kupfermenge .	0,055 848 g	
Zersetzungswärme	49,47	Cal.
Entwickelte Wärmemenge . .	178,23	
	227,70	
pro Zeiteinheit	0,06325	

$\alpha = 0,2392.$

Tabelle III.

Versuch III. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $CuSO_4 + 100 H_2O$.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,041 675	0,078 677	0,063 743	5,7006	0,346 27
5	0,042 228	0,078 388	0,061 548	5,6795	0,349 56
10	0,045 477	0,078 314	0,066 284	5,6737	0,376 08
15	0,047 827	0,078 226	0,069 709	5,6669	0,395 03

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
20	0,050 783	0,078 162	0,074 017	5,6619	0,419 08
25	0,053 972	0,078 094	0,078 665	5,6565	0,444 97
30	0,057 069	0,078 04	0,083 18	5,6522	0,470 15
35	0,060 64	0,077 914	0,088 384	5,6427	0,498 73
40	0,064 655	0,077 859	0,094 236	5,6379	0,531 30
45	0,068 675	0,077 80	0,100 1	5,6330	0,563 84
50	0,072 767	0,077 702	0,106 06	5,6253	0,596 62
55	0,077 016	0,077 618	0,112 25	5,6186	0,630 70
59	0,080 598	0,077 555	0,117 48	5,6136	0,659 45
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,041 565	0,078 349	0,019 798	1,4360	93,805
		G Gramme	W_h Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$ Amp.
		4,965 0	322,20	0,48121	0,085 233

Ausgeschiedene Kupfermenge .	0,1007 g	
Zersetzungswärme	89,192	Cal.
Entwickelte Wärmemenge . .	322,20	Cal.
	411,39	Cal.
pro Zeiteinheit	0,11427	Cal.

$$\alpha = 0,2375$$

Tabelle IV.

Versuch IV. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $CuSO_4 + 100\,H_2O$.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,041 371	0,076 589	0,060 61	5,7775	0,350 17
5	0,040 915	0,075 110	0,059 941	5,6660	0,339 63
10	0,043 887	0,075 026	0,064 296	5,6592	0,363 86
15	0,046 375	0,074 968	0,067 941	5,6544	0,384 16
20	0,048 684	0,074 928	0,071 324	5,6511	0,403 06
25	0,051 362	0,074 865	0,075 247	5,6460	0,424 84
30	0,053 771	„ „	0,078 776	5,6456	0,444 74
35	0,055 354	0,074 747	0,081 095	5,6364	0,457 08
40	0,060 295	„ „	0,088 334	5,6357	0,497 82
45	0,063 755	0,074 649	0,093 403	5,6278	0,525 65
50	0,066 39	0,074 585	0,097 263	5,6226	0,546 87
55	0,071 547	0,074 468	0,104 82	5,6131	0,588 36
59	0,074 600	0,074 478	0,109 29	5,6133	0,613 48
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,041 399	0,075 257	0,019 036	1,4375	93,701
		G Gramm	W_h Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$ Amp.
		4,6983	3,0488	0,45431	0,080 547

Ausgeschiedene Kupfermenge . 0,095 139 g

Zersetzungswärme	84,27	Cal.
Entwickelte Wärmemenge . .	304,88	
	389,15	
pro Zeiteinheit	0,1081	

$\alpha = 0,2379.$

Versuche mit Zinksulfat.

Bei diesen Versuchen wurde, um das Wiederauflösen des Zinks in der durch die Electrolyse sauer gewordenen Flüssigkeit zu verhindern, die Zinkkathode amalgamirt, bei den zwei letzten Versuchen durch eine Quecksilberschicht, in die der Zuleitungsdraht tauchte, ersetzt. Es summirt sich bei diesem Verfahren allerdings die Amalgamationswärme des Zinks zu der entwickelten Wärmemenge; dieselbe ist jedoch nicht bedeutend genug, um auf die Resultate einen nennenswerthen Einfluss auszuüben.

Tabelle V.

Versuch I. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $ZnSO_4 + 200 H_2O$.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,029 779	0,079 696	0,028 30	5,7157	0,161 75
5	0,028 809	0,079 387	0,027 378	5,6936	0,155 87
10	0,029 813	0,079 324	0,029 813	5,6888	0,169 60
15	0,032 327	0,079 265	0,030 721	5,6846	0,174 64
20	0,033 214	" "	0,031 564	5,6844	0,179 42
25	0,033 865	" "	0,032 183	" "	0,182 94
30	0,037 999	0,079 167	0,033 261	5,6773	0,188 83
35	0,039 505	0,079 142	0,037 543	5,6750	0,213 06
40	0,040 819	0,079 084	0,038 791	5,6707	0,219 98
45	0,041 607	0,079 02	0,039 541	5,6660	0,224 04
50	0,046 514	" "	0,044 203	5,6656	0,250 44
55	0,049 555	0,078 775	0,047 094	5,6447	0,265 83
59	0,051 557	0,078 971	0,048 996	5,6616	0,277 4
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,063 48	0,078 897	0,020 003	1,4353	93,842
		G Gramme	W_h Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$
		1,6153	104,82	0,20337	0,035 846

Ausgeschiedene Zinkmenge . 0,04348 g

Zersetzungswärme	71,10	Cal.
Entwickelte Wärmemenge .	104,82	
	175,92	
pro Zeiteinheit	0,048 867	

$\alpha = 0,2403.$

Tabelle VI.

Versuch II. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $ZnSO_4 + 200\,H_2O$.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,028 504	0,079 476	0,027 128	5,6741	0,153 93
5	0,028 366	0,079 231	0,026 997	5,6566	0,152 71
10	0,030 056	0,079 216	0,028 605	5,6554	0,161 77
15	0,031 787	0,079 142	0,030 253	5,6500	0,170 93
20	0,034 280	„ „	0,032 626	5,6497	0,184 33
25	0,036 161	„ „	0,034 416	5,6496	0,194 43
30	0,038 152	„ „	0,036 311	5,6494	0,205 13
35	0,040 086	„ „	0,038 151	5,6492	0,215 53
40	0,042 297	„ „	0,040 255	5,6490	0,227 41
45	0,044 772	„ „	0,042 611	5,6487	0,240 7
50	0,047 688	0,079 079	0,045 386	5,6440	0,256 16
55	0,050 589	„ „	0,048 148	5,6437	0,271 73
59	0,052 944	„ „	0,050 389	5,6435	0,284 37
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,063 12	0,078 995	0,020 09	1,4350	93,867
		G Gramm	W_λ Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$ Amp.
		1,6344	106,06	0,20811	0,036 839

Ausgeschiedene Zinkmenge . 0,044 683 g

Zersetzungswärme	73,14	Cal.
Entwickelte Wärmemenge .	106,06	
	179,20	
pro Zeiteinheit	0,049 778	

$\alpha = 0,2392.$

Tabelle VII.

Versuch III. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $ZnSO_4 + 200\,H_2O$.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,037 460	0,081 279	0,035 512	5,6526	0,200 73
5	0,035 939	0,080 911	0,034 07	5,6272	0,191 72
10	0,036 699	0,080 872	0,034 79	5,6244	0,195 67
15	0,038 841	„ „	0,036 821	5,6242	0,207 09
20	0,041 374	„ „	0,039 222	5,6240	0,220 58
25	0,043 679	0,080 803	0,041 407	5,6190	0,232 66
30	0,046 168	„ „	0,043 767	5,6187	0,245 92
35	0,048 726	0,080 730	0,046 192	5,6134	0,259 3
40	0,051 487	„ „	0,048 81	5,6131	0,273 97
45	0,053 972	„ „	0,051 165	5,6129	0,287 18
50	0,057 201	0,080 671	0,054 226	5,6085	0,304 13
55	0,060 71	0,080 607	0,057 552	5,6036	0,322 51
59	0,063 69	„ „	0,060 377	5,6034	0,338 32

$tg\ \varphi_1$	$tg\ \psi_1$	$tg\ \vartheta$	C Volt	N Ohm
0,063 055	0,080 632	0,020 618	1,4348	93,87
	G Gramm	W_h Calor.	$\bar{A}$	$\bar{J}$ Amp.
	1,9639	127,44	0,250 59	0,044 621

Ausgeschiedene Zinkmenge . 0,054 122 g
Zersetzungswärme 88,5
Entwickelte Wärmemenge . . 127,44
215,94
pro Zeiteinheit . . . . . 0,059 984 } Cal.

$\alpha = 0,2394.$

Tabelle VIII.

Versuch IV. Versuchsdauer 1 Stunde.

Zusammensetzung der Lösung: $ZnSO_4 + 200 H_2O$.

t	$tg\ \varphi$	$tg\ \psi$	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,040 156	0,080 485	0,038 095	5,6462	0,215 09
5	0,040 293	0,080 181	0,038 224	5,6248	0,215 01
10	0,042 298	0,080 117	0,040 127	5,6201	0,225 52
15	0,044 508	" "	0,042 224	5,6199	0,237 3
20	0,045 306	" "	0,045 306	5,6196	0,254 6
25	0,050 589	0,080 083	0,047 992	5,6170	0,269 57
30	0,054 516	" "	0,051 717	5,6166	0,290 48
35	0,058 994	0,080 000	0,055 966	5,6104	0,313 99
40	0,061 405	" "	0,058 253	5,6102	0,326 81
45	0,066 665	0,079 936	0,063 243	5,6051	0,354 48
50	0,070 06	" "	0,066 464	5,6048	0,372 52
55	0,075 075	0,079 878	0,071 221	5,6003	0,398 86
59	0,079 01	" "	0,074 954	5,5999	0,419 73

$tg\ \varphi_1$	$tg\ \psi_1$	$tg\ \vartheta$	C Volt	N Ohm
0,063 16	0,080 122	0,020 439	1,4348	93,87
	G Gramm	W_h Calor.	$\bar{A}$	$\bar{J}$ Amp.
	2,3406	151,89	0,2981	0,053 119

Ausgeschiedene Zinkmenge . 0,064 282 g
Zersetzungswärme 105,35
Entwickelte Wärmemenge . 151,89
257,24
pro Zeiteinheit . . . . . 0,071 455 } Cal.

$\alpha = 0,2397.$

Versuche mit Wasser.

Bei den zwei ersten Versuchen wurde mit Schwefelsäure schwach angesäuertes destillirtes Wasser, bei den zwei letzten eine verdünnte Lösung von Natriumsulfat electrolysirt.

Tabelle IX.

Versuch I. Versuchsdauer 1 Stunde.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,045 477	0,081 146	0,043 171	5,6978	0,245 98
5	0,040 349	0,080 999	0,038 303	5,6880	0,217 87
10	0,039 187	0,080 975	0,037 20	5,6864	0,211 53
15	0,038 773	0,081 097	0,036 807	5,6951	0,209 62
20	0,038 566	0,081 034	0,036 61	5,6905	0,208 38
25	0,038 427	0,081 156	0,036 479	5,6992	0,207 9
30	0,038 911	0,081 22	0,036 938	5,7036	0,210 68
35	0,038 635	0,081 279	0,036 676	5,7078	0,209 34
40	0,038 524	0,081 342	0,036 571	5,7122	0,208 9
45	0,038 358	0,081 367	0,036 413	5,7140	0,208 07
50	0,038 980	0,081 279	0,037 004	5,7078	0,211 21
55	0,039 008	0,081 465	0,037 03	5,7209	0,211 85
59	0,039 128	„ „	0,037 144	5,7209	0,212 5
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,063 96	0,081 097	0,020 424	1,4352	93,856
		G Gramm	W_h Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$ Amp.
		2,0817	135,08	0,21162	0,037 105

Zersetzte Wassermenge .	0,012 458 g	
Zersetzungswärme . . .	47,42	Cal.
Entwickelte Wärmemenge	135,08	Cal.
	182,50	Cal.
pro Zeiteinheit	0,050 694	Cal.

$\alpha = 0,2396.$

Tabelle X.

Versuch II. Versuchsdauer 1 Stunde.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,032 687	0,084 271	0,041 263	5,5508	0,229 04
5	0,030 679	0,084 515	0,038 728	5,5670	0,215 6
10	0,030 056	„ „	0,037 942	5,5671	0,211 22
15	0,029 848	„ „	0,037 679	5,5671	0,209 76
20	0,029 751	„ „	0,037 557	„ „	0,209 08
25	0,029 640	„ „	0,037 417	5,5672	0,208 31
30	0,030 471	0,084 400	0,038 466	5,5595	0,213 85
35	0,030 609	„ „	0,038 640	5,5594	0,214 81
40	0,030 679	„ „	0,038 728	„ „	0,215 31
45	0,030 887	„ „	0,038 991	„ „	0,216 77
50	0,031 053	„ „	0,039 200	„ „	0,217 93
55	0,031 233	„ „	0,039 428	„ „	0,219 19
59	0,031 191	0,084 331	0,039 374	5,5549	0,218 73

tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
0,046 648	0,083 969	0,021 735	1,4327	93,993
	G Gramm	W_h Cal.	$\overline{A}$	$\overline{J}$
	2,0857	135,35	0,21445	0,038 554

Zersetzte Wassermenge . 0,012 945 g
Zersetzungswärme . . . 49,27
Entwickelte Wärmemenge 135,35
184,62
pro Zeiteinheit . . . 0,051 283 } Cal.

$\alpha = 0{,}2391.$

Tabelle XI.

Versuch III. Versuchsdauer 1 Stunde.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,021 538	0,084 727	0,027 233	5,5857	0,152 12
5	0,020 291	0,085 053	0,025 657	5,6073	0,143 86
10	0,020 014	" "	0,025 319	5,6074	0,141 97
15	0,019 876	0,084 995	0,025 132	5,6036	0,140 83
20	" "	" "	" "	" "	" "
25	0,019 723	0,084 933	0,024 939	5,5995	0,139 64
30	0,019 945	0,084 899	0,025 220	5,5972	0,141 16
35	0,020 042	0,084 870	0,025 342	5,5954	0,141 80
40	0,020 056	" "	0,025 360	" "	0,141 90
45	0,019 945	" "	0,025 220	" "	0,141 76
50	0,019 917	" "	0,025 184	" "	0,140 91
55	0,020 180	" "	0,025 517	5,5953	0,142 77
59	0,020 153	" "	0,025 482	" "	0,142 58
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,046 638	0,084 028	0,021 723	1,4328	93,984
		G Gramm	W_h Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$
		1,3859	89,94	0,14197	0,025 344

Zersetzte Wassermenge . 0,008 510 g
Zersetzungswärme . . . 32,39
Entwickelte Wärmemenge 89,94
122,33
pro Zeiteinheit . . . 0,033 981 } Cal.

$\alpha = 0{,}2393.$

Tabelle XII.
Versuch IV. Versuchsdauer 1 Stunde.

t	tg φ	tg ψ	J Amp.	$iR - J\varrho$ Volt	$J(iR - J\varrho)$
0	0,022 189	0,083 773	0,028 171	5,6185	0,158 27
5	0,021 053	0,083 479	0,026 728	5,5989	0,149 64
10	0,020 776	0,083 538	0,026 376	5,6029	0,147 78
15	0,020 568	" "	0,026 113	5,5990	0,146 21
20	0.020 360	" "	0,025 848	5,5990	0,144 72
25	" "	" "	" "	" "	" "
30	0,020 333	" "	0,025 814	" "	0,144 53
35	" "	0,083 420	" "	5,5951	0,144 43
40	0,020 319	" "	0,025 796	" "	0,144 33
45	0,020 222	" "	0,025 673	" "	0,143 65
50	0,020 291	" "	0,025 761	" "	0,144 13
55	0,020 083	" "	0,025 497	5,5952	0,142 66
59	0,020 22	0,083 356	0,025 673	5,5907	0,143 53
	tg φ_1	tg ψ_1	tg ϑ	C Volt	N Ohm
	0,046 514	0,082 656	0,021 366	1,4337	93,922
		G Gramm	W_h Calor.	$\overline{A}$	$\overline{J}$ Amp.
		1,4231	92,35	0,14550	0,025 992

Zersetzte Wassermenge . 0,008 727 2 g

Zersetzungswärme . . .	33,22	Cal.
Entwickelte Wärmemenge	92,35	
	125,57	
pro Zeiteinheit . . .	0,034 961	

$\alpha = 0,2397.$

Die Resultate der Versuche sind in der nachstehenden Tabelle vereinigt.

Tabelle XIII.

Zusammensetzung des Electrolyten	Strom-intensität	Stromarbeit $J(iR-J\varrho)$	Entwickelte Wärme-menge W_h	Zersetzungs-wärme Z	$\frac{W_h+Z}{t} = W_{sec}$	$\frac{W_{sec}}{J(iR-J\varrho)} =$
			Cal.	Cal.	Cal.	
$CuSO_4 + 200H_2O$	0,048 359	0,27108	181,49	50,59	0,064 467	0,2378
" " "	0,047 282	0,26439	178,23	49,47	0,063 25	0,2392
$CuSO_4 + 100H_2O$	0,085 233	0,48121	322,20	89,19	0,114 27	0,2375
" " "	0,080 547	0,45431	304,88	84,27	0,108 1	0,2379
$ZnSO_4 + 200H_2O$	0,035 846	0,20337	104,82	71,10	0,048 867	0,2403
" " "	0,036 839	0,20811	106,06	73,14	0,049 778	0,2392
" " "	0,044 621	0,25059	127,44	88,50	0,059 984	0,2394
" " "	0,053 119	0,2981	151,89	105,35	0,071 455	0,2397
H_2O, mittelst H_2SO_4 angesäuert	0,037 105	0,21162	135,08	47,42	0,050 694	0,2395
	0,038 554	0,21445	135,35	49,27	0,051 283	0,2391
Verdünnte Lösung von Na_2SO_4	0,025 344	0,14197	89,94	32,39	0,033 981	0,2393
	0,025 992	0,14550	92,35	33,22	0,034 961	0,2397

Wie aus der Constanz des Werthes α, sowie aus der sehr befriedigenden Uebereinstimmung desselben mit dem früher für Drähte erhaltenen:

$$0,2395$$

hervorgeht, bestätigen die Versuche vollkommen die obige Ueberlegung. Es folgt daraus, dass nahezu der ganze Theil der Stromarbeit, welcher keine Wärme liefert, zu chemischen Arbeitsleistungen verwendet wird, und dass somit das Wärmeäquivalent dieser Arbeitsleistung mit der Bildungswärme des entsprechenden Electrolyten fast genau zusammenfällt.

Man kann umgekehrt auch die mitgetheilten Versuchsresultate benutzen, um die betreffenden Bildungswärmen zu berechnen. Unter Zugrundelegung des Werthes:

$$0,2395$$

für α erhält man durch Multiplication dieses Werthes mit der gesammten Stromarbeit ($\bar{A}t$) die Wärmemenge, die man gefunden hätte, wenn die ganze Stromarbeit zur Wärmeentwickelung verwendet worden wäre. Durch Subtraction der wirklich gefundenen Wärmemenge von der so berechneten ergibt sich die Bildungswärme der betreffenden Verbindung bezogen auf die von dem Strom zersetzte Menge derselben. In der nachfolgenden Tabelle bezeichnet:

$\bar{A}$ die mittlere Stromarbeit,

$W_J = \bar{A}\alpha t$ die gesammte aus dem Joule'schen Gesetz berechnete Wärmemenge,

W_h die wirklich entwickelte Wärmemenge,

M die in Grammen ausgedrückte Menge des ausgeschiedenen Kation,

B die aus der Differenz $W_J - W_h$ berechnete Bildungswärme, bezogen auf das in Grammen ausgedrückte Moleculargewicht der betreffenden Verbindung.

Tabelle XIV.

$\bar{A}$	W_J Calorien	W_h Calorien	M Gramme	B Calorien	B nach Thomsen
		Kupfersulfat.			
0,27108	233,72	181,49	0,057 120	57771	
0,26439	227,96	178,23	0,055 857	56250	
0,48121	414,90	322,20	0,100 91	58040	
0,45431	391,71	304,88	0,095 139	57663	
			Mittel	57431	55960
		Zinksulfat.			
0,20837	175,35	104,82	0,043 40	10544	
0,20811	179,43	106,06	0,044 68	10654	
0,25059	216,06	127,44	0,054 122	10623	
0,2981	257,02	151,89	0,064 43	10586	
			Mittel	10602	10609
		Wasser.			
0,21162	182,46	135,08	0,001 387 5	68293	
0,21445	184,90	135,35	0,001 441 5	68745	
0,14197	122,40	89,94	0,000 947 62	68509	
0,14550	125,45	92,35	0,000 971 85	68117	
			Mittel	68416	68357

Die für Zinksulfat und Wasser erhaltenen Zahlen stimmen mit den Thomsen'schen in überraschender Weise überein, während die für Kupfersulfat erhaltenen eine grössere Abweichung (2,6 Proc.) zeigen. Die Erklärung dieser Abweichung muss späteren Versuchen vorbehalten bleiben. Immerhin ist dieselbe nicht gross genug, um die Richtigkeit der obigen Schlussfolgerung in Frage stellen zu können.

Graz, Chem. Univ.-Laboratorium, Mai 1885.

XVI. *Zwei Modelle zur Erläuterung der Lichtbrechung; von Oskar Emil Meyer.*

(Hierzu Taf. V Fig. 6—11.)

Brechung ebener Lichtwellen.

Eine ebene Lichtwelle AB Fig. 6, welche, in der Richtung BC fortschreitend, auf die Trennungsfläche AC zweier Medien auffällt, befindet sich nach der Brechung in der Lage DC und schreitet in der Richtung AD fort, wenn die Längen der gegen die Wellen senkrechten Linien BC und AD in dem durch den Brechungsindex n bestimmten Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten stehen. Aus dieser bekannten Huygens'schen Construction folgt ein einfacher Satz über die Lage des Punktes E, in welchem sich die beiden verlängerten Richtungen AB und DC schneiden. Dieser Punkt bildet die Spitze der beiden Dreiecke AED und CEB, aus deren Aehnlichkeit das Verhältniss:

$$\overline{EC}:\overline{EA}=\overline{BC}:\overline{AD}=n:1$$

folgt. Beziehen wir nun den mit der Grösse des Einfallswinkels veränderlichen Ort des Punktes E durch rechtwinkelige Coordinaten $x = AG$ und $y = GE$ auf den festen Anfangspunkt A, so ist $\overline{EA}^2 = x^2 + y^2$, und ebenso, wenn wir die als unveränderlich angenommene Entfernung $AC = a$ setzen:

$$\overline{EC}^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

Demnach liefert die obige Proportion die Beziehung:

$$(x+a)^2 + y^2 = n^2x^2 + n^2y^2,$$

zwischen den Coordinaten x und y des Punktes E oder:

$$\left(x - \frac{a}{n^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2,$$

d. h. der Ort des Punktes E ist ein Kreis, welcher mit dem Radius $na/(n^2-1)$ um einen in der Entfernung $a/(n^2-1)$ von A gelegenen Punkt F beschrieben ist.

Auf diesem Satze beruht die Einrichtung eines beweglichen Modelles, welches für die Erläuterung des Brechungsgesetzes der Lichtwellen von demselben Nutzen sein kann, wie das auf der Reusch'schen Construction beruhende

Modell von Weinhold[1]) für die Lichtstrahlen. Ein Messingstreifen FAC Fig. 7 bezeichnet die Grenze zweier Medien, und zwar denke man sich über demselben Luft, unter demselben Glas, sodass $n = 1,5$ gesetzt werden darf. Dieser Annahme entspricht die Wahl der Entfernungen $FA = 300$ mm, $AC = 375$ mm zwischen den Punkten F, A und C, um welche sich drei Stangen FE, BH und CJ drehen. Von diesen Stangen trägt die 450 mm lange Stange FE an ihrem Ende E zwei Schieber, durch welche die beiden anderen hindurchgesteckt sind. Dadurch werden diese gezwungen, sich bei einer Drehung des Punktes E um F so zu bewegen, wie es das Gesetz der Brechung der Wellen verlangt.

Die Richtung der zugehörigen Lichtstrahlen wird durch Pfeile angedeutet, von welchen drei auf der Schiene AB, drei auf CE angebracht sind. Diese Pfeile sind um ihre Mitte drehbar eingerichtet, damit das Modell auch zur Erläuterung des Ueberganges der Wellen aus einem stärker brechenden Mittel in ein weniger stark brechendes und besonders zur Erklärung der totalen Reflexion benutzt werden könne. Der Punkt, bei welchem die letztere beginnt, wird am Modell dadurch markirt, dass nicht allein AB senkrecht gegen AC, sondern auch EF senkrecht gegen EC steht. (Vgl. die punktirten Linien in Fig. 6). Weiter nach der rechten Seite darf E nicht verschoben werden.

2. Brechung in Linsen.

Die von einem leuchtenden Punkte A Fig. 8 auf eine Convexlinse fallenden Lichtstrahlen vereinigen sich jenseits der Linse in einem Punkte, dessen Lage durch die Formel:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

bestimmt wird, wenn a die Entfernung von A bis zur Mitte C der Linse, ebenso b die Entfernung CB und endlich F die Brennweite, also eine constante Grösse bedeutet. Nennen wir c die Entfernung eines beliebigen Punktes D (oder D') der Linse, durch welchen die beiden Richtungen eines Licht-

1) Weinhold, phys. Demonstrationen. Leipz. 1881. p. 298.

strahles vor und nach der Brechung AD und DC hindurchgehen, so können wir die Gleichung in der Form:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{c}{F}$$

darstellen, wo α den Winkel DAC und β den Winkel DBC bezeichnet. Nach dieser Formel lässt sich die Lage des von einem leuchtenden Punkte A entstehenden Bildes B mittelst eines beliebig gewählten, aber fest angenommenen Punktes D so construiren, dass die Summe der beiden Tangenten einen constanten Werth bildet. Noch einfacher lässt sich diese Bedingung aussprechen, wenn wir BD über D hinaus verlängern, DF parallel der Axe AB ziehen und durch einen festen Punkt F in unveränderlicher Entfernung von D eine zweite Linie EG senkrecht zur Axe legen. Dann ist, da $\sphericalangle FDG = \alpha$ und $\sphericalangle FDE = \beta$ ist, die Bedingung zu erfüllen, dass:

$$\overline{EG} = \overline{EF} + \overline{FG} = \overline{FD}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \frac{c}{F}\overline{FD}$$

constant zu erhalten ist. Wir haben also, um je zwei zusammengehörige Punkte A und B zu finden, die Linien AD und DB um den Punkt D so zu drehen, dass das auf der festen Linie FF' von den Strahlen AD und DB abgeschnittene Stück EG einen constanten Werth beibehält.

Für eine Concavlinse gilt, wie ein Blick auf Fig. 9 lehrt, die letzte Form des Satzes genau ebenso, die vorausgegangenen mit den erforderlichen Aenderungen der Vorzeichen.

Hierauf beruht der Gebrauch, welchen man von dem in Fig. 10 und 11 dargestellten Modell für die Theorie sowohl der Convex- als auch der Concavlinsen machen kann. Ein Stativ trägt in D und D' zwei, nach Bedarf verstellbare, Zapfen; um D drehen sich die Stäbe AD und DB, welche die beiden Richtungen eines gebrochenen Lichtstrahles vorstellen, ebenso AD' und $D'B$ um D'. An dem Stativ ist in C eine horizontale und an dieser in H eine verticale Stange befestigt, welche letztere, wie die erwähnten Stäbe in ihrer Mitte der Länge nach aufgeschlitzt ist. In den Schlitzen bewegen sich die an zwei Schiebern EG und $E'G'$ befestigten Stifte E und G, sowie E' und G'; ebenso bedeutet A

einen auf der horizontalen Stange verschiebbaren Stift, welcher durch die Schlitze der Stäbe greift. Eine Verschiebung dieses Stiftes bewirkt eine Veränderung des Ortes des Punktes B nach demselben Gesetze, wie das Bild B mit dem leuchtenden Punkte A seine Lage ändert.

Handelt es sich um convergirend oder parallel einfallende Lichtstrahlen, so wird der Stift A entfernt, ebenso wenn der Gang der Lichtstrahlen, welche ein ausserhalb der optischen Axe liegender Punkt aussendet, zur Anschauung gebracht werden soll.

Kürzlich ist zu denselben Zwecken von Haycraft[1]) ein ähnliches Modell angegeben worden, dasselbe gibt aber keine genau richtige Vorstellung von der Sache.

Die beiden beschriebenen Modelle sind vom Mechanicus J. Kleinert in Breslau, Kirchstrasse Nr. 16, ausgeführt worden.

XVII. *Ueber eine Abänderung der Jolly'schen Quecksilberluftpumpe; von F. Narr in München.*

(Hierzu Taf. V Fig. 12 u. 13.)

Die Quecksilberluftpumpe in der Form, die ihr Jolly gegeben hat, zeichnet sich vor allem durch den Umstand aus, dass sie durch eine stärkere Verwendung von Stahltheilen fast ebenso wenig dem Zerbrechen ausgesetzt ist, wie die gewöhnlichen Luftpumpen. Die Verbindung der Glastheile mit den Stahltheilen geschah bisher durch Siegellackkitt, der einige Uebelstände mit sich brachte. Schon infolge des Auf- und Absteigens des Quecksilbers stiessen sich leicht Partikelchen jenes Kittes ab, und an diese hingen sich, wenn sie auch nicht in die feinen Bohrungen gelangten und diese theilweise verstopften, zum mindesten Luftbläschen an, die nur schwer zu entfernen waren und das erreichbare Vacuum, also auch die Reinheit der Gase, die durch die

1) Haycraft, Nature. **30.** p. 543. Zeitschr. f. Instrumentenk. 5. p. 97. 1885. Beibl. **9.** p. 167.

Vermittelung der Pumpe in den evacuirten Raum eingeführt werden sollten, beschränkten. Dazu kam noch der Uebelstand, dass das so nothwendige zeitweise Reinigen der einzelnen Pumpentheile und des Quecksilbers sehr erschwert war; denn das hierzu erforderliche Ab- und Wiederzusammenkitten der Theile war eine selbst für geübte Hände mühsame und grosse Vorsicht erheischende Operation. In neuerer Zeit ist nun diese Pumpe einer Umconstruction unterzogen worden, die alle die genannten Missstände beseitigt und sich schon an mehreren Exemplaren bewährt hat. Da die Jolly'sche Pumpe schon mehrfach beschrieben worden ist[1]), so beschränke ich mich auf die Darlegung der Veränderungen, die sie erlitten hat, und die auch für andere physikalische Instrumente nicht ohne Interesse zu sein scheinen.

In der Fig. 12 ist die Verbindung des Glasgefässes *A*, in dem das Vacuum erzeugt wird, einerseits mit dem Hahnstücke *B* (*C* ist das Gewinde für den Pumpenteller), andererseits mit dem Steigrohre *D* des Quecksilbers dargestellt; da beide Verbindungen genau in der gleichen Weise durchgeführt sind, so begnüge ich mich mit der Beschreibung der ersteren.

Das Glasgefäss *A* endigt in einer Glaswulst *a*, die auf die Stahlplatte *b* des Hahnstückes aufgeschliffen ist; durch sehr schwache Fettung wird die Berührung so innig, wie bei den gewöhnlichen Adhäsionsplatten. Diese beiden Theile werden durch zwei, in zwei Hälften getheilte Stahlringe *c* und *d* mit den Seitenflantschen *e* und *f* zusammengehalten. Zu diesem Behufe sind zunächst die Schraubenpaare *g* und *h* angebracht, welche die beiden Hälften der Stahlringe an den Stahltheil *k* des Hahnstückes, beziehungsweise an den cylindrischen, mit einem Leder umgebenen Theil des Gefässes *A* unterhalb der Wulst *a* andrücken. Hierzu kommen noch die Stahlstifte *l*, welche durch die aneinander liegenden Theile der Seitenflantschen *e* und *f* gehen und oben in einem

---

1) Unter anderem im Repertorium für phys. Technik. 1. p. 144. 1866 und in Müller-Pfaundler, Lehrb. d. Physik. 8. Aufl. 1. p. 230.

durchbohrten Kopfe *m*, unten aber in einer Schraubenspindel endigen; durch die Schraube *n* werden die aufeinander geschliffenen Flächen der Glaswulst und der Endplatte des Hahnstückes aneinander gepresst.

Will man behufs der Reinigung das Glasgefäss *A* herausnehmen, so löst man sämmtliche Schrauben *n* leicht, indem man vermittelst eines Stiftes die Köpfe *m* festhält; entfernt man dann noch sämmtliche Schrauben *h*, so kann man das Gefäss ohne Mühe herausdrehen. Hat man es gereinigt, so setzt man es in der gleichen Weise wieder ein, schraubt die Schrauben *h*, nachdem man das oben erwähnte Leder wieder eingelegt hat, leicht an, dreht das Gefäss *A* sorgfältig ein und zieht endlich die Schrauben *n* fest an.

Genau in der gleichen Weise ist auch die Verbindung des Quecksilberschlauches der Pumpe mit dem Quecksilberbehälter derselben hergestellt.

Fig. 13 demonstrirt endlich die Verbindung des Steigrohres mit dem Schlauche, die durch die zwei aufeinander geschliffenen und gefetteten Stahlendplatten der beiden genannten Pumpentheile im Verein mit zwei Schrauben bewerkstelligt wird.

Schliesslich möchte ich nur noch bemerken, dass der Gefrierversuch, den Lommel unlängst beschrieben hat[1], in einer ausserordentlich überraschenden Weise mit der vorstehend betrachteten Pumpe gelingt.[2]

1) Lommel, Wied. Ann. 22. p. 614. 1884.

2) Die in der beschriebenen Weise abgeänderte Pumpe liefert, in gediegener Ausführung und sorgfältig geprüft, der bewährte Präparator des hiesigen physikalischen Instituts, Hr. K. Berberich.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1885. ANNALEN № 8.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXV.

I. *Ueber den zeitlichen Verlauf der electrischen Rückstandsbildung im Paraffin;* *von C. Dieterici.*

I. Die ersten messenden Versuche über den Verlauf der Rückstandsbildung in Leydener Flaschen hat R. Kohlrausch[1]) angestellt und zugleich aus denselben eine empirische Formel abgeleitet, welche mit hinreichender Genauigkeit die disponible Ladung einer geladenen Flasche zu gegebener Zeit zu berechnen gestattet. Die theoretische Begründung seiner Formel liess aber Kohlrausch unerörtert. Diese hat bald nach der Veröffentlichung jener Versuche Riemann[2]) zu geben gesucht, indem er als Ursache der Rückstandsbildung der ponderablen Materie der Dielectrica eine antelectrische Kraft zuschrieb. Er nahm an, dass die ponderablen Körper „nicht dem Electrischwerden oder dem Aufnehmen von Spannungselectricität, sondern dem Electrischsein oder dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebten.“ Die aus dieser Hypothese sich ergebenden Formeln sind indessen, wie Hr. W. Giese[3]) gezeigt hat, nicht im Einklang mit der Erfahrung.

Maxwell[4]) hat gezeigt, dass sich die Rückstandsbildung der Dielectrica erklären lasse aus der Annahme, dass diese aus verschiedenartigen Medien zusammengesetzt seien; er gelangt zur Bestimmung der disponiblen Ladung einer geladenen Flasche bei gegebener Zeit zu einem Ausdruck, der

1) R. Kohlrausch, Pogg. Ann. 91. p. 56. 1854.

2) Riemann, Gesammelte mathematische Werke, p. 48 u. 345 u. ff.

3) W. Giese, Wied. Ann. 9. p. 161. 1880.

4) Maxwell, Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus. 1. p. 468 u. ff.

aus einer Summe von Exponentialfunctionen gebildet ist, deren soviel verschiedene auftreten, als verschiedene Stoffe in dem Glase vorhanden sind. Dieser Ausdruck ist aber praktisch unbrauchbar, da man, um eine hinreichend genaue Annäherung an die Beobachtung zu erlangen, sehr vieler solcher Exponentialfunctionen bedarf.

Endlich hat Hr. Clausius[1]) eine Theorie der Dielectrica aufgestellt. Hr. Clausius verfährt in der mathematischen Behandlung der Dielectrica, ebenso wie Poisson und Green in der Theorie des Magnetismus. An diese Theorie soll hier angeknüpft werden. Ich habe mich bemüht, die aus derselben für den zeitlichen Verlauf der Rückstandsbildung sich ergebenden Folgerungen zu ziehen, und habe diese mit der Erfahrung verglichen. Es ergibt sich ein Ausdruck, der mit voller Genauigkeit den zeitlichen Verlauf der Rückstandsbildung zu berechnen gestattet. Bevor ich jedoch auf die Theorie eingehe, will ich die Beschreibung der Versuche mit ihren Resultaten voranstellen.

II. Zu den Versuchen benutzte ich ein Kirchhoff'sches Electrometer und einen Condensator, zwischen dessen horizontal übereinander liegenden Platten das rückstandbildende Dielectricum eingeführt wurde. Diese Apparate waren in folgender Weise miteinander verbunden. Das eine Quadrantenpaar des Electrometers war dauernd mit der Erde in gut leitender Verbindung; von dem anderen führte ein dünner, nicht übersponnener Kupferdraht zu einem Quecksilbernapf, in welchen die Drähte zweier Wippen eintauchten. Die Wippe 1 stellte die Verbindung dieses Napfes mit einem zweiten her, von welchem ein Draht zu der oberen Platte des Condensators führte, dessen untere zur Erde abgeleitet war; die Wippe 2 gestattete den mit dem Electrometer verbundenen Napf mit einem dritten, zur Erde abgeleiteten, zu verbinden. Die beiden Wippen wurden durch Fäden regiert, deren Enden an die Speichen eines horizontal drehbaren Rades befestigt waren. Um die Radperipherie und an derselben mit seinem einen Ende befestigt, war ein Faden ge-

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie. 2. Cap. III. p. 62.

schlungen, an dessen anderes Ende ein Gewicht gebunden war, welches durch sein Fallen das Rad in Bewegung setzte. Vor Beginn des Versuchs stand das Rad so, dass der die Wippe 1 regierende Faden angezogen, die Verbindung zwischen dem Electrometer und dem Condensator also aufgehoben war, während der zweite Faden lose herabhing, das Electrometer also mit der Erde verbunden war. Bei dieser Stellung der Wippen wurde die obere Condensatorplatte mit der ladenden Batterie in dauernder Verbindung gelassen. Zur Zeit $t = 0$ wurde diese Verbindung aufgehoben und zugleich das die Wippen regierende Rad ausgelöst. Letzteres, durch das fallende Gewicht in Bewegung gesetzt, liess den die Wippe 1 regierenden Faden nach, diese fiel und in diesem Momente der Bewegung des Rades waren beide Wippen geschlossen, d. h. Electrometer und Condensator waren mit der Erde in Verbindung.

Gleich danach wurde aber durch die weitere Bewegung des Rades der die zweite Wippe regierende Faden angespannt, diese aufgezogen, d. h. die Verbindung des Electrometers und Condensators mit der Erde aufgehoben, während die erstere Verbindung bestehen blieb. Hiernach schlug das Rad an einen Ausschlag an, und es wurde nun mit Fernrohr und Scala das Potential, zu welchem nach der Entladung der wieder aufgetretene Rückstand das Electrometer und die obere Condensatorplatte mit den verbindenden Drähten lud, von Minute zu Minute am ersteren abgelesen.

Die ganze Zeitdauer, während welcher das Rad in Bewegung war, betrug etwa $^1/_3$ Secunde, und von dieser Zeit wurde etwa der zehnte Theil für die Dauer der Entladung in Anspruch genommen.

Sämmtliche Drahtführungen, Wippen etc. waren durch umgebende, gut zur Erde abgeleitete Hüllen sorgfältig vor äusseren Influenzwirkungen geschützt.

Zur Ladung des Condensators benutzte ich eine Batterie von trockenen Daniell'schen Elementen, wie sie Hr. v. Beetz[1]) neuerdings vorgeschlagen hat. Eine etwa 10 cm

1) W. v. Beetz, Wied. Ann. 22 p. 402. 1884.

lange Glasröhre wird zur einen Hälfte mit Gyps gefüllt, welcher mit concentrirter Zinkvitriollösung, zur anderen Hälfte mit Gyps, welcher mit concentrirter Kupfervitriollösung angerührt ist. In die beiden Hälften wird resp. eine Zink- oder Kupferelectrode eingesenkt und dann der Gips erstarren gelassen. Die so hergestellten trockenen Daniell'schen Elemente haben sich bei meinen Versuchen als dauernd constant erwiesen, wie ein von Zeit zu Zeit vorgenommener Vergleich mit einem Normalelement zeigte. Allerdings wur- sie auch nie geschlossen gebraucht.

Als rückstandbildendes Dielectricum habe ich Paraffin benutzt. Es lässt sich dasselbe, wie Hr. Boltzmann[1]) angibt, leicht zwischen plane Glasplatten giessen und nach dem Erstarren ohne Schwierigkeit von denselben ablösen, wenn diese vorher leicht eingeölt waren. Ich benutzte zwei Platten von 1,722 und 2,358 mm Dicke. Dieselben lagen bei den Versuchen auf der unteren, stets mit der Erde verbundenen Condensatorplatte, und diese wurde so weit gesenkt, dass die obere Grenzfläche der Paraffinplatte und die obere isolirte Condensatorplatte sich nicht berührten.

Wie man aus der Beschreibung der Versuchsanordnung ersieht, habe ich den nach der Entladung wieder auftretenden Rückstand gemessen. R. Kohlrausch[2]) und Hr. Giese[3]) verfuhren umgekehrt. Ersterer gab der inneren isolirten Belegung einer Leydener Flasche eine gewisse Ladung und bestimmte die nach gegebener Zeit noch vorhandene disponible Ladung; letzterer verband die äussere Belegung einer Leydener Flasche mit einer ladenden Batterie, während die innere mit einem Electrometer und durch dieses zur Erde abgeleitet war. In einem gegebenen Zeitmoment wird das aus Electrometer und innerer Belegung gebildete System isolirt und nun die während einer Minute infolge der Rückstandsbildung veranlasste Aenderung des

1) Boltzmann, Wien. Ber. 68. p. 81. 1873.
2) R. Kohlrausch, l. c.
3) Giese, l. c.

Potentials gemessen. Dadurch wird diejenige Electricitätsmenge bestimmt, welche zur inneren Belegung in einer Minute zuströmen muss, um auf ihr das Potential Null zu erhalten. Im ersten Falle wird der Electricitätsverlust auf der isolirten Belegung gemessen, der sowohl von der Rückstandsbildung, wie auch von dem Electricitätsverlust an die Luft herrührt. Der letztere ist aber bei der hohen Ladung der inneren Belegung eine ins Gewicht fallende Fehlerquelle welche sich nur unsicher bestimmen lässt und auch sehr veränderlich ist. Im zweiten Falle wird die Beobachtung infolge der uncontrolirbaren Schwankungen des Potentials der ladenden Batterie unsicher.

Bei der von mir benutzten Versuchsanordnung fällt die letzte Fehlerquelle ganz fort, die erstere ist auf ein Minimum beschränkt, weil der wieder auftretende Rückstand den Condensator und das Electrometer nur bis zu einem Potential von höchstens 6 Daniell lud, und bei dieser Ladung der Electricitätsverlust an die Luft und durch etwaige mangelhafte Isolation verschwindend gering ist. Er betrug bei meinen Versuchen bei 5 Daniell Ladung nach 10 Minuten etwa 1,2 Proc. Allerdings führt die benutzte Versuchsanordnung eine andere Unsicherheit mit sich. Das Electrometer blieb nämlich nach der Entladung des Condensators während der ganzen Zeit, während welcher die Rückstandsbildung beobachtet wurde, mit diesem verbunden, ohne dass der Nullpunkt controlirt wurde. Zahlreiche Messungsreihen mussten auch wegen der Unsicherheit des Nullpunktes verworfen werden. Indessen gelang es, namentlich in den ruhigeren Abendstunden, in denen das Haus und damit das Electrometer nicht den sonst häufigen Erschütterungen ausgesetzt war, Messungsreihen zu erlangen, bei denen diese Unsicherheit nicht vorhanden war.

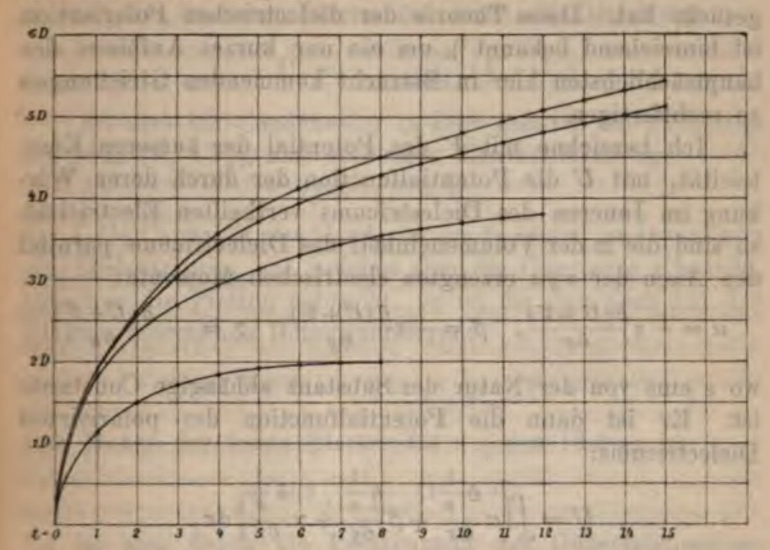
Ich theile im Folgenden vier Beobachtungsreihen mit, welche an derselben Paraffinplatte unmittelbar nacheinander ausgeführt sind. Bei diesen Reihen war die dünnere Paraffinplatte von 1,722 mm Dicke benutzt, der Abstand der beiden Condensatorplatten voneinander 2,646 mm; ihr Durchmesser 148,09 mm. Die Beobachtungsreihen sind angestellt,

nachdem die obere Condensatorplatte, resp. 2 Minuten, 10 Minuten, 1 Stunde und 24 Stunden mit dem einen Pol einer Batterie von 66 der beschriebenen Daniell'schen Elemente geladen war, deren anderer Pol mit der Erde verbunden war. Die erste Columne enthält die Zeit, gerechnet in Minuten vom Momente der Entladung an, die anderen enthalten das Potential, zu welchem der wieder aufgetretene Rückstand zu der gegebenen Zeit das aus Electrometer und oberer Condensatorplatte mit den verbindenden Drähten zusammengesetzte isolirte System lud, ausgedrückt in der Einheit eines Normaldaniells, welches ich stets zum Vergleich benutzte. Letzteres bestand aus zwei mit gesättigter Zink-, resp. Kupfervitriollösung gefüllten Reagensgläschen, in welche bez. amalgamirtes reines Zink und Kupfer eintauchte. Die Verbindung beider Gläschen geschah nur während des Vergleichs mit Hülfe eines U-förmig gebogenen kleinen Capillarrohres, welches mit Wasser gefüllt war. Die Capacität des Electrometers c ist bei jeder Versuchsreihe angegeben, ausgedrückt in der Einheit der Capacität k des Condensators von den angegebenen Dimensionen. Der Electricitätsverlust an die Luft ist berücksichtigt.

Tabelle I. Ladung 66 Daniell.

t	I. Ladungszeit 2 Minuten $c = 2{,}60\,k$ Rückstand	II. Ladungszeit 10 Minuten $c = 2{,}60\,k$ Rückstand	III. Ladungszeit 1 Stunde $c = 2{,}55\,k$ Rückstand	III. Ladungszeit 24 Stunden $c = 2{,}42\,k$ Rückstand
1	1,23 D.	1,83 D.	1,96 D.	1,96 D.
2	1,52 „	2,37 „	2,63 „	2,65 „
3	1,68 „	2,66 „	3,07 „	3,12 „
4	1,79 „	2,90 „	3,41 „	3,50 „
5	1,86 „	3,09 „	3,70 „	3,81 „
6	1,92 „	3,25 „	3,93 „	4,06 „
7	1,96 „	3,37 „	4,13 „	4,28 „
8	2,00 „	3,49 „	4,30 „	4,48 „
9	—	3,59 „	4,45 „	4,66 „
10	—	3,68 „	4,59 „	4,82 „
11	—	3,76 „	4,71 „	4,96 „
12	—	3,82 „	4,82 „	5,10 „
13	—	—	4,92 „	5,22 „
14	—	—	5,02 „	5,33 „
15	—	—	5,11 „	5,43 „

Die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen sind in der Figur in der Gestalt von Curven wiedergegeben; die Abscissenaxe gibt die Zeit, die Ordinatenaxe den in der betreffenden Zeit ausgebildeten Rückstand.



Ein Blick auf die Tabelle lehrt, dass, wenn man die Quotienten, aus den zu gleichen Zeiten in zwei Messungsreihen ausgebildeten Rückständen bildet, diese nicht constant sind, oder dass die Curven bei langer Ladungszeit nicht zur Deckung gebracht werden können mit den bei kurzer Ladungszeit erhaltenen durch blosses Verschieben; d. h. der qualitative Verlauf der Rückstandsbildung ist abhängig von der vorangegangenen Ladungszeit.

Beobachtet man jedoch die Rückstandsbildung bei verschiedener Höhe der Ladung, aber gleicher Ladungszeit, so ergibt sich, dass die so erhaltenen Curven einander proportional sind, d. h. der qualitative Verlauf der Rückstandsbildung ist unabhängig von der Grösse der vorhergegangenen Ladung.

Dies sind zwei Sätze, die lediglich aus der Erfahrung gefolgert sind, und über die uns die Theorie, zu der wir jetzt übergehen wollen, Aufschluss geben muss.

III. Wie schon eingangs erwähnt, soll von derjenigen Behandlungsweise der Theorie der Dielectrica ausgegangen werden, durch welche Poisson das Verhalten magnetischer Körper unter dem Einflusse magnetischer Kräfte abzuleiten gesucht hat. Diese Theorie der dielectrischen Polarisation ist hinreichend bekannt [1]), um ein nur kurzes Anführen der hauptsächlichsten hier in Betracht kommenden Gleichungen zu rechtfertigen.

Ich bezeichne mit V das Potential der äusseren Electricität, mit U die Potentialfunction der durch deren Wirkung im Inneren des Dielectricums vertheilten Electricität, so sind die in der Volumeneinheit des Dielectricums parallel den Axen der xyz erzeugten electrischen Momente:

$$\alpha = -\varepsilon\frac{\partial(U+V)}{\partial x}, \quad \beta = -\varepsilon\frac{\partial(U+V)}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial(U+V)}{\partial z},$$

wo ε eine von der Natur der Substanz abhängige Constante ist. Es ist dann die Potentialfunction des polarisirten Dielectricums:

$$U' = \int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau,$$

wo die Integration auszuführen ist über den ganzen vom Dielectricum eingenommenen Raum. Wendet man auf dieses Integral den Green'schen Satz an, so erhält man das Potential U' des polarisirten Dielectricums in Bezug auf einen äusseren Punkt:

$$U' = \varepsilon\int(U+V)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dw,$$

wo die Integration auszuführen ist über die Oberfläche des Dielectricums. Führt man dieses Integral aus für eine Franklin'sche Tafel mit kreisförmigen Belegungen, so erhält [2]) man, wenn man die Dicke der dielectrischen Schicht als unend-

1) Vgl. Clausius, Mech. Wärmetheorie. 2. Abschn. III.; v. Helmholtz, Borchardt's Journ. 72. p. 57. 1870 und gesammelte Abhandlungen; Kirchhoff, Crelle's Journ. 48. p. 348. 1853 und gesammelte Abhandlungen.

2) Vgl. Clausius, l. c.

lich klein im Vergleich zum Durchmesser der Platte ansieht, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder, die durch die Polarisirung des Dielectricums hervorgebrachte Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ ausgedrückt durch die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ der äusseren Electricität durch die Gleichung:

$$(1) \qquad U_1 - U_2 = -\frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}(V_1 - V_2).$$

Ist also ein Condensator in Luft geladen zur Potentialdifferenz $(V_1 - V_2)$, also mit einer Electricitätsmenge:

$$Q = k(V_1 - V_2),$$

wo k die Capacität des Condensators bedeutet, und wird nun ein Dielectricum, auf welches sich die Constante ε bezieht, zwischen die Platten gebracht, so ist die nun noch auf den Platten bestehende Potentialdifferenz:

$$V_1 - V_2 + U_1 - U_2 = \frac{1}{1+4\pi\varepsilon}(V_1 - V_2).$$

Die Menge der freien Electricität auf den Platten ist:

$$Q' = k\frac{1}{1+4\pi\varepsilon}(V_1 - V_2).$$

Es ist also durch die Polarisirung des Dielectricums gebunden die Electricitätsmenge:

$$Q'' = Q - Q' = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}Q.$$

Wird der Condensator entladen, während die Polarisirung des Dielectricums noch bestehen bleibt, so wird die Electricitätsmenge Q' fortgenommen, während die Menge Q'' noch auf den Platten gebunden bleibt.

Ich nehme an, dass bei den rückstandbildenden Dielectricis ein Theil jener Polarisirung nach der Entladung noch bestehen bleibt, und bezeichne das Potential des polarisirten Dielectricums mit φ. Die Dichtigkeit ϱ der freien Electricität im Inneren des Dielectricums ist dann in bekannter Bezeichnung:

$$(1) \qquad \varrho = -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi.$$

Diese Dichtigkeit der geschiedenen Electricität im Inneren des Dielectricums nimmt mit der Zeit ab, weil die

äussere Ladung, welche die Polarisation hervorgebracht und aufrecht erhalten hat, nicht mehr vorhanden ist, und es ist diese Abnahme an einem jeden Punkte im Inneren proportional der Strömung. Legen wir die x-Axe des Coordinatensystems senkrecht zu den Platten des Condensators, so findet letztere nur in der Richtung der x-Axe statt, und es ist nach der phoronomischen Gleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

wo u die Strömung in Richtung der x-Axe bezeichnet.

Die Strömung u ist nun weiter proportional der an jedem Orte herrschenden electromotorischen Kraft, also proportional mit $-\partial \varphi / \partial x$. Durch die Abnahme der Polarisation der Substanz wird aber auf den Platten des Condensators ein Theil der dort gebundenen Electricitätsmenge wieder frei. Bezeichnen wir mit E_0 die zur Zeit $t = 0$ dort gebunden gewesene Electricitätsmenge, mit E die zur Zeit t noch gebundene Menge, so ist $E_0 - E$ die zur Zeit t frei gewordene Electricitätsmenge. Diese frei gewordene Electricitätsmenge strebt aber in jedem Volumenelemente ein gewisses Moment aufrecht zu erhalten, es ist demnach die Strömungscomponente u proportional $-\partial(\varphi - \varphi')/\partial x$, wo φ' das Potential der Electricitätsmenge $E_0 - E$ bedeutet. Da nun E, d. i. die zur Zeit t noch gebundene Electricitätsmenge, der noch vorhandenen Polarisation oder der Dichtig- ϱ proportional ist, so ist die Strömungscomponente u proportional mit $-\partial \varphi / \partial x$ und mit $-\partial \varrho / \partial x$. Demnach wird:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \text{ oder:}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} - \nu \varrho. \tag{3}$$

Dieses ist dieselbe Differentialgleichung, zu welcher auch Riemann gelangt, sie ist hier nur aus der Anschauung der dielectrischen Polarisation interpretirt.

Man wird bemerken, dass die abgeleitete Differentialgleichung dieselbe ist, auf welche man in der Theorie der Wärmeleitung unter Berücksichtigung der Strahlung geführt wird. Es ist dies eine bekannte Analogie; die Strahlung

wird in unserem Probleme ersetzt durch den Umstand, dass von der auf den Condensatorplatten frei werdende Electricitätsmenge ein Theil der Polarisation im Inneren des Dielectricums aufrecht erhalten wird.

Unsere Differentialgleichung gilt sowohl für das Vergehen, wie auch für das Entstehen der Polarität. Hat nun das Dielectricum vor der Entladung lange Zeit hindurch unter dem Einflusse der äusseren Ladung gestanden, so wird man annehmen können, dass die Polarisirung vollendet sei, also $\partial \varrho / \partial t = 0$. Dann folgt:

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} = \nu \varrho,$$

woraus sich ergibt, dass die Dichtigkeit der freien Electricität im Inneren des Dielectricums längs der x-Axe wie eine Exponentialfunction sich ändert. Es gilt dasselbe also auch für φ; demnach haben wir unsere Differentialgleichung, die wir in der Form:

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \mu^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

schreiben wollen, zu lösen unter der Nebenbedingung:

$$(5) \quad t = 0 \qquad \varphi = \varphi_0 e^{-px},$$

wo φ_0 das Potential zur Zeit $t = 0$ bedeutet, am Orte $x = 0$, als welchen wir die obere Fläche des Dielectricums annehmen wollen.

Ferner haben wir noch die Nebenbedingung:

$$(6) \quad x = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

zu erfüllen, welche aussagt, dass durch die Oberfläche des Dielectricums, welche bei der benutzten Versuchsanordnung durch eine Luftschicht von der oberen Condensatorplatte getrennt war, Electricität weder ein- noch austritt.

Um die vorliegende Gleichung zu lösen, setzt man [1]):

$$(7) \qquad \varphi = e^{-\nu t} u \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die allgemeine Lösung der letzteren Differentialgleichung ist:

1) Fourier, Theorie der Wärme, deutsch v. B. Weinstein 1884. § 363 u. ff.

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq \, . \, F(x + 2q\mu\sqrt{t}), \tag{8}$$

worin q eine willkürliche Variable und $F(x + 2q\mu\sqrt{t})$ eine Function bedeutet, die von ihrem Argument ebenso abhängt, wie die Function, welche den Anfangszustand darstellt, von x abhängig ist.

Die allgemeine Lösung (8) haben wir nun so umzuformen, dass den Nebenbedingungen (5) und (6) genügt wird. Um dies zu thun, wollen wir uns das Dielectricum als unendlich ausgedehnt denken, dasselbe sei durchsetzt von einer Ebene am Orte $x = 0$, welche lange Zeit hindurch vor der Entladung zu einem gewissen Potential geladen war; wird nun diese Ebene plötzlich entladen, so ist nach Gleichung (5) der Anfangszustand gegeben durch:

$$t = 0 \qquad x = 0 \ldots\ldots + \infty \quad F(x) = \varphi_0 \, e^{-px},$$
$$x = 0 \ldots\ldots - \infty \quad F(x) = \varphi_0 \, e^{+px}.$$

Demnach wird:

$$F(x + 2q\mu\sqrt{t}) = \varphi_0 \, e^{-p(x+2\mu q\sqrt{t})} \quad q = -\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} \ldots\ldots \infty,$$

$$F(x + 2q\mu\sqrt{t}) = \varphi_0 \, e^{+p(x+2\mu q\sqrt{t})} \quad q = -\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} \ldots\ldots \infty.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung (8) für u ein, so wird:

$$u = \varphi_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{px} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-q^2 - 2p\mu q\sqrt{t}} \, dq + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-px} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-q^2 + 2\mu p q\sqrt{t}} \, dq \right\},$$

oder indem man jedes Integral mit $e^{-\mu^2 p^2 t}$ multiplicirt und dividirt:

$$u = \varphi_0 \left\{ e^{px + \mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-q^2 + 2\mu p q\sqrt{t} - \mu^2 p^2 t} \, dq \right.$$

$$\left. + \, e^{-px + \mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-q^2 - 2\mu p q\sqrt{t} - \mu^2 p_1 t} \, dq \right\},$$

oder, indem man
$$r = q - \mu p \sqrt{t}$$
$$s = q + \mu p \sqrt{t}$$
setzt:
$$u = \varphi_0 \left\{ e^{px + \mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} - \mu p \sqrt{t}} e^{-r^2} dr + e^{-px + \mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} + \mu p \sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right\}.$$

Wenn man in diesem Ausdruck $+x$ in $-x$ überführt, so ändert er sich nicht, d. h. der Ausdruck gilt auch für einen Körper, der sich nach einer Seite hin in die Unendlichkeit erstreckt und an der Grenzfläche $x = 0$ begrenzt ist durch eine Ebene, durch welche Electricität weder ein- noch austritt. Wir haben demnach durch diesen Ausdruck unsere Aufgabe mit den Nebenbedingungen (5) und (6) erfüllt, wenn wir die Dicke der Paraffinplatte als unendlich gross ansehen.

Bilden wir nun den obigen Ausdruck u für den Punkt $x = 0$, so erhalten wir:
$$u = \varphi_0 e^{\mu^2 p^2 t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\mu p \sqrt{t}} e^{-r^2} dr + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu p \sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right\}.$$

Nun ist:
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-r^2} dr = \tfrac{1}{2}.$$
und sehen wir ferner:
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(R)} e^{-r^2} dr = \psi(R)$$
als Function der oberen Grenze R an, so folgt:
$$u = \varphi_0 e^{\mu^2 p^2 t} \left(1 - 2\psi(\mu p \sqrt{t})\right).$$
Folglich wird:
$$\varphi = \varphi_0 e^{(\mu^2 p^2 - \nu) t} \left(1 - 2\psi(\mu p \sqrt{t})\right).$$
Setzen wir noch zur Abkürzung:
$$\mu^2 p^2 - \nu = \beta, \qquad \mu p = \alpha,$$
so folgt:

$$\varphi = \varphi_0 e^{\beta t}\left(1 - 2\psi(\alpha\sqrt{t})\right). \tag{9}$$

Wir haben also das Potential des in polarem Zustande befindlichen Dielectricums in Bezug auf einen Punkt der oberen Grenzfläche dargestellt als Function der Zeit. Dieselbe Abhängigkeit von der Zeit hat also auch das Potential des Dielectricums in Bezug auf die obere Condensatorplatte, und demnach ist auf dieser die frei gewordene Electricitätsmenge $E_0 - E$ oder der Rückstand gegeben durch:

$$R = k(\varphi_0 - \varphi) = k\varphi_0 - k\varphi_0 e^{\beta t}\left(1 - 2\psi(\alpha\sqrt{t})\right),$$

wobei k die Capacität der oberen Condensatorplatte bedeutet. Folglich muss sich auch das Potential, zu welchem der wieder aufgetretene Rückstand das Electrometer und die obere Condensatorplatte ladet, darstellen lassen in der Form:

$$P_t = P_0 - P_0 e^{\beta t}\left(1 - 2\psi(\alpha\sqrt{t})\right). \tag{1}$$

IV. Ich wende mich nun zum Vergleich dieses Ausdruckes mit der Erfahrung.

Zur Berechnung der in der Tabelle mitgetheilten Beobachtungsreihen konnten die von Kramp berechneten Tafeln für die Function ψ benutzt werden. Man hat dann zunächst aus den zu drei verschiedenen Zeiten beobachteten Rückständen — ich benutzte hierzu stets die zu den Zeiten $t = 1, 4, 9$ beobachteten Potentiale — die drei Constanten P_0, β und α zu bestimmen und mit diesen die übrigen Beobachtungen zu berechnen. Unsere Formel (10) gilt zunächst nur für diejenigen Messungsreihen, bei denen man die Polarisirung des Dielectricums als vollkommen oder doch nahezu vollkommen betrachten kann, also für die nach langer Ladungszeit erhaltenen Beobachtungen. Ich habe sie jedoch auch auf die nach kurzer Ladungszeit beobachtete Rückstandsbildung angewendet. Auf die angegebene Weise berechnet, ergeben sich die Constanten der vier mitgetheilten Beobachtungsreihen wie folgt:

Tabelle II.

Beobachtungsreihe	P_0	α	β	$\nu = \alpha^2 - \beta$
von 2 Minuten Ladungszeit	2,10	0,765	0,3966	0,1886
„ 10 „ „	4,40	0,486	0,1718	0,0644
„ 1 Stunde „	6,00	0,334	0,05572	0,0599
„ 24 Stunden „	6,50	0,296	0,03362	0,0540

Um eine Anschauung zu geben, mit welcher Genauigkeit der gefundene Ausdruck die Beobachtung zu berechnen gestattet, sind in der folgenden Tabelle III die Beobachtung und Berechnung zweier Messungsreihen, die eine von kurzer, die andere von langer Ladungsdauer, miteinander verglichen. Ich wähle hierzu die erste und dritte Beobachtungsreihe:

Tabelle III.

t	Messungsreihe I.			Messungsreihe III.		
	Beobachtet	Berechnet	Differenz	Beobachtet	Berechnet	Differenz
1	1,23 D.	1,23 D.	0,00	1,96 D.	1,96 D.	0,00
2	1,52 „	1,51 „	−0,01	2,63 „	2,62 „	−0,01
3	1,68 „	1,68 „	0,00	3,07 „	3,07 „	0,00
4	1,79 „	1,79 „	0,00	3,41 „	3,41 „	0,00
5	1,86 „	1,86 „	0,00	3,70 „	3,69 „	−0,01
6	1,92 „	1,92 „	0,00	3,93 „	3,92 „	−0,01
7	1,96 „	1,95 „	−0,01	4,13 „	4,13 „	0,00
8	2,00 „	2,00 „	0,00	4,30 „	4,28 „	−0,02
9	—	—	—	4,45 „	4,45 „	0,00
10	—	—	—	4,59 „	4,58 „	−0,01
11	—	—	—	4,71 „	4,71 „	0,00
12	—	—	—	4,82 „	4,81 „	−0,01
13	—	—	—	4,92 „	4,91 „	−0,01
14	—	—	—	5,02 „	5,00 „	−0,02
15	—	—	—	5,11 „	5,09 „	−0,02

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung eine vollkommene. Unsere Formel eignet sich also zur Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Rückstandsbildung, sie ergibt ferner, dass der bei gleicher Ladungsdauer, aber verschiedener Grösse der vorangegangenen Ladung ausgebildete Rückstand dieser Ladung proportional ist, da P_0 derselben proportional ist.

Um den anderen aus der Erfahrung abgeleiteten Satz über den Zusammenhang des qualitativen Verlaufes der

Rückstandsbildung mit der vorangegangenen Ladungszeit als in Uebereinstimmung mit unserer Formel zu erkennen, betrachten wir die Werthe, welche die Constante α bei den verschiedenen Messungsreihen hat. Es war nun:

$$\alpha = \mu p.$$

μ ist nach unseren theoretischen Anschauungen eine Constante der Substanz. Setzen wir also voraus, dass μ bei den verschiedenen Messungsreihen constant sei, so wird p sich ebenso ändern, wie α, also von den Beobachtungen nach kurzer Ladungsdauer zu denen bei langer, vorangegangener Ladung hin abnehmen, und daraus folgt, dass die Curve:

$$\varrho = e^{-px},$$

welche die Dichtigkeit der freien Electricität im Inneren des Dielectricums darstellt, bei kurzer vorangegangener Ladungszeit von der Grenzfläche an schnell abfällt, während bei langer Ladungszeit sie immer flacher wird. Der zweite, erfahrungsmässig gefolgerte Satz findet also aus den verschiedenen Anfangszuständen seine theoretische Erklärung.

Hr. Hopkinson[1]) hat zur Berechnung seiner Beobachtungen über die Rückstandsbildung denselben Weg eingeschlagen, den Hr. Boltzmann zur theoretischen Erklärung der elastischen Nachwirkung angegeben hat. Boltzmann[2]) nimmt an, dass das Kräftepaar, welches einen tordirten Draht in seine Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt, nicht nur abhängt von der Grösse des Ablenkungswinkels, sondern auch von der Dauer der Ablenkung, welche der beobachteten elastischen Nachwirkung vorhergeht. In ähnlicher Weise verfährt Hopkinson, indem er den electrischen Rückstand auffasst als bedingt durch die Superposition zweier Functionen, deren eine abhängt von der Zeit, die seit der der Entladung verflossen ist, während die andere von der vorangegangenen Ladungsdauer abhängt. Das von Hrn. Hopkinson und auch von Hrn. Giese[3]) angewendete Princip der Superposion ist bei der in dieser Arbeit ver-

1) Hopkinson, Phil. Trans. Roy. Soc. of London. **167.** p. 599. 1877.
2) Boltzmann, Wien. Ber. **80.** p. 275. 1875.
3) Giese, l. c.

folgten Anschauung implicite enthalten in der Aenderung der mit p bezeichneten Grösse.

Bei unserer Erklärung des zweiten empirischen Satzes liegt es nahe, die Beobachtungen bei kurzer Ladungszeit zu berechnen unter der Annahme, dass die Dichtigkeit der freien Electricität nur auf der Oberfläche des Dielectricums einen von Null verschiedenen Werth habe. In der That gelingt dies auch; die Formel, zu der man unter dieser Annahme auf dem eingeschlagenen Wege gelangt, ist:

$$P = P_0 - 2 P_0 e^{-\nu t} \left[\psi \left(\frac{c}{2\sqrt{t}} \right) - \frac{\sqrt{t}}{c\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{c^2}{4t}} \right) \right],$$

worin c wiederum eine Constante bedeutet. Diese Formel gestattet ebenfalls, die Rückstandsbeobachtungen zu berechnen bei kurzer vorangegangener Ladung. Die Abweichungen gehen aber über die Beobachtungsfehler hinaus, sobald man sie auf die nach langer Ladungszeit erhaltenen Curven anzuwenden versucht.

Es erübrigt noch ein Wort über die Constanten μ und ν. Wenn unsere theoretischen Voraussetzungen sämmtlich richtig wären, so müssten diese für sämmtliche Beobachtungen als constant sich ergeben, und es müsste gelingen, aus denselben, den Dimensionen des Condensators und den in Betracht kommenden Capacitäten etc. einen Werth für die Dielectricitätsconstante und der Leitungsfähigkeit der Substanz in absolutem Maasssystem abzuleiten.

Wie man aus Tabelle II ersieht, ist ν nicht für alle Beobachtungsreihen constant. Der Grund dieser Inconstanz liegt in der vereinfachenden Annahme, die wir gemacht haben, dass wir das Dielectricum als unendlich ausgedehnt betrachtet haben. Führt man die Dicke der dielectrischen Schicht in die Betrachtungen ein, so wird man, ebenso wie beim Durchgang der Wärme durch eine planparallele Platte, auf Thetafunctionen geführt. Es ist mir indessen nicht gelungen, die sich so ergebenden Reihen — es sind dies dieselben, zu denen auch Riemann gelangt — in Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen.

Phys. Inst. der Univ. Berlin.

II. *Ueber die Quantität electrischer Elementartheilchen; von E. Budde.*

Es existirt ein Versuch von Herwig[1]), Grössenverhältnisse electrischer Elementartheilchen zu schätzen; derselbe leidet aber an einigen recht willkürlichen Annahmen und ausserdem an einer Verwechslung der Begriffe „Masse“ und „Quantität“ der Theilchen. Ich glaube, dass man durch folgende einfache Betrachtung zu einem ziemlich sicheren Ergebniss für die Quantität electrischer „Atome“ gelangen kann.

In der Welt der ponderablen Massen finden wir, dass ein bestimmter Körper, z. B. Kohlenstoff, immer mit einem bestimmten relativen Gewicht, zwölf, in Verbindungen eingeht. Daraus und aus Beobachtungen ähnlichen Charakters an allen anderen Massen schliessen wir: 1) der Kohlenstoff besteht aus Atomen, 2) jedes seiner Atome hat das relative Gewicht zwölf. Wären wir in der Lage, mit einzelnen Atomen zu experimentiren, so würde die Erfahrung sich nicht blos auf das relative Gewicht der Kohlenstoffatome beziehen, sondern wir würden sehen, dass Kohlenstoff in alle Verbindungen mit Multiplen eines bestimmten absoluten Gewichts eingeht; dann würden die beiden obigen Schlüsse sich noch bestimmter gestalten, und das Experiment würde uns direct den absoluten Werth des Atomgewichts von Kohlenstoff ergeben.

Wir legen uns nun die Frage vor: 1) existiren in der Natur discrete Elementartheilchen der Electricität? 2) wie gross sind sie? Nach Analogie der eben für den Kohlenstoff gezogenen Schlüsse lässt sich auf diese Frage folgendes antworten: Gibt es in der Natur discrete Elementartheilchen der Electricität, so ist zu erwarten, dass eine absolut bestimmte, sehr kleine Electricitätsmenge in einer grossen Classe von Processen massgebend auftritt. Zeigt uns die Erfahrung eine solche, so ist jene Electricitätsmenge als die wahrscheinliche Quantität der Electricitätstheilchen anzu-

1) Herwig, Pogg. Ann. **150.** p. 381. 1873.

sprechen. Das Gebiet, auf dem wir nach den betreffenden Erfahrungen zu suchen haben, ist das derjenigen Processe, in welchen die Electricität mit ponderablen Atomen in Wechselwirkung steht und das Verhalten dieser ponderablen Atome bestimmt, d. i. das Gebiet der electrolytischen Zersetzungen und Verbindungen.

Da finden wir nun das Faraday'sche Gesetz, welches, auf einzelne Atome bezogen, folgendermassen auszusprechen ist:

Es sei KA ein Electrolyt, der durch den galvanischen Strom in die Theile K und A gespalten wird, von denen jeder die Valenz n besitzt; es sei q die Menge von positiver Electricität, welche mit jedem einzelnen Atome oder Radical K an die Kathode geht; dann ist q/n für alle Körper und für alle Ströme dieselbe, absolut bestimmte Grösse.

Auf Grund des Obigen können wir also sagen: Mit derselben Wahrscheinlichkeit, womit zwölf das relative Atomgewicht des Kohlenstoffs ist, ist q/n die absolute Quantität eines electrischen Elementartheilchens.

q/n ist leicht zu berechnen. Es sei h die magnetische Intensität desjenigen Stromes, der in der Zeiteinheit ein Milligramm Wasserstoff abscheidet, ch seine Intensität im mechanischen Maass, N die Zahl der Wasserstoffmolecüle im Milligramm; dann enthält das Milligramm $2N$ Atome, und diese bringen das Quantum $ch/2$ von positiver Electricität an die Kathode, wobei $n = 1$. Also ist die Quantität, welche einem Atom anhaftet:

$$E = \frac{ch}{4N}.$$

Darin ist angenähert[1]) in mm, mg, sec $c = 3 . 10^{11}$, $h = 957$, ferner nach der Gastheorie $N = 14 . 10^{19}$. Das gibt:

$$E = 0{,}000\,000\,51 \text{ mg}^{1/2}\,\text{mm}^{3/2}\,\text{sec}^{-1}.$$

Dieser Werth ist also die wahrscheinliche „Atomquantität der Electricität". Er kann ein Multiplum derselben sein, aber mit derselben Wahrscheinlichkeit, womit wir $C = 12$

1) Vgl. G. Wiedemann, Galvanismus 3. p. 450 und O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, Breslau 1877. p. 234.

und nicht gleich 6 oder 3 setzen, ist E als die Quantität der electrischen Elementartheilchen selbst anzusprechen. Denn wenn sich die Electricität in kleinere Theile als E zerlegen liesse, so ist nicht einzusehen, warum niemals ein derartiger kleinerer Theil in der Erfahrung zum Vorschein kommen sollte.

III. *Zur Theorie der thermoelectrischen Kräfte II; von E. Budde.*

Zum Folgenden bitte ich meinen ersten, unter vorstehendem Titel erschienenen Aufsatz[1]). sowie die Abhandlung von Hrn. F. Kohlrausch „über die Mitführungstheorie der Thermoelectricität“[2]) zu vergleichen.

In meiner ersten Abhandlung ist (Gl. 26) der Nachweis geführt, dass die Mitführungstheorie der Annahme bedarf, es sei für jeden Leiter:

$$\mathfrak{D} = -cT,$$

wo $\mathfrak{D}$ die in der Mitführungstheorie auftretende Temperaturfunction des Leiters, $-c$ eine absolute Constante, T die absolute Temperatur ist. Ich habe dort diese Gleichung in die Ausdrucksweise der Clausius'schen Contacttheorie übersetzt; da lautet sie, wenn α die Temperaturfunction für diese Theorie bezeichnet:

$$d\alpha = c\,dT \tag{2}$$

und gibt das Integral:

$$\alpha = cT + c_0, \tag{3}$$

wo c_0 die Integrationsconstante ist. Aus Gl. (3) habe ich den Schluss gezogen, die Mitführungstheorie sei an die Be-

---

1) Budde, Wied. Ann. **21.** p. 277. 1884. Es findet sich p. 297 ein störender Druck- oder Schreibfehler: Z. 14 v. u. lies $f k\,d V$ statt $k\,dV$, ebenso in der darauffolgenden Gleichung. p. 298 Z. 18 v. o. lies „ponderablen“ statt „parallelen“.

2) Kohlrausch, Wied. Ann. **23.** p. 477. 1884.

dingung gebunden, dass alle Thermoelemente aus zwei Leitern dem Gesetz von Avenarius gehorchen.

Dieser Schluss ist zwar nicht unrichtig, aber er geht nicht weit genug. Die Integrationsconstante c_0 hat nämlich offenbar für jeden Leiter einen bestimmten Werth, und bei näherer Betrachtung findet man, dass Gl. (1) verlangt, es sei stets $c_0 = 0$. Daraus ergibt sich, dass die Mitführungstheorie an eine Bedingung geknüpft ist, die zwar mit dem Avenarius'schen Gesetz verträglich, aber weit eingeschränkter ist, als dieses. Man findet dieselbe am einfachsten, wenn man Gl. (1) direct in die Kohlrausch'sche Gleichung für das Thermoelement einführt. Werden zwei Metalle A und B zum Thermoelement verbunden, sind $\mathfrak{D}_\alpha$ und $\mathfrak{D}_\beta$ ihre Temperaturfunctionen, T_1 und T_2 die Temperaturen der Löthstellen, so ist die electromotorische Kraft des Elementes nach der Kohlrausch'schen Theorie:

$$(4) \qquad E = -\int_{T_1}^{T_2} \mathfrak{D}_\alpha \, dT - \int_{T_2}^{T_1} \mathfrak{D}_\beta \, dT.$$

Setzt man darin gemäss (1):

$$\mathfrak{D}_\alpha = -aT, \qquad \mathfrak{D}_\beta = -bT,$$

wo a und b Constanten sind, so wird:

$$(5) \qquad E = \int_{T_1}^{T_2} aT\,dT + \int_{T_2}^{T_1} bT\,dT = \tfrac{1}{2}(a-b)(T_2^2 - T_1^2).$$

Die Mitführungstheorie verlangt also, dass in dem Ausdruck für E nur die Quadrate der Endtemperaturen vorkommen. Dies Ergebniss ist nun beim jetzigen Stande der Beobachtung nicht mehr blos unwahrscheinlich, wie das Avenarius'sche Gesetz[1]), sondern es steht bestimmt im Widerspruch mit der Erfahrung. Das sieht man ohne alle Rechnung, wie folgt: T_1 nehme man zum Nullpunkt einer Abscisse, auf welcher die Temperaturen T_2 aufgetragen werden, und stelle die zugehörigen E als Ordinaten dar. Dann folgt aus Gl. (5), dass die zweiten Differentialcoëfficienten

1) Vgl. übrigens F. Braun, Phil. Mag. (5) **19.** p. 500 Z. 14 v. u. 1885.

von E stets dasselbe Vorzeichen haben, wie die ersten; es müssten also für $T_2 > T_1$ sämmtliche Curven der Abscissenaxe ihre convexe Seite zukehren. Ein Blick auf die Resultate von Gaugain u. A. zeigt, dass das nicht der Fall ist.

Ich glaube hiernach, dass ein näheres Eingehen auf die übrigen von Kohlrausch l. c. berührten Punkte nicht mehr nöthig ist und dass ich bei meinem früheren Schluss, die Mitführungstheorie sei unhaltbar, verbleiben muss.

Als selbständige Theorie, welche von einem Gesichtspunkt aus alle Erscheinungen der Thermoelectricität umfasst, kann die Mitführungstheorie nicht bestehen; dann liegt aber auch kein Grund vor, sie neben der Contacttheorie fortzuführen.

Die Mitführungstheorie erlangte ihre Selbständigkeit durch die von Kohlrausch gemachte Annahme, die Löthstellen seien unthätig. Wenn man die Formeln, welche Kohlrausch für die electromotorischen Kräfte gegeben hat, auf die Annahme umarbeitet, dass auch die Löthstellen wirksam sind, so erhält man, wie leicht zu finden, die Theorie von W. Thomson. Die „specifische Wärme der Electricität" σ dieses Autors ist identisch mit Kohlrausch's 𝔇 und mit meinem $T(d\alpha/dT)$. Die Theorie von W. Thomson und die von mir erweiterte Clausius'sche Theorie sind aber nur äusserlich verschiedene Ausdrücke für eine und dieselbe Sache: ihr verschiedenes Aussehen beruht nur darauf, dass in der einen die Grösse σ, in der anderen die Grösse α das Verhalten der Leiter charakterisirt. Die Auswahl zwischen diesen Grössen ist willkürlich; mir scheint aber, dass meine Darstellung durchsichtiger ist, weil die Gleichartigkeit der an der Löthstelle und der im homogenen Draht auftretenden Wirkungen bei ihr von vornherein in die Augen fällt.

IV. *Ueber eine von Gauss angeregte Ableitung electrodynamischer Punktgesetze;* *von E. Budde.*

§ 1. Historisch-Kritisches. Bekanntlich hat Gauss in einem Briefe an W. Weber vom März 1845 den Gedanken ausgesprochen, man müsse die Zusatzkräfte, durch welche das electrodynamische Punktgesetz sich vom electrostatischen unterscheidet, ableiten „aus der Annahme, dass die electrische Kraftwirkung sich nicht instantan, sondern, ähnlich wie das Licht, in der Zeit fortpflanze.“ Gauss hat dabei zunächst an das Weber'sche Gesetz gedacht; beim heutigen Stande der Electrodynamik wäre „irgend ein electrodynamisches Punktgesetz“ statt „das e. P.“ zu setzen.

Im Jahre 1868 haben Riemann, Betti, C. Neumann und Loschmidt[1]) sich mit diesem Problem befasst und haben sämmtlich geglaubt, das Weber'sche Gesetz als Ergebniss ihrer Prämissen zu finden. Die Arbeit von Loschmidt ist jedoch durch eine Kritik C. Neumann's in den Berliner Fortschritten desselben Jahres zu nichte gemacht worden, und gegen die drei anderen Autoren hat Clausius gewichtige Bedenken geltend gemacht. Seine Einwürfe gegen Riemann und Betti sind, soviel ich weiss, allgemein angenommen worden; C. Neumann dagegen hat in einer zweiten Abhandlung erwidert, dass die Clausius'sche Kritik sich nicht an diejenige Vorstellung von der Fortpflanzung des Potentials halte, welche Neumann selbst gegeben hat, dass sie also nicht zutrifft. Man kann diese Replik gelten lassen, Neumann hat daraufhin l. c. seine Ableitung aufrecht erhalten, und andere Schriftsteller, z. B. Zöllner und Maxwell (Schlusscapitel des Treatise) haben dieselbe als zu Rechte bestehend anerkannt.

Die möglichen Einwände sind aber mit dem von Clausius vorgebrachten nicht erschöpft; Neumann's Ableitung

1) Berl. Ber. 1868. p. 476 bis 486 enthalten alle hierher gehörigen Literaturnachweise.

enthält verschiedene Mängel, von denen einer das Ergebniss ganz evident zweifelhaft macht. Die Originalschrift „die Principien der Electrodynamik", in welcher Hr. Neumann seine Rechnung niedergelegt hat, ist mir nicht zugänglich; aber das Referat in den Berliner Berichten von 1868 ist von ihm selbst gezeichnet, also zuverlässig. Nach diesem Referat beweist Hr. Neumann zuerst den Satz: „Kräfte, für welche das Weber'sche Gesetz gilt, unterliegen dem Hamilton'schen Princip." Später fasst er das Newton'sche Potential, welches zwischen zwei Theilchen m und m' vorhanden ist, als einen Befehl, der etwa von m gegeben und von m' recipirt wird. Dieser Befehl soll einer gewissen Zeit Δt bedürfen, um sich von m nach m' fortzupflanzen, und zwar soll er sich fortpflanzen auf einem Radiusvector, der sich mit m zugleich im Raume bewegt. Zur Zeit t_0 gegeben, hat dann der Befehl die Strecke r_0 vor sich, welche, auf dem beweglichen Radiusvector gemessen, den Abstand zwischen m und m_1 zur Zeit t_0 darstellt; der Befehl wird nun nach diesem Abstand abgemessen, d. h. er lautet $m m'/r_0$; bezeichnet r den Abstand zur Zeit $t_0 + \Delta t$, so ist in erster Annäherung $r_0 = r + (dr/dt)\,\Delta t$ und, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Action mit c bezeichnet wird, so ist die Strecke, welche der Befehl in der Zeit Δt zurückzulegen hat, vermöge der Beweglichkeit des Radius $r = c\,\Delta t$. Aus diesen Annahmen berechnet nun der Verfasser, dass das Potential von m auf m' ausgedrückt wird durch:

$$V = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}.$$

In dieser Gleichung ist w die dem Weber'schen Gesetz entsprechende Potentialgrösse, und:

$$\mathfrak{w} = m m' \left(\frac{\log r}{c} - \frac{1}{2c^2}\frac{dr}{dt}\right).$$

Auf die erste dieser Gleichungen wendet nun Hr. Neumann das Hamilton'sche Princip an und folgert aus ihm, dass das Glied $d\mathfrak{w}/dt$ ohne Bedeutung ist. In dieser Anwendung des Hamilton'schen Princips liegt ein Fehler; denn nach Hrn. Neumann's eigenem Beweis gilt

das Hamilton'sche Princip erst dann, wenn schon nachgewiesen ist, dass die fraglichen Kräfte dem Weber'schen Gesetz unterliegen; also darf es nicht eher auf unsere Gleichung angewendet werden, als bis — unabhängig vom Hamilton'schen Princip — der Beweis gegeben ist, dass jene Gleichung sich mit dem Weber'schen Gesetz verträgt, oder aber, es muss — unabhängig vom Weber'schen Gesetz — der directe Nachweis geliefert sein, dass die Neumann'schen Grundanschauungen sich mit dem Hamilton'schen Princip vertragen. So lange dieser Beweis nicht erbracht ist, muss das Resultat der Rechnung zweifelhaft bleiben. Ich gehe auf den Punkt nicht näher ein, weil aus dem Referat der Berliner Fortschritte über die Art, wie das Hamilton'sche Princip angewendet wurde, nichts näheres zu ersehen ist.

Wenn man nun aber auch annimmt, Hrn. Neumann's Rechnung sei von diesem Einwurf befreit, so bleibt doch gegen seine Grundanschauungen selbst noch manches einzuwenden. Schon die Hypothese, dass der von m ausgehende Appell sich auf einem Radiusvector fortpflanzt, welcher sich zugleich mit m im Raume fortbewegt, dürfte Anstoss erregen. Sie ist indessen nicht so bedenklich, wie sie aussieht; in § 5 der folgenden Untersuchung wird sich nebenher ergeben, dass ihr eine einfache physikalische Deutung unterlegt werden kann, wenigstens wenn m keine Beschleunigung hat. Für ganz unzulässig aber halte ich die Punkte der Neumann'schen Grundlagen, nämlich erstens die Annahme, dass der Punkt m zur Zeit t_0 Kenntniss von dem Ort habe, den m' zur gleichen Zeit t_0 einnimmt, zweitens die Annahme, dass m seine Emission überhaupt nach einer derartigen Kenntniss einrichtet, drittens die Annahme, dass die von m' recipirte Grösse ein Potential sei. 1) Neumann nimmt an, zur Zeit t_0 emittire m einen Befehl mit Rücksicht auf die zur Zeit t_0 vorhandene Entfernung r_0. Zur Zeit t_0 hat aber m seine letzte Nachricht über den Ort von m' nicht aus der Entfernung r_0 bekommen, sondern aus einer anderen Entfernung; denn zur Zeit t_0 langen bei m erst die Wirkungen an, welche zu einer früheren Zeit $t_0 - \Delta t'$ von m' ausgegangen sind. Consequen-

terweise müsste also m seinen Appell nach dieser Entfernung $r_0 - \Delta r_0'$ beziffern. 2) Wie soll überhaupt m dazu kommen, einen abgemessenen Befehl zu emittiren? In der realen Welt steht jedes m mit unzählig vielen m' in Wechselwirkung; für alle diese m' richtig abgemessene Befehle auszusenden, ist eine Thätigkeit, die von den Leistungen einer unendlichen Intelligenz nicht wohl unterschieden werden kann. 3) Die Wirkung von m auf m' tritt schliesslich sichtbar als Beschleunigung von m', resp. als Beschleunigung der ponderablen Massen, mit denen m' in Verbindung steht, zu Tage. Beschleunigung ist aber eine wesentlich gerichtete Quantität, ist ein Vector. Potentiale dagegen sind richtungslose scalare Quantitäten; nehmen wir also an, m' recipire ein Potential, so bleibt unerklärt, woher die an m' zu Tage tretende Wirkung ihre Richtung nimmt. Also ist die Annahme, das Recipirte sei eine Grösse von der Dimension Potential, überhaupt ungenügend.

Hiernach gehe ich dazu über, das Gauss'sche Problem auf einem anderen Wege in Angriff zu nehmen.

§ 2. Die allgemeinen Grundlagen. a) Wir untersuchen die Wirkung eines electrischen Punktes ε auf einen zweiten ε'; die Buchstaben ε und ε' sollen die Individuen, nicht eine messbare Eigenschaft derselben bezeichnen. Das Wort „Punkte" brauchen wir in abgekürzter Redeweise, ohne damit sagen zu wollen, dass ε und ε' keine Ausdehnung haben; sie sollen nur so beschaffen sein, dass ihre etwaigen Dimensionen nicht direct in den Formeln auftreten; denkt man sie z. B. als Kugeln oder als schnell (um schnell variirende Axen) rotirende Corpuscula, so soll es möglich sein, ihre gegenseitige Relation durch ihre Mittelpunkte auszudrücken; unter der Entfernung des einen vom anderen ist dann der Abstand ihrer Mittelpunkte zu verstehen. Jedenfalls denken wir uns ε und ε' isotrop, d. h. in der Ruhe nach allen Richtungen gleichwirkend; die Erfahrung gibt ja keinen Anhalt für das Gegentheil.

b) Die Wirkung von ε auf ε' soll sich in der Zeit vom ersten zum zweiten Punkt fortpflanzen. Damit ist auch gesagt, dass sie durch ein stoffliches Medium vermittelt wird;

denn ohne einen Träger kann sich nichts fortpflanzen. Die Gauss'sche Aufgabe, vollständig gefasst, hat also von vornherein die Existenz eines kraftvermittelnden Mediums zur Voraussetzung.

c) Von den Beziehungen dieses Mediums zu ε kann man sich von vornherein zwei auf den ersten Blick entgegengesetzte Vorstellungen machen. Nämlich: 1) das Medium ist unabhängig von ε gegeben, ε schwimmt darin etwa so, wie wir uns vorstellen, dass ein leuchtendes ponderables Molecül im Lichtäther schwimmt. 2) ε selbst strahlt den stofflichen Träger aus, durch welchen seine Einwirkung auf ε' übertragen wird. Im letzteren Fall ist aber klar, dass ε eine solche Strahlung nicht ohne Ersatz ins Unendliche leisten kann. Der Ersatz kommt nun offenbar daher, dass die unzählig vielen Punkte ε', welche ausser ε im Universum existiren, dem ε ihre eigenen Kraftträger zurücksenden. Dann aber bilden die vereinigten Ausstrahlungen jener unzählig vielen Punkte dem ε gegenüber wieder ein unabhängiges Medium, in welchem ε schwimmt, und mit welchem ε durch stationären Austausch von Kraftträgern in Wechselwirkung tritt. Also ist die zweite Annahme doch nur ein Specialfall der ersten, und wir können jedenfalls das ε in einem allverbreiteten Medium schwimmend denken.

d) Alle Kräfte, die zwischen ε und ε' auftreten, hängen dann ab von den Beziehungen jedes einzelnen Punktes zu dem Medium. Um diese Beziehungen einfach und in Uebereinstimmung mit der Erfahrung formuliren zu können, machen wir folgende Annahmen: 1) das Medium ist homogen, (sonst würden zwei Punkte unter übrigens gleichen Umständen an verschiedenen Stellen des Universums verschieden aufeinander wirken); 2) es ist isotrop (sonst würde die Einwirkung zweier ruhenden Punkte aufeinander von der Richtung ihres Abstandes abhängen); 3) locale Strömungen des Mediums in dem untersuchten Bereich sind ausgeschlossen; entweder das Medium strömt als ganzes gleichmässig, oder es ist in Ruhe, wenigstens in dem Sinne, wie ein „ruhendes" Gas in Ruhe ist, d. h. die mittlere Resultante aller im Laufe einer messbaren Zeit an einer bestimmten Stelle vorkommenden

Geschwindigkeiten ist Null. Die zu verwendenden Coordinatensysteme sollen dann relativ zu dem Medium in Ruhe sein, die Geschwindigkeiten etc., welche wir mit Hülfe der Coordinatensysteme bestimmen, sind also Geschwindigkeiten etc. relativ gegen das Medium. Es ist klar, dass die Einwirkung, welche das Verhältniss von ε zu dem Medium durch die Bewegung von ε erleidet, auf diesen relativ zum Medium bestimmten Grössen beruhen muss.

e) Nimmt man überhaupt an, dass die Fortpflanzung der Kraftwirkungen Zeit erfordert, so ist leicht zu zeigen, dass die bestehenden electrodynamischen Punktgesetze nicht ganz streng, sondern blos in weit gehender Annäherung richtig sind. Ihre Gültigkeit beruht auf der Voraussetzung, dass in der Zeit, in welcher die Kraftwirkung sich von ε nach ε' fortpflanzt, der Punkt ε selbst nur eine kleine Strecke zurücklegt, deren vierte Potenz gegen r^4 vernachlässigt werden kann. Auch wir nehmen diese Voraussetzung an.

f) Die Hypothese des kraftvermittelnden Mediums involvirt von selbst die Annahme, dass die Einwirkung von ε auf ε' aus drei Acten besteht, nämlich:

1) Emission; ε tritt mit dem Medium in Wechselwirkung und erzeugt in ihm einen besonderen, auf ε bezüglichen Zustand.

2) Fortpflanzung; dieser Zustand verbreitet sich von der Stelle, wo ε sich gerade befand, über das ganze Medium, wobei er möglicherweise durch die Fortpflanzung selbst abgeschwächt wird.

3) Reception; das Medium verpflanzt den genannten Zustand u. a. auch an die Stelle $x'\,y'\,z'$, wo sich der Punkt ε' befindet. Dieser steht hier mit dem Medium in Wechselwirkung und entnimmt demselben einen auf ε bezüglichen Impuls, der von der Intensität des auf ε bezüglichen Zustandes an der Stelle $x'\,y'\,z'$ abhängt.

g) Wir haben nun zunächst die Frage zu entscheiden: welche Dimension hat der recipirte Impuls? Die Antwort lautet unbedenklich: er hat die Dimension „(bewegende) Kraft“. Denn er muss, wie aus den am Schluss von § 1 gemachten Bemerkungen hervorgeht, gerichtet sein. Es kom-

men also für ihn die Vectoren: Geschwindigkeit, Quantität der Bewegung, Beschleunigung, Kraft in Betracht. Von allen diesen Grössen hat aber nur eine die Eigenschaft, dass sie sich vollständig durch die Coordinaten, Geschwindigkeiten etc. von ε und ε' ausdrücken lässt, das ist die Kraft; die übrigen hängen theils von der Zeit, theils von der mit ε verbundenen ponderablen Masse ab. Also ist in f) Nr. 3 statt des unbestimmten Wortes Impuls das bestimmte Wort „Kraft" einzusetzen.

h) Hätten wir eine bestimmte Vorstellung von dem Vorgang der Emission und der Reception, so würde die Fortpflanzung sich wohl leicht behandeln lassen, und unsere Aufgabe wäre rein deductiv zu lösen. Davon sind wir aber so weit entfernt, dass wir nicht einmal für den einfachen Fall zweier ruhenden Punkte über die Art der Wechselwirkung zwischen ihnen und dem Medium etwas angeben können. Es bleibt also nichts übrig, als das Problem inductiv zu fassen und die Fragestellung zunächst so einzurichten: Welche Annahmen über Emission, Fortpflanzung und Reception sind erforderlich, wenn überhaupt eine mit den Principien der Mechanik und mit der Erfahrung verträgliche Wirkung zwischen ε und ε' herauskommen soll? Da bietet sich nun vorerst eine Annahme dar, die mehr oder weniger deutlich in den Arbeiten meiner Vorgänger eine Rolle spielt, und deren Ergebnisse eben durch ihre offenbare Unzulässigkeit Werth als Fingerzeige bekommen. Dieselbe soll jetzt an einem Specialfall behandelt werden.

§ 3. Die blosse Verspätung. Nehmen wir an, dass der gleichförmig bewegte Punkt ε, der zur Zeit t an der Stelle xyz steht, das Medium an dieser Stelle gerade so beeinflusse, wie derselbe Punkt es thun würde, wenn er an derselben Stelle ruhte, nehmen wir ferner an, dass die Fortpflanzung des in xyz erzeugten Zustandes für das bewegte ε gerade so vor sich gehe, wie sie für das ruhende, so bleibt von der Bewegung von ε blos eine Einwirkung übrig, die wir kurz als die „Verspätung der Kraft" bezeichnen können. ε und ε' seien relativ zu einander in Ruhe, sollen aber beide die constante Geschwindigkeit v besitzen. Zur Zeit t habe

ε den Ort E, ε' den Ort E' inne. Die Einwirkung von ε, welche zur Zeit t bei E' anlangt, ist dann nicht von E, sondern von einem anderen Punkt D ausgegangen; dort befand sich ε zur Zeit $t - \Delta t$, wenn Δt die Zeit ist, deren jene Einwirkung bedurfte, um den Radiusvector ϱ' zu durchlaufen. Offenbar ist $DE = v\Delta t$, und wenn wir die nächstliegende Annahme machen, dass die Fortpflanzung des von ε ausgehenden Zustandes mit der constanten Geschwindigkeit c erfolge, so ist $\Delta t = \varrho'/c$. Das Entsprechende gilt für ε': dieser Punkt wirkt auf ε zur Zeit t von der Stelle D' aus, wenn $D'E' = v\Delta' t$ und $\Delta' t = \varrho/c$.

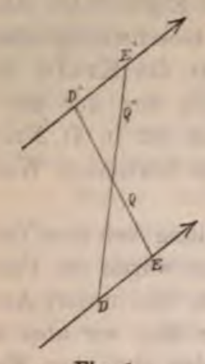


Fig. 1.

Ist also keiner der drei massgebenden Acte durch die Bewegung verändert, so bleibt blos der Umstand übrig, dass ε zur Zeit t so angezogen wird, als ob ε' in D' stände, und ε' so, als ob ε in D befindlich wäre. Die beiden auf ε' und ε wirkenden Kräfte sind also, wenn e und e' die Quantitäten der Punkte:

$$K' = \frac{ee'}{\varrho'^2} \text{ in der Richtung von } \varrho',$$
$$K = \frac{ee'}{\varrho^2} \text{ in der Richtung von } \varrho.$$

Bezeichnen wir mit r den Abstand EE', so berechnet sich aus den obigen Bedingungen leicht:

$$\varrho' = \frac{r}{c^2 - v^2} c \left\{ \sqrt{c^2 - v^2 + (v\cos\gamma)^2} + v\cos\gamma \right\}$$
$$\varrho = \frac{r}{c^2 - v^2} c \left\{ \sqrt{c^2 - v^2 + (v\cos\gamma)^2} - v\cos\gamma \right\},$$

wo γ der Winkel zwischen v und r ist. Mit Weglassung höherer Potenzen von v/c wird daraus:

$$\varrho' = r\left(1 + \frac{v}{c}\cos\gamma\right), \qquad \varrho = r\left(1 - \frac{v}{c}\cos\gamma\right).$$

Nimmt man nun r zur z-Axe und legt senkrecht dazu zwei Axen der x und y, so erhält man für die drei Componenten der Kräfte K' und K bei entsprechender Markirung.

$$X' = \frac{ee'}{\varrho'^2}\frac{v}{c}\cos\alpha, \quad Y' = \frac{ee'}{\varrho'^2}\frac{v}{c}\cos\beta, \quad Z' = \frac{ee'}{\varrho'^2}\left(\frac{r}{\varrho'} + \frac{v}{c}\cos\gamma\right),$$

$$X = \frac{ee'}{\varrho^2}\frac{v}{c}\cos\alpha, \quad Y' = \frac{ee'}{\varrho^2}\frac{v}{c}\cos\beta, \quad Z = \frac{ee'}{\varrho'^2}\left(-\frac{r}{\varrho} + \frac{v}{c}\cos\gamma\right),$$

wo $\alpha\beta\gamma$ die Winkel von v mit den Axen. Befestigen wir also beide Punkte aneinander, so wirkt auf das System $\varepsilon + \varepsilon'$ blos vermöge der Verspätung der Kräfte eine Resultante, deren Componenten sind $X + X'$, $Y + Y'$, $Z + Z'$, oder mit gleicher Annäherung wie oben:

$$ee'\frac{2v}{cr^2}\cos\alpha, \quad ee'\frac{2v}{cr^2}\cos\beta, \quad -ee'\frac{4v}{cr^2}\cos\gamma.$$

Also „zwei absolut bewegte, relativ ruhende Punkte besitzen durch ihre blosse gegenseitige Einwirkung eine endliche Beschleunigung von der Ordnung $ee'v/c\mu r^2$“, wo μ ihre Masse bezeichnet. Das leuchtet auch aus dem Anblick der Fig. 1 sofort ein, wenn man sich die an ε und ε' wirkenden Kräfte in Componenten nach r und senkrecht zu r zerlegt denkt. Dies Ergebniss ist nun vollkommen unzulässig. Wendet man es auf einen irdischen Körper an, der eine continuirliche Flächenladung besitzt, so findet man, dass die Theilchen, welche seine electrische Ladung ausmachen, einander vermöge der Bewegung der Erde im Raume eine unendlich grosse Beschleunigung ertheilen. Aber man kann von aller Anwendung absehen: die hier berechneten Kräfte machen das Galilei'sche Trägheitsprincip, welches doch im Falle eines kraftvermittelnden Mediums einen ganz bestimmten Sinn hat, hinfällig; sie würden also auch die Definition des Begriffes Kraft hinfällig machen; d. h. sie können nicht existiren. Ich ziehe also unbedenklich den Schluss:

Die blosse Verspätung der Kräfte ist nicht nur nicht hinreichend, um die Eigenthümlichkeiten der electrodynamischen Wirkungen zu erklären, sondern sie bringt sogar in die gegenseitige Einwirkung zweier Punkte ε und ε' ein ganz unzulässiges Element, welches nothwendig durch andere, aus der Bewegung hervorgehende Einflüsse aufgehoben werden muss.

Es ist also unbedingt die Annahme erforderlich, dass die Bewegung von ε und ε' einen Einfluss auf die drei Acte, Emission, Fortpflanzung und Reception habe, und wir werden für diesen Einfluss die Bedingung vorschreiben, er müsse so beschaffen sein, dass das Galilei'sche Princip für zwei relativ ruhende Punkte nicht in Frage gestellt wird.

§ 4. Zwei ruhende Punkte. Wir müssen nun versuchen, von den drei Acten eine etwas nähere Vorstellung zu gewinnen. Das thun wir zunächst unter der Annahme, ε und ε' seien in Ruhe. Der Zustand, den ε rings um sich her in dem Medium bildet, wird charakterisirt sein durch eine Grösse Ω, die wegen der Isotropie nur eine Function des Abstandes von ε sein kann, übrigens aber individuelle Constanten von ε enthält. Wir werden also schreiben können:

$$\Omega = f(r), \tag{1}$$

wenn r der Abstand von ε ist. An der Stelle von ε', für welche $r = r'$, wird Ω einen bestimmten Werth Ω' haben, den wir erhalten, wenn wir in $f(r)$ den Werth r' für r einsetzen. Aus diesem Ω' entnimmt nun ε' eine Kraft K', und:

$$K' = \varphi(\Omega'), \tag{2}$$

wo φ das Symbol einer unbekannten Function ist, von der wir aber aussagen, dass sie ausserhalb Ω' keine Grössen enthält, zu deren Bestimmung die Kenntniss von ε selbst erforderlich ist; denn die Operation φ geht ja aus der Wechselwirkung zwischen ε und dem mit Ω' belasteten Medium hervor, kann also nur durch das Verhältniss von ε' zu dem Medium bestimmt sein. Die Erfahrung lehrt nun, dass:

$$K' = \frac{\text{const.}}{r'^2}, \tag{3}$$

und dieser Gleichung können wir durch zwei sehr einfache Functionsformen für f und φ Genüge thun. Wir setzen:

$$(4)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{a}{r} \\ K' = -b\,\dfrac{d\Omega'}{dr} \end{cases} \quad \text{oder} \quad (5)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{a}{r^2} \\ K' = b\,\Omega', \end{cases}$$

wo in beiden Fällen a eine Constante von ε, b eine solche von ε' ist. Setzen wir ε quantitätsgleich ε', so ist $\sqrt{ab}$ die

Quantität e. Zu dem System der Gleichungen (4) ist zunächst Folgendes zu bemerken: die Operation d/dr sieht auf den ersten Blick so aus, als sei in ihrer Ausführung die Kenntniss des Radius r, also einer auf ε bezüglichen Grösse enthalten; das ist aber nur scheinbar der Fall, $d\Omega/dr$ ist einfach das Maximalgefälle von Ω, und das ist eine Grösse, die sich an der Stelle ε' ganz unabhängig von aller Kenntniss des Ortes ε bestimmen lässt, denn:

$$\left(\frac{d\Omega'}{dr}\right)^2 = \left(\frac{d\Omega'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega'}{dz'}\right)^2.$$

Also lässt sich $d\Omega'/dr$ durch drei Operationen bestimmen, in denen ausser Ω blos die Coordinaten von ε' vorkommen. Die Gleichungen (4) können wir hiernach sinngetreuer formuliren, wenn wir sie schreiben:

$$(4_b) \qquad \Omega = \frac{a}{r}, \qquad K' = -b\,\frac{d\Omega'}{dm},$$

wo nunmehr d/dm die Differentiation nach der Richtung des Maximalgefälles bezeichnet.

Die Systeme (4_b) und (5) sind die einfachsten unter den möglichen, welche Gl. (3) befriedigen. Uebrigens ist die Auswahl unter ihnen vorläufig willkürlich, wir könnten ihre Anzahl noch vermehren, ohne damit etwas Neues zu erzielen. Denn, wenn $\Omega_1 = f_1(r)$ eine bestimmte, für unseren Zweck brauchbare Functionsform ist, zu der als zweite Operation φ_1 gehört, so können wir willkürlich eine zweite Function $\Omega_2 = f_2(\Omega_1)$ bilden; ist dann F_2 die inverse Function von f_2, und setzen wir $\varphi_2(\,) = \varphi_1(F_2(\,))$, so ist $\varphi_2(\Omega_2)$ offenbar identisch mit $\varphi_1(\Omega_1)$. Diese Willkür bleibt aber nur so lange bestehen, wie die Richtungen m und r zusammenfallen; wenn das sich im Fall der Bewegung von ε ändern sollte, würden wir uns für eins der Systeme (4_b) und (5) entscheiden müssen.

Den Constanten a und b lässt sich nun eine Deutung geben, die sich in einfacher Weise an den Begriff der Fortpflanzung anschliesst. Wir wollen annehmen, ε sende jederzeit nach allen Richtungen N „Strahlen" aus. Die Natur dieser Strahlen lassen wir unerörtert; das Wort Strahl mag als bildliche Bezeichnung für einen unbekannten stationären

Vorgang gelten, der von ε aus in dem Medium inducirt wird. N sei so gross, dass es praktisch als unendlich gross behandelt werden kann. Die Strahlen seien rings um den Mittelpunkt ε ganz gleichmässig im Raume vertheilt, und jeder einzelne habe eine gewisse Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die wir im allgemeinen mit dS/dt bezeichnen. Im Fall der Ruhe soll dS/dt eine absolute, sehr grosse Constante c sein. Jeder Strahl führe eine gewisse Wirkungsfähigkeit mit sich, die $\mathfrak{e}$ heisse. In der Entfernung r treffen die N Strahlen auf eine Kugelfläche von der Grösse $4\pi r^2$, ihre numerische Flächendichtigkeit, d. h. die Anzahl von Strahlen, welche auf die Flächeneinheit trifft, ist also $N/4\pi r^2$. Das Product „Flächendichtigkeit mal Wirkungsfähigkeit des einzelnen Strahls", welches wir kurz die „Wirkungsdichtigkeit" nennen können, ist also $N\mathfrak{e}/4\pi r^2$. Setzen wir $N\mathfrak{e}/4\pi = a$, so ist damit für a eine ganz bestimmte Bedeutung gewonnen:

a ist die Wirkungsdichtigkeit von ε in der Entfernung 1.

Ebenso einfache Bedeutungen haben die beiden Ω;

a/r^2 ist die Wirkungsdichtigkeit in der Entfernung r;

a/r ist der mit einer (hier keiner näheren Bestimmung bedürftigen) Constante multiplicirte mittlere Abstand eines Strahls von seinen nächsten Nachbarn. (wegen $r = \sqrt{r^2}$).

Die Reception wird nun unter allen Umständen bestimmt sein 1) durch den Bruchtheil $\mathfrak{e}'$ von der Wirkungsfähigkeit des einzelnen Strahles, der bei ihr in Kraft umgesetzt wird, 2) durch eine zweite Constante n', die angibt, auf welchen Bruchtheil der Flächeneinheit sich die receptive Thätigkeit von ε' erstreckt. Wir können also $b = n'.\mathfrak{e}'$ setzen. Diese Grössen, sowie die Constanten N und $\mathfrak{e}$, wollen wir jetzt in die Gleichungen (4_b) und (5) einsetzen; dabei wollen wir aber nun nicht mehr in beiden dasselbe Zeichen Ω führen, sondern, um Verwechslungen zu vermeiden, dem Ω in jeder der beiden eine besondere Bezeichnung geben; in der ersten soll es V, in der zweiten W heissen. Dann ist:

$$(4_a)\quad \begin{cases} V = \dfrac{N\mathfrak{e}}{4\pi r} \\ K = -n'\mathfrak{e}'\dfrac{dV}{dm}, \end{cases} \quad \text{oder aber} \quad (5_a)\quad \begin{cases} W = \dfrac{N\mathfrak{e}}{4\pi r^2} \\ K' = n'\mathfrak{e}' W \end{cases}$$

der symbolische Ausdruck für die Vorgänge, durch welche die Kraft K' entstehen kann, in einfachster Form.

Ueber die Natur der Constanten $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ sind wir nicht im Stande, etwas Näheres auszusagen; der Vorgang, durch den sie in die Ausdrücke kommen, bleibt im Dunkeln. Dagegen können wir über das Auftreten von N, n und von r' im Nenner Rechenschaft geben, und mit den dadurch gewonnenen Mitteln wenden wir uns nun zu dem

Fall zweier gleichförmig bewegten Punkte.

§ 5. Fortpflanzungsänderung und Strahlenvertheilung. ε habe die Geschwindigkeit v, welche in die Componenten dx/dt u. s. w. zerfällt, ε' habe v'; die Beschleunigung beider Punkte sei Null. Wir nehmen an, die Bewegung von ε habe einen Einfluss auf die Fortpflanzung der von ε ausgehenden Strahlen. Dieser Einfluss kann nicht wohl etwas anderes treffen, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dS/dt, die hiernach Function von v wird. Wir werden demnach setzen:

$$\frac{dS}{dt} = f(c, v). \tag{6}$$

Soll die Gleichung homogen werden, so ist keine andere einfache Form derselben möglich, als:

$$\frac{dS}{dt} = c + + gv, \tag{7}$$

wo g eine Constante, und wo das doppelte Pluszeichen andeuten soll, dass wir noch zu entscheiden haben, ob wir gv geometrisch oder algebraisch zu c addiren wollen. Die geometrische Addition entspricht offenbar besser dem allgemeinen Begriff, den wir von der Einwirkung einer gerichteten Grösse auf eine andere ihresgleichen haben; wir wählen also das geometrische Plus, welches nunmehr durch $++$ bezeichnet sei. Ferner bemerke ich vorgreifend, dass, wenn man die Rechnung mit der unbestimmten Constante g durchführt, man schliesslich genöthigt wird, $g = 1$ zu setzen. Die Darstellung wird aber wesentlich vereinfacht, wenn das sofort geschieht. Wir nehmen also an: „Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Strahls, der vom bewegten ε ausgeht, ist

die Resultante aus der Geschwindigkeit c, welche der gleiche Strahl bei ruhendem ε haben würde, und aus v." Oder, wenn wir c in drei Componenten $c_x\, c_y\, c_z$ zerlegen, so sind die Componenten von dS/dt:

$$c_x + \frac{dx}{dt}, \quad c_y + \frac{dy}{dt}, \quad c_z + \frac{dz}{dt}.$$

Diese Annahme macht offenbar die Vertheilung der Strahlen von v abhängig, aber so, dass alle Zustände der Strahlung rings um v gleichmässig vertheilt sind: irgend eine Fläche gleichen Zustandes (Niveaufläche) ist eine Rotationsfläche, deren Axe der an ε angeheftete, passend verlängerte Vector v bildet. Deshalb genügt es, wenn wird durch ε, v und ε' eine Ebene legen und die Zustände in dieser Ebene betrachten.

a) In Fig. 2 sei E der Ort von ε zur Zeit t, E' der von ε' zu derselben Zeit, D sei der Ort, an dem sich ε befand, als der Strahl ϱ von ihm ausging, der zur Zeit t in E' anlangt, Δt die Zeit, welche dieser Strahl gebraucht hat, um von D nach E' zu gehen, FE' gleich und parallel DE', und $EE' = r$. Dann ist $DE = v\Delta t$, und wenn dS/dt aus den beiden Componenten c und v besteht, so ist auch ϱ aus den beiden Componenten $c\Delta t$ und $v\Delta t$ zusammengesetzt. Von diesen ist DE die eine, also r die andere. Demnach ist:

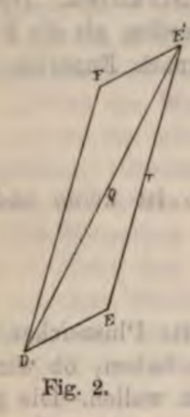


Fig. 2.

$$r = c\Delta t, \tag{8}$$

d. h. der Strahl des bewegten ε legt den Weg von D nach E' in derselben Zeit zurück, in welcher der Strahl des ruhenden ε von E nach E' gehen würde.

b) Wir fragen nun nach der Flächendichtigkeit der Strahlen in E'. Bei ruhendem ε würden die von D ausgegangenen Strahlen in E' die Dichtigkeit $N/4\pi\varrho^2$ haben. Nun ist aber irgend ein Strahl, der jetzt durch E' geht, durch den Einfluss von v aus der Richtung DF in die Richtung DE' gebracht worden. Diese Verschiebung hat offenbar keinen

Einfluss auf die Vertheilung der Strahlen längs einer Richtung, welche in der Nachbarschaft von E' senkrecht auf der Ebene $FE'E$ steht, wohl aber einen solchen auf die Vertheilung längs der Richtung FE', und dieser Einfluss ist derselbe für alle Raumelemente von gleicher Grösse, die durch zwei sich in DE schneidende Ebenen begrenzt werden. Es genügt also wieder, ihn in unserer Ebene zu betrachten.

Fig. 3. D sei wieder der Punkt, in dem sich ε zur Zeit $t - \Delta t$ befand. Wäre ε damals in Ruhe gewesen, so würde es irgend einen Strahl nach der Richtung DF ausgesandt haben, und einen zweiten, DG, der dem ersten unendlich nahe steht. DE sei die Richtung von v und FG parallel DE. Infolge der Bewegung von ε wird nun der Strahl DF nach DE', und DG nach DH abgelenkt. Es ist nach (a) $FE' = v\Delta t = GH$, also auch:

$$FG = E'H = \delta.$$

Fig. 3.

Der unendlich kleine Winkel FDG ist, wenn FJ senkrecht auf DG steht, FJ/DF, i. e.:

$$\sphericalangle FDG = \frac{\delta}{r} \sin FGJ = \frac{\delta}{r} \sin FDE.$$

Ganz ebenso ist:

$$\sphericalangle E'DH = \frac{\delta}{\varrho} \sin E'DE.$$

Ferner ist: $r \sin FDE = \varrho \sin E'DE$,

also: $$\frac{\sphericalangle FDG}{\sphericalangle E'DH} = \frac{\varrho^2}{r^2}.$$

Nun verhält sich aber die Flächendichtigkeit der abgelenkten Strahlen in der Umgebung von E' zu der Flächendichtigkeit, die ohne Ablenkung da wäre, umgekehrt, wie $\sphericalangle E'DH$ zu $\sphericalangle FDG$, d. h., wenn wir wieder zu Fig. 2 zurückkehren:

Die wirkliche Flächendichtigkeit in E': $\frac{N}{4\pi\varrho^2} = \varrho^2 : r^2$.

Die wirkliche Flächendichtigkeit ist also:

$$(9) \qquad \frac{N}{4\pi r^2},$$

d. h. sie ist genau so gross, als ob ε an der Stelle E in Ruhe wäre.

c) Wir haben nun bisher abkürzend so gesprochen, als wäre der Strahl S wie ein Ganzes aus der Richtung DF in die Richtung DE' gedreht. Der Begriff des Strahls bringt aber die Vorstellung mit sich, dass der einzelne Strahl aus Elementen besteht, welche nacheinander einen Weg von bestimmter Richtung zurücklegen. Sendet ε, ruhend gedacht, ν in kurzen Zwischenräumen aufeinander folgende Elemente von D aus nach der Richtung DF, Fig. 2, so bilden diese ν Elemente ein Stück des durch F gehenden Strahls. Wir wollen nun annehmen, die Zeit, welche dem Moment t vorangeht, und während deren der Punkt ε die constante Geschwindigkeit v gehabt hat, sei τ. Während dieser Zeit habe ε fortwährend in sehr kurzen Zwischenräumen gewisse Strahlenelemente ausgesendet, die alle, wenn ε in Ruhe gewesen wäre, mit der Geschwindigkeit c in der Richtung parallel DF davon geflogen wären. Diese Elemente würden also im Fall der Ruhe einen mit DF parallelen Strahl gebildet haben. Da aber ε in Bewegung ist, haben sie nicht mehr die Richtung DF, sondern sind parallel mit DE' fortgeflogen, und zwar mit der Geschwindigkeit $c\varrho/r$. Es sei $\varkappa$ ein echter Bruch, und wir betrachten irgend ein Element, welches zur Zeit $t - \varkappa\tau$ von ε ausging. Die Bewegung dieses Elements hat ihren Anfang genommen von einem Punkt, der auf der geraden Linie ED liegt und von E um die Strecke $v\varkappa\tau$ in der Richtung nach D hin absteht. Seine Bahn ist parallel mit DE' und hat zur Zeit t die Länge $\varkappa\tau c(\varrho/r)$. Also verhält sich ihre Länge zu $\varrho = \varkappa\tau(c/r):1 = \varkappa\tau:\Delta t$. Andererseits verhält sich $v\varkappa\tau : DE = v\varkappa\tau : v\Delta t = \varkappa\tau:\Delta t$. D. h. das Element befindet sich zur Zeit t auf der geraden Linie EE'. Und da dasselbe für alle Elemente je irgend eines Strahls gilt, so folgt unmittelbar:

Alle diejenigen Strahlenelemente, die bei ruhendem ε einen Strahl S bilden würden, bilden auch bei bewegtem ε einen Strahl, und zwar liegt jeder von

diesen Strahlen zur Zeit t genau so, als wäre ε an der Stelle, die es zur Zeit t inne hat, in Ruhe.

(Dies ist, wie man beim Rückblick auf § 1 sieht, die von C. Neumann für die Fortpflanzung seines „Appelles" angenommene Hypothese, die aber hier physikalisch vollkommen deutlich wird. Sie kann natürlich, so wie sie hier formulirt ist, diesen deutlichen Sinn nur für constantes v behalten.)

Das ausgezeichnet einfache Resultat, welches die Annahme $dS/dt = c +\!\!+ v$ liefert, schafft nun offenbar die „Verspätung der Kräfte" des § 3 aus dem Wege, und man sieht leicht, dass dies auf andere Weise nicht erreicht werden kann.

§ 6. Die Reception auf Grundlage von § 5. Legen wir nun der Reception die im System der Gleichungen (4_a) symbolisch ausgedrückten, übrigens nicht näher bekannten Verhältnisse zu Grunde, so ergibt sich:

Zur Zeit t ist:

$$V = \frac{N\mathfrak{e}}{4\pi r}, \tag{10}$$

wo r nunmehr den Radiusvector bezeichnet, der von ε zur Zeit t nach ε' hinführt. In der Operation, durch welche K' gebildet wird, ist die Richtung m des Maximalgefälles von V identisch mit der von r, denn die Strahlen liegen ja gerade so, als ob ε in Ruhe wäre; also:

$$K' = -n'\mathfrak{e}'\frac{dV'}{dr} = N n'\mathfrak{e}\mathfrak{e}' \cdot \frac{1}{4\pi r^2}. \tag{11}$$

Hier ist aber sofort hervorzuheben, dass $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ nicht nothwendig dieselbe Bedeutung haben, die ihnen bei ruhendem ε zukommt. Obgleich nämlich der Büschel der sich in ε schneidenden Strahlen genau so liegt, als ob ε in Ruhe wäre, so kann doch der einzelne Strahl, der vom bewegten ε ausgeht, veränderte Wirkungsfähigkeit besitzen, und diese Wirkungsfähigkeit kann vom bewegten ε' anders recipirt werden, als wenn ε und ε' in Ruhe wären. Ein Grund für eine derartige Modification von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ ist schon in den Entwickelungen des § 5 enthalten. Während nämlich der Strahl die Richtung EE', Fig. 2, und in dieser die

Geschwindigkeit c hat, besitzen die einzelnen Elemente, aus deren Aufeinanderfolge der Strahl entsteht, die Geschwindigkeit $c + + v$ von der Richtung DE'. Im Strahl des bewegten ε unterscheidet sich also das einzelne Element von dem im Strahl des ruhenden und gleichzeitig von der Bewegung des Strahls als Ganzes durch eine Zuthat, die gleich und gleichgerichtet mit v ist. Da ist nun anzunehmen, dass diese Zuthat das Product $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ modificiren wird. Bezeichnen wir also den Werth, welchen die Grösse $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ haben würde, wenn jene Zuthat nicht existirte, mit $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1'$, so ist anzunehmen, dass:

$$K' = Nn' \frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1'}{4\pi r^2} + P \tag{12}$$

sein wird, wo P die von der Zuthat v herrührende Correctur ist. Zunächst ist klar, dass P aus der Wirkung je eines einzelnen Strahls entspringt, dass also der von der recipirten Strahlenzahl abhängige Factor $Nn'/4\pi r^2$ unverändert in P eintritt. Also:

$$P = \frac{Nn'}{4\pi r^2} Q,$$

wo Q eine neue Unbekannte, welche die in der Reception des einzelnen Strahls auftretenden Besonderheiten enthält.

Vorerst constatiren wir, dass der einzelne Strahl die Zuthat v ganz unabhängig von der Bewegung von ε' enthält, z. B. auch dann, wenn ε' in Ruhe ist. Soll also jene Zuthat überhaupt etwas hervorbringen, so muss sie vorerst unabhängig von v' in Q auftreten. Diesem Postulat genügen wir auf die einfachste Weise, wenn wir annehmen:

Q enthält als ersten Factor v,

ganz einerlei, wie ε' bewegt ist.

Zweitens aber tritt auch die Bewegung von ε' in das Resultat Q ein. Um die Nothwendigkeit und die Art dieses Eintritts einzusehen, brauchen wir nur anzunehmen, ε' habe die gleiche Geschwindigkeit, wie ε, es sei $v' \equiv v$. Dann sind nicht blos die Strahlen als Ganzes gegen ε' genau so vertheilt, als ob ε und ε' beide in Ruhe wären, sondern dann bewegt sich auch jedes Strahlenelement gerade so gegen ε', wie im Fall der Ruhe. Also muss Q verschwinden. Dennoch

besteht die Zuthat v im einzelnen Strahl auch in diesem Fall. Also werden wir anzunehmen haben: Q enthält in diesem Fall noch immer den Factor v, aber ausser ihm einen zweiten, durch den Q zum Verschwinden gebracht wird, wenn ε' relativ zu ε in Ruhe ist. Also
Q enthält einen zweiten Factor, der für $v \equiv v'$ zu Null wird.

Dieser Factor kann sein 1) die relative Geschwindigkeit von ε' gegen ε im Weber'schen Sinne, also dr/dt, 2) die relative Geschwindigkeit im gewöhnlichen Sinne $v' -- v$, wenn wir die geometrische Subtraction mit dem doppelten Minuszeichen andeuten, 3) irgend eine einfache Function dieser Grössen. Das Glied Q enthält also das Product:

$$\text{entweder } v f\left(\frac{dr}{dt}\right) \text{ oder } v f(v -- v'),$$

wo f eine unbekannte Function.

Wir werden also setzen können:

$$Q = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1' g v f\left(\frac{dr}{dt}\right) \text{ oder } Q = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1' g v f(v -- v'),$$

wo g eine unbestimmte Constante. Damit die Formel homogen sei, muss der auf $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1'$ folgende Factor eine reine Zahl sein; also müssen die auftretenden Geschwindigkeiten eine andere Geschwindigkeit als Divisor haben. Als solche präsentirt sich naturgemäss c, weil ja v/c und $1/c \, . \, dr/dt$, resp. $(v -- v')/c$ das Verhältniss der störenden Geschwindigkeit zur ungestörten des Strahls ergibt. P hat also die einfachste mögliche Form, wenn wir setzen $g = 1$ und:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & P = \frac{N n'}{4 \pi r^2} \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1' \cdot \frac{v}{c} f\left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right) \\ \text{oder } \quad & P = \frac{N n'}{4 \pi r^2} \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1' \cdot \frac{v}{c} f\left(\frac{(v -- v')}{c}\right). \end{aligned} \right.$$

Zwischen diesen beiden Formeln könnte nur entschieden werden, wenn wir eine bestimmte Vorstellung vom Act der Reception hätten. Die haben wir nicht und wollen grundsätzlich unsere Hypothesen nur analytisch formuliren, soweit sie sich auf Reception und Emission beziehen. Also kann a priori keine Entscheidung gegeben werden. Wir finden aber später, dass die erste der beiden Gleichungen für P

sich ohne Weiteres in ein erfahrungsmässig brauchbares Gesetz fügt, die zweite nicht. Also wollen wir gleich hier:

$$(14)\qquad K' = \frac{Nn'}{4\pi r^2}\,\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_1'\left[1 + + \frac{v}{c} f\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)\right]$$

setzen. Hierin ist noch eine Unbestimmtheit, die durch das doppelte Pluszeichen ausgedrückt wird. Die Richtung des ersten Bestandtheils von K' ist nämlich durch das Gefälle des Strahlenabstandes bestimmt, also ist sie die Richtung von r. In den zweiten Theil dagegen geht als richtunggebendes Element nicht das Strahlengefälle, sondern die im einzelnen Strahl enthaltene Störung ein. Es muss also wahrscheinlich erscheinen, dass die Richtung des zweiten Bestandtheils nicht durch r, sondern durch die in Q enthaltenen Factoren bestimmt ist. Von diesen hat dr/dt blos ein Vorzeichen, es ist blos die Aenderung einer absoluten Länge, v dagegen hat eine bestimmte Richtung. Das Wahrscheinlichste ist also, dass diese Richtung auch die Richtung des ganzen zweiten Theils bestimmt, mit anderen Worten, dass P die Richtung von v hat. Nehmen wir dies an, so behält das Zeichen $++$ die Bedeutung der geometrischen Summation, und das Verhältniss der beiden Bestandtheile lässt sich am bequemsten ausdrücken, wenn wir die x-Componente von K' bilden. Sie wird:

$$(15)\qquad K_x' = \frac{Nn'}{4\pi r^2}\,\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_1'\left[\frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} f\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)\right].$$

§ 7. **Die unmittelbare Einwirkung von v und v' auf Emission und Reception.** In der bisherigen Betrachtung wirkt die Bewegung von ε nur mittelbar auf die Grösse $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$, nämlich insofern die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlenelemente von v afficirt wird und ihrerseits wieder in Wechselwirkung mit v' tritt. Es kann aber ganz wohl der Fall sein, dass die Geschwindigkeit v dem einzelnen Strahl auch direct ein Increment der Wirkungsfähigkeit $\mathfrak{e}$ verleiht, und dass dementsprechend die Geschwindigkeit v' direct in den Factor $\mathfrak{e}_1'$ eingeht. Ist das eine der Fall, so wird auch das andere eintreten, denn Emission und Reception sind ja offenbar reciproke Vorgänge, die auf gleich-

artigen Beziehungen zwischen den ε und dem Medium beruhen. Der einzelne Strahl S bekommt dann gleich bei seinem Ursprung, abgesehen von der grösseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit seiner Elemente, noch eine von v abhängige Zuthat zu seiner Wirkungsfähigkeit, es wird also für ihn, wenn jetzt $\mathfrak{e}_0$ die Wirkungsfähigkeit des vom ruhenden ε ausgehenden Strahls bezeichnet, $\mathfrak{e}_1$ immer noch nicht gleich $\mathfrak{e}_0$, sondern:

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0 [1 + f(v)] \tag{15}$$

und ebenso wird:

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_0' [1 + f(v')]. \tag{16}$$

Hier sind zwei grundverschiedene Fälle denkbar. Nämlich 1) das motorische Glied von $\mathfrak{e}_1$, also $\mathfrak{e}_0 f(v)$ ist seinem Wesen nach gleichartig mit dem statischen $\mathfrak{e}_0$, und dementsprechend ist das motorische Glied der Receptionsconstante gleichartig mit dem statischen; 2) das Gegentheil ist der Fall; das motorische Glied wird durch eine ganz andere Operation in die Grösse $\mathfrak{e}_1$ gebracht, als das statische, und dementsprechend wird es auch durch eine ganz andere Operation recipirt, als jenes.

Erster Fall. Das motorische Glied sei gleichartig mit dem statischen; dann ist $f(v)$ ein gewöhnlicher Zahlenfactor. Wir können also etwa setzen:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \mathfrak{e}_0 \left(1 + A \frac{v}{c} + B \frac{v^2}{c^2} \cdots\cdots\right) \\ \mathfrak{e}_1' &= \mathfrak{e}_0' \left(1 + A' \frac{v}{c} + B' \frac{v'^2}{c^2} \cdots\cdots\right), \end{aligned} \right. \tag{17}$$

oder in den $\mathfrak{e}$ treten die Componenten von v auf, etwa in der Form:

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0 \frac{c_x + A v_x + B \dfrac{v_x^2}{c_x}}{c} \cdot + + \frac{c_y \text{ u. s. w.}}{c} + + \cdots\cdots$$

Von derartigen Formeln liesse sich eine Classe einigermassen rationell motiviren. Wir könnten nämlich annehmen, das motorische Element von $\mathfrak{e}_1$ sei eben die Vergrösserung der relativen Geschwindigkeit gegen ε oder ε', womit sich die Strahlenelemente bewegen; mit anderen Worten, die Wir-

kungsfähigkeit des einzelnen Strahls sei proportional seiner relativen Geschwindigkeit gegen ε, und die Reception des Strahls sei proportional der relativen Geschwindigkeit seiner Elemente gegen ε'.

Man sieht leicht, dass die relative Geschwindigkeit des Strahls gegen das bewegte ε einfach gleich c ist, also würde:

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0,$$

dagegen die relative Geschwindigkeit seiner Elemente gegen ε' ist $v -- v' ++ c$, also würde:

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_0 \left(1 ++ \frac{v -- v'}{c}\right).$$

In dem Product $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1'$ würde also irgendwie die Grösse $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}' (v -- v')/c$ auftreten. Deren Anwesenheit in einem electrodynamischen Grundgesetz macht dasselbe aber offenbar mit der Erfahrung unvereinbar. Und dasselbe gilt nun für alle anderen Formeln der oben vorgeschlagenen Art: Ertheilt man den A versuchsweise endliche Werthe, so treten im Resultat Gössen von der Form $(Av + A'v')/c$ auf, die sich mit der Erfahrung nicht vertragen; setzt man die A gleich Null, so erhält man ähnliche Glieder $(Bv^2 + B'v'^2)/c^2$, oder solche von entsprechender Form, in denen v_x' u. s. w. vorkommen. In allen Fällen aber sind die Formeln, die man bekommt, nicht mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen. Ich gehe auf die Rechnungen im einzelnen nicht ein; der erste Fall wurde nur erwähnt, damit das Feld, auf dem sich die Untersuchung bewegt, allseitig beleuchtet sei. Der Leser kann meine Behauptung durch Nachrechnen leicht controliren, vergesse aber dabei nicht, dass $\mathfrak{e}_1$ nur Grössen enthalten darf, die sich auf v, und $\mathfrak{e}_1'$ nur solche, die sich auf v' oder $v -- v'$ etc. beziehen.

Zweiter Fall. Anders steht die Sache, wenn wir annehmen, der motorische Theil von $\mathfrak{e}_1$ sei seiner Natur nach von dem statischen wesentlich verschieden, sodass der eine durch eine ganz andere Operation gebildet und recipirt wird als der andere. Das ist durchaus denkbar; der eine kann sich zum anderen verhalten wie ein Vectorpotential zu einem

gewöhnlichen Potential, oder wie eine Wirkung, die durch Drehung um S als Axe transmittirt wird, zu einer solchen, die sich durch Fortbewegung längs S als Richtungslinie überträgt. In diesem Fall wird der statische Theil auch statisch, der motorische motorisch recipirt, d. h. bei der Bildung von K' wirkt der statische Theil von $\mathfrak{e}_1$ nur auf den statischen Antheil von $\mathfrak{e}_1'$, und der motorische nur auf den motorischen. Schreiben wir jetzt abkürzend $\mathfrak{e}_\vartheta$ statt $\mathfrak{e}_0 f(v)$, so wird:

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_\vartheta, \\ \mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_0' + \mathfrak{e}_\vartheta' \end{cases}$$

und $\mathfrak{e}_\vartheta$ muss sich von $\mathfrak{e}_0$ durch einen mit der Zahl 1 ungleichartigen, also imaginären Zahlenfactor unterscheiden. Unabhängig von allem physikalischen Eingehen auf die Natur von Emission und Reception lässt sich nun eine Hypothese, die dem Gesagten genau entspricht, in der Sprache der Quaternionen formuliren:

Es seien p und q zwei Richtungen, die senkrecht aufeinander und auf r stehen, i, j, k seien die drei Hamilton'schen Einheitsvectoren, deren Richtung mit p, q, r übereinstimmt. Dann wollen wir annehmen, $\mathfrak{e}_\vartheta$ und $\mathfrak{e}_\vartheta'$ seien in Multiplen von i, j, k auszudrücken. Uebrigens sollen beide Grössen so einfach wie möglich formulirt werden; das ist der Fall, wenn wir annehmen, $\mathfrak{e}_\vartheta$ habe $\mathfrak{e}_1 (v/c)$ zum Längenfactor und falle in die Richtung von v. Dann wird (Verwechslung des hier auftretenden dr/dt mit dem in Gl. (14) ist wohl nicht zu befürchten):

$$(18) \qquad \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0 \left(1 + \frac{dp}{dt}\frac{i}{c} + \frac{dq}{dt}\frac{j}{c} + \frac{dr}{dt}\frac{k}{c}\right).$$

Entsprechend sei:

$$(19) \qquad \mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_0' \left(1 + \frac{dp'}{dt}\frac{i}{c} + \frac{dq'}{dt}\frac{j}{c} + \frac{dr'}{dt}\frac{k}{c}\right),$$

wo dp/dt die in die Richtung von p fallende Componente von v, dp'/dt die von v' etc. ist. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ sind also Quaternionen; die aus dem einzelnen Strahl recipirte Kraftmenge wird:

$$(20)\quad \mathfrak{e}_1'\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0'\mathfrak{e}_0 \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{dp}{dt}\frac{dp'}{dt}\frac{i^2}{c^2} + \frac{dq}{dt}\frac{dq'}{dt}\frac{j^2}{c^2} + \frac{dr}{dt}\frac{dr'}{dt}\frac{k^2}{c^2} + \frac{dp'}{dt}\frac{dq}{dt}\frac{ij}{c^2} \\ & + \frac{dp'}{dt}\frac{dr}{dt}\frac{ik}{c^2} + \frac{dq'}{dt}\frac{dp}{dt}\frac{ji}{c^2} + \frac{dq'}{dt}\frac{dr}{dt}\frac{jk}{c^2} + \frac{dr'}{dt}\frac{dp}{dt}\frac{ki}{c^2} \\ & + \frac{dr'}{dt}\frac{dq}{dt}\frac{kj}{c^2} + \left(\frac{dp}{dt} + \frac{dp'}{dt}\right)\frac{i}{c} + \left(\frac{dq}{dt} + \frac{dq'}{dt}\right)\frac{j}{c} \\ & \qquad + \left(\frac{dr}{dt} + \frac{dr'}{dt}\right)\frac{k}{c}. \end{aligned} \right.$$

Darin, dass die drei letzten Posten in der Klammer imaginär werden, ist ausgedrückt, dass die statische Reception des motorischen $\mathfrak{e}$ und die motorische Reception des statischen $\mathfrak{e}$ kein als Kraft ausdrückbares Resultat liefern (es kann dadurch möglicherweise ein Moment erzeugt werden, welches ε um eine Axe dreht, aber nichts mit K' gleichartiges).

Ferner sind wegen $ij = k$ u. s. w. auch die sechs vorhergehenden Posten imaginär, und es bleibt wegen $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ als reelles Ergebniss:

$$(21)\quad \mathfrak{e}_1'\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_0\mathfrak{e}_0'\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dp'}{dt}\frac{dp}{dt} + \frac{dq'}{dt}\frac{dq}{dt} + \frac{dr'}{dt}\frac{dr}{dt}\right)\right],$$

kürzer:

$$(22)\quad \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_0\mathfrak{e}_0'\left[1 - \frac{1}{c^2}vv'\cos(v, v')\right].$$

Die Producte gleichgerichteter Vectoren sind scalare Grössen; dass Zusatzglied in (22) ist also eine reine Zahl und als solche in Gl. (15) einzuführen. Lassen wir dabei die Glieder mit $1/c^4$ als zu klein bei Seite, so kommt, da:

$$\mathfrak{e}_0\mathfrak{e}_0'\frac{Nn'}{4\pi} = ee',$$

$$(23)\quad K_x' = \frac{ee'}{r^2}\left[\left(1 - \frac{1}{c^2}vv'\cos(v,v')\right)\frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{1}{c}\frac{dx}{dt}f\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)\right].$$

Setzt man darin $f(1/c . dr/dt)$ gleich $1/c . dr/dt$ selbst, so hat man das Clausius'sche Gesetz für zwei Punkte ohne Beschleunigung. In unserer Darstellung trat das zweite Glied dieser Formel als ein blos denkbares, aber unter den denkbaren als das einfachst mögliche auf. Es ist also eigentlich mit einem unbestimmten Factor λ versehen, der die einfachsten Zahlenwerthe, insbesondere auch den Werth Null, haben kann; wenn wir hier nun finden, dass es

sich mit dem Factor 1 einem erfahrungsmässig brauchbaren Gesetz anpasst, so haben wir alle Veranlassung, ihm diesen Factor zu geben, auch über die Unsicherheit, welche das letzte Glied nach § 6 trifft, vorläufig hinwegzusehen und mit Gl. (23) weiter zu gehen zur Untersuchung zweier

Punkte mit Beschleunigung.

§ 8. **Verspätung durch die Beschleunigung.** ε und ε' sollen endliche Beschleunigungen haben, deren Betrag $\dot{u}$ und $\dot{u}'$, deren Richtungen σ und σ' seien. $\dot{u}$ oder $d^2\sigma/dt^2$ zerfalle in die Componenten d^2x/dt^2 etc. Dann sind zwei Fälle möglich: Entweder diese Beschleunigungen gehen, ähnlich wie die Geschwindigkeiten, in die recipirte Wirkungsfähigkeit $\varepsilon\varepsilon'$ des einzelnen Strahls ein, oder diese Wirkungsfähigkeit wird blos durch die Geschwindigkeiten, nicht durch die Beschleunigungen bestimmt. Dasselbe Dilemma besteht für die Beziehungen zwischen Beschleunigung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Können wir mit der Annahme, dass die Beschleunigung keinen Einfluss auf die drei Acte hat, zu einem der Erfahrung genügenden Gesetz gelangen, so ist diese Annahme so viel einfacher, als die gegentheilige, dass sie ohne Zweifel vorgezogen werden muss. Wir machen sie also und untersuchen, was aus ihr folgt.

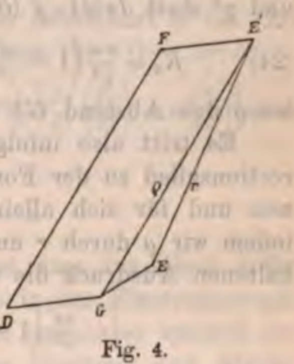


Fig. 4.

Zur Zeit t befinde sich ε in E, Fig. 4, ε' in E'. Die Wirkung, welche zur Zeit t in E' recipirt wird, ist zur Zeit $t - \Delta t$ von einem Punkt D ausgegangen. Hat E die Coordinaten xyz, so hatte ε in D die x-Coordinate (bei sehr kleinem Δt):

$$x - \frac{dx}{dt}\Delta t + \tfrac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2,$$

und zugleich hatte es die Geschwindigkeit $v_{\mathfrak{Z}}$, deren x-Componente lautet:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\Delta t.$$

Hatte nun die zur Zeit $t - \Delta t$ vorhandene Beschleunigung keinen Einfluss auf Emission und Fortpflanzung, so haben sich die Strahlen von D aus gerade so fortgepflanzt, als hätte ε in D die constante Geschwindigkeit v_Δ gehabt. Legen wir also an D eine Gerade DG, welche die Richtung von v_Δ und die Länge $v_\Delta \Delta t$ hat, so ist deren Endpunkt G zur Zeit t der Mittelpunkt der gerade bei E' anlangenden Strahlung (§ 5). ε' verhält sich also gerade so, als würde es von dem in G ruhenden Punkt ε nach dem Gesetz (23) angezogen. Dieser Punkt G hat die x-Coordinate:

$$x - \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \Delta t\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\Delta t\right), \text{ d. i. } x - \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2.$$

Sein Abstand von E wird nach Grösse und Richtung durch $-\frac{1}{2}\Delta t^2 \dot{u}$ bestimmt.

Die x-Componente der Kraft, mit welcher ε auf ε' wirkt, ist also, wenn wir abkürzend ω^2 statt $vv' \cos(v, v')$ schreiben und χ^2 statt $dx/dt \,.\, f\,(\partial r/dt)$:

$$(24) \qquad K'_x = \frac{ee'}{\varrho^3}\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(x' - x + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2\right) + \frac{ee'}{\varrho^2}\frac{\chi^2}{c^2},$$

wo ϱ den Abstand GE' bezeichnet.

Es tritt also infolge der Existenz von d^2x/dt^2 ein Correctionsglied zu der Formel (23), welches wir mit η bezeichnen und für sich allein herstellen wollen. Das geschieht, indem wir ϱ durch r und $\dot{u}$ ausdrücken und von dem so erhaltenen Ausdruck die uncorrigirte Componente:

$$\frac{ee'}{r^3}\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(x' - x) + \frac{ee'}{r^2}\frac{\chi^2}{c^2}$$

abziehen. Es ist wegen $GE = \frac{1}{2}\dot{u}\,\Delta t^2$ und $\cos E'EG$[1]) $= dr/d\sigma$:

$$\varrho^2 = r^2 - r\dot{u}\,\Delta t^2 \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{4}\dot{u}^2\,\Delta t^4.$$

Hier und im Folgenden lassen wir alle Glieder fort, die Δt^4 oder $\Delta t^2/c^2$ enthalten; dann bleibt:

$$\varrho^2 = r^2\left(1 - \frac{1}{r}\dot{u}\,\Delta t^2\frac{dr}{d\sigma}\right), \qquad \varrho^3 = r^3\left(1 - \frac{3}{2r}\dot{u}\,\Delta t^2\frac{dr}{d\sigma}\right),$$

$$\frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2r}\dot{u}\,\Delta t^2\frac{dr}{d\sigma}\right),$$

1) $d\sigma$ stellt hier und im Folgenden eine Verrückung von ε nach der Richtung von $\dot{u}$ vor.

$$K_x' = \frac{e e'}{r^3}\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{3}{2r}\,\dot{u}\,\Delta t^2 \frac{dr}{d\sigma}\right)\left(x' - x + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 x}{dt^2}\,\Delta t^2\right)$$
$$+ \frac{e e'}{r^2}\,\frac{\chi^2}{c^2}\left(1 + \frac{1}{r}\,\dot{u}\,\Delta t^2 \frac{dr}{d\sigma}\right).$$

Hierin können wir nun bei dem erstrebten Genauigkeitsgrade für Δt, welches eigentlich $= \varrho/c$ ist, einfach r/c setzen, und dann wird das gesuchte Correctionsglied:

$$\eta = \frac{e e'}{r^3}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d^2 x}{dt^2}\,\frac{r^2}{c^2} + \frac{3\,(x' - x)}{2r}\,\dot{u}\,\frac{r^2}{c^2}\,\frac{dr}{d\sigma}\right]. \tag{25}$$

(25) gibt mit leichter Umformung (der erste Posten in der Klammer dreimal subtrahirt und dreimal addirt):

$$\eta = -\frac{e e'}{c^2 r}\,\frac{d^2 x}{dt^2} + \tfrac{3}{2}\,\frac{e e'}{c^2}\,\frac{\dot{u}}{r}\left(\frac{dx}{d\sigma} - \frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{dr}{d\sigma}\right). \tag{26}$$

Hierin ist:

$$\tfrac{3}{2}\,\frac{e e'}{c^2}\,\frac{\dot{u}}{r}\left(\frac{dx}{d\sigma} - \frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{dr}{d\sigma}\right) = \tfrac{3}{2}\,\frac{e e'}{c^2}\,\frac{d^2\sigma}{dt^2}\,\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Fügen wir die Correction η in dieser Schreibart in Gl. (23) ein, so wird mit der dortigen Annahme für $f(1/c\,.\,dr/dt)$:

$$K_x' = \frac{e e'}{r^2}\left\{\left[1 - \frac{v v'}{c^2}\cos(v, v')\right]\frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{dx}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - r\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right]\right\} + A, \tag{27}$$

wo zur Abkürzung:

$$\tfrac{3}{2}\,\frac{e e'}{c^2}\,\frac{d^2\sigma}{dt^2}\,\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = A \tag{28}$$

gesetzt ist. Ich bemerke vorgreifend, dass das Glied A für alle diejenigen Beziehungen, welche in der Electrodynamik bis jetzt erfahrungsmässig begründet sind, also speciell für Beziehungen zwischen geschlossenen Strömen und Stromkreisen, den Kraftbeitrag Null liefert. Was aber in Gl. (27) dem Glied A vorangeht, das ist das Clausius'sche Gesetz für beliebige Punkte.

Das die Beschleunigung enthaltende Glied des Clausius'schen Gesetzes geht also aus der Verspätung hervor und verlangt keine Nebenannahme des Inhalts, dass auch die Beschleunigung auf die drei Acte der Kraftbildung wirke.

Diese grösste Einfachheit der Grundlagen ist nur dem Clausius'schen Gesetz eigen; man sieht leicht, dass das

Glied η auch in allen anderen Grundgesetzen auftreten würde und nur durch Annahmen über den Einfluss der Beschleunigung auf Emission und Reception wieder herausgeschafft werden kann. Und diese grösste Einfachheit gibt meines Erachtens dem Clausius'schen Gesetz ein sehr bedeutendes Uebergewicht über alle anderen; sie bildet nachträglich eine starke Rechtfertigung der Schritte, die wir gethan haben, um zu der Gleichung (23) zu gelangen, um so mehr, da die für e_δ und e'_δ gemachten Annahmen, wenn sie auch ein etwas fremdartiges Ansehen haben, doch thatsächlich die einfachsten sind, durch die überhaupt der Begriff motorische Emission und Reception hergestellt werden kann. Wieviel jene Einfachheit werth ist, ergibt sich klar, wenn man bedenkt, dass meine Behandlung des Gauss'schen Problems auf die weitere Aufgabe führt, zu untersuchen, wie sich den oben blos analytisch formulirten Vorgängen der Emission, Fortpflanzung und Reception eine construirbare, physikalische Deutung unterlegen lässt. Da würde offenbar die Einführung der Beschleunigungen die Schwierigkeit verzehnfachen. Hier soll darauf nicht näher eingegangen werden. Wir haben nun noch erstens einem möglichen Einwand zu begegnen, zweitens das Glied A bis zu einem gewissen Grade zu untersuchen.

§ 9. Die Verspätung aus der Beschleunigung und die Schlüsse des § 3. Zwei Punkte ε und ε', die auf der Erde miteinander in fester Verbindung stehen, besitzen nicht blos eine endliche Geschwindigkeit, sondern auch eine endliche Beschleunigung, theils wegen der Erdrotation, theils wegen der Revolution um die Sonne. Die Kräfte η und η', die aus dieser Beschleunigung nach Gl. (27) für sie hervorgehen, unterliegen nun einer ganz ähnlichen Betrachtung, wie die Verspätungskräfte in § 3, und man könnte fragen, ob sich nicht auch für sie principiell unzulässige Folgerungen, wie für jene, ergeben. Das ist nicht der Fall. Das Trägheitsprincip wird durch die Kräfte η und η' nicht angetastet, denn im Falle constanter Werthe von v und v' ist ja $\eta = 0$. Die Grösse beider Kräfte wollen wir einfach nach dem Clausius'schen Gesetz bestimmen, da das Glied A nur eine Com-

ponente von gleicher Ordnung in das Resultat bringt, wie das letzte Glied des Clausius'schen Gesetzes.

Haben ε und ε' beide die Beschleunigung, deren x-Componente $\dot{u}_x$ ist, so bringt diese Beschleunigung in die Kraft, welche auf ε' wirkt, die Componente:

$$\eta = -\frac{ee'}{c^2 r}\dot{u}_x$$

und in diejenige, welche auf ε wirkt, die Componente:

$$\eta' = -\frac{ee'}{c^2 r}\dot{u}_x.$$

Befestigt man ε an ε', so sind alle Glieder mit Ausnahme der beiden vorstehenden reciprok, es wirkt also auf das System $\varepsilon + \varepsilon'$ die Kraft, deren x-Componente:

$$-2\frac{ee'}{c^2 r}\dot{u}_x.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem entsprechenden in § 3 wesentlich dadurch, dass er $1/r$ nur in der ersten Potenz enthält. Da ee'/r das Potential des aus beiden Punkten gebildeten Systems auf sich selbst ist, so folgt sofort: ist auf der Erde eine zu ihr ruhende electrische Ladung gegeben, deren Potential auf sich selbst Π ist, so erleidet dieselbe eine Kraft von der Ordnung:

$$-\frac{2}{c^2}\Pi\dot{u},$$

wo $\dot{u}$ die Beschleunigung der Erde ist. Das Glied A ändert, wie gesagt, die Grössenordnung dieses Ergebnisses nicht. Die vorstehende Grösse ist aber für alle beweglichen, electrisch geladenen Körper, die wir experimentell herstellen können, viel zu klein, um der Beobachtung zugänglich zu sein. Uebrigens wäre noch zu fragen, ob sie nicht beim Nordlicht eine Rolle spielen kann.

§ 10. Das Glied A steht und fällt mit dem Glied $ee'/c^2 r \,.\, d^2x/dt^2$; wenn man also die Ableitung, welche dem Clausius'schen Gesetz gerade die grösste Bedeutung gibt, überhaupt zulässt, so muss A mit in den Kauf genommen werden. Wir hatten:

$$A = \tfrac{3}{2}\frac{ee'}{c^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \tag{28}$$

Bezeichnet, wie früher, s die Bahnrichtung von ε, und verwenden wir jetzt den Buchstaben ϱ, um den Hauptkrümmungsradius der Bahn s zu bezeichnen, so lässt sich $d^2\sigma/dt^2$ in zwei Componenten zerlegen, welche in leicht verständlicher Bezeichnung sind:

$$(29) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\cdot\frac{ds}{d\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{d\varrho}{d\sigma}.$$

Man beweist nun leicht (durch Ausrechnen) den Satz:

$$(30) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Also:

$$(31) \qquad A = \frac{3}{2c^2}ee'\left[\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right].$$

a) Dieser Ausdruck werde zunächst angewendet auf den Fall, wo e' die Electricität $\pm h'ds'$ eines Elements ds' ist, welches einem Stromkreis angehört. Da die Bewegung von e' in A überhaupt nicht auftritt, ist klar, dass $+h'ds'$ und $-h'ds'$ genau entgegengesetzt gleiche Wirkungen von e erleiden, also: f ü r p o n d e r o m o t o r i s c h e W i r k u n g e n i r g e n d w i e b e w e g t e r E l e c t r i c i t ä t a u f S t r o m e l e m e n t e l i e f e r t d a s G l i e d A d e n B e i t r a g N u l l.

b) Subtrahiren wir dagegen die auf $-h'ds'$ geübte Kraft von der auf $+h'ds'$ geübten, so liefert A dazu den Beitrag:

$$\frac{3}{c^2}eh'ds'\left[\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right],$$

und wenn wir mit $1/2h'.dx'/ds'$ multipliciren, erhalten wir den Antheil der electromotorischen Kraft, welche e in ds' inducirt, und der aus A hervorgeht. Denken wir uns die entsprechenden Ausdrücke in y und z gebildet und addirt, so haben wir die ganze Induction von e auf ds', soweit sie uns hier angeht, d. i.:

$$\frac{3}{2c^2}e\sum\left(\left[\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right]\frac{dx'}{ds'}ds'\right).$$

Durch Ausrechnen findet man mit Berücksichtigung der Formel:

$$\cos(s, s') = -r\frac{d^2 r}{ds\,ds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},$$

dass die Summe gerade gleich:

$$-\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d}{ds'}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{d^2 \varrho}{dt^2}\frac{d}{ds'}\left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)$$

ist, also wird die fragliche Induction:

$$\frac{3e}{2c^2}\left[-\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d}{ds'}\left(\frac{dr}{ds}\right)+\frac{d^2 \varrho}{dt^2}\frac{d}{ds'}\left(\frac{dr}{d\varrho}\right)\right]ds'.$$

Da d^2s/dt^2 und $d^2\varrho/dt^2$ nicht von s' abhängen, verschwindet dieser Ausdruck bei der Integration über jeden geschlossenen Stromkreis. Also liefert A auch zur Induction auf geschlossene Stromkreise den Beitrag Null.

c) e gehöre einem ruhenden Stromelement an, in welchem die positive Electricität $h\,ds$ mit der Geschwindigkeit v, die negative $-h\,ds$ mit der Geschwindigkeit $-v_1$ strömt. Es kann dann an der betrachteten Stelle eine Tangentialbeschleunigung eintreten 1) durch Aenderung der Stromintensität; dieser Bestandtheil des d^2s/dt^2 sei mit $\partial/\partial t(ds/dt)$ bezeichnet; 2) durch Eigenschaften der Strombahn, vermöge deren die Electricität in $s+ds$ bei gleicher Intensität eine andere Geschwindigkeit hat, als in s; dieser Bestandtheil lässt sich mit $ds/dt\,.\,\partial/\partial s\,(ds/dt)$ bezeichnen. $d^2\varrho/dt^2$ ist einfach Centripetalbeschleunigung und als solche gleich $1/\varrho\,.\,(ds/dt)^2$ zu setzen. Gl. (31) wird also:

$$A=\frac{3}{2c^2}ee'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{ds}{dt}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right].$$

Führen wir hierin nun für e die positive Electricität $h\,ds$ eines Stromelements ds ein, so ist $ds/dt=v$, und d/ds bezeichnet eine Differentiation nach der positiven Stromrichtung. Führen wir aber die negative Electricität $-h\,ds$ desselben Stromelements ein, so ist $ds/dt=v_1$, und d/ds bezeichnet eine Differentiation nach der negativen Stromrichrichtung. Wollen wir unter d/ds in beiden Fällen eine Differentiation nach der positiven Richtung verstehen, so ist im zweiten Fall jedes d/ds mit dem Zeichen — zu versehen. Also wird dann:

für $+h\,ds$

$$A=\frac{3e'}{2c^2}h\,ds\left[\frac{\partial v}{\partial t}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+v\frac{\partial v}{\partial s}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{dx}\right)+\frac{v^2}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right],$$

für $-h\,ds$

$$A = -\frac{3e'}{2c^2}\,h\,ds\left[-\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + v_1\frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{v_1^2}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right].$$

Also wird die Gesammtkraft in x, welche ε' erleidet:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \xi = \frac{3e'}{2c^2}\,h\,ds\Bigg[&\frac{\partial(v+v_1)}{\partial t}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial(v^2-v_1^2)}{\partial s}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{v^2-v_1^2}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

d. h. zunächst: Ist $v = v_1$, so ist das Glied A vollkommen bedeutungslos, und Gl. (27) stimmt, auch was die electroskopischen Wirkungen des Stromes angeht, mit dem Clausius'schen Gesetz überein. Denn das erste Glied der Klammer verschwindet, wie leicht zu sehen, für geschlossene Stromkreise.

Dieser Satz wird nicht geändert, wenn man auch annimmt, dass ds einem bewegten Stromkreis angehöre; denn die Beschleunigung, welche die Bewegung von ds in den Ausdruck A bringt, ist offenbar für $h\,ds$ und $-h\,ds$ dieselbe, hebt sich also aus dem Resultat heraus.

Ist aber v_1 nicht gleich v, so ergeben sich allerdings aus dem Glied A besondere electroskopische Wirkungen des ruhenden Stromelements ds, und dieselben verschwinden auch nicht, wenn Gl. (32) auf einen geschlossenen Stromkreis s angewendet wird. Dann tritt also Gl. (27) in einem Punkt in Widerspruch mit dem Clausius'schen Gesetz. Unter den Grundlagen, welche Clausius für sein Gesetz angenommen hat, findet sich nämlich der Satz[1]): „dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter Strom auf ein ruhendes Electricitätstheilchen keine bewegende Kraft ausübt", und dem kann Gl. (32) unter Umständen widersprechen. Ich glaube nicht, dass dieser von Clausius als sicher angenommene Satz in Wirklichkeit durch die Erfahrung sicher gestellt ist. Da v und v_1 wahrscheinlich recht kleine Grössen sind, liefert ξ jedenfalls nur kleine Kräfte, die höchstens von der Ordnung derjenigen Kräfte sind, mit welchen die statische Oberflächenladung der Drähte im Dynamometer sich geltend macht. Bei alle den Ver-

1) Clausius, Beibl. 1. p. 145. 1877.

suchen, auf welche sich die electrodynamischen Grundgesetze stützen, ist nun aber die Einwirkung dieser statischen Oberflächenladungen schlechthin vernachlässigt worden. Erst Herwig[1]) hat gezeigt, dass man eine solche Einwirkung etwa nachweisen kann. Ich selbst habe eine (nicht veröffentlichte) Versuchsreihe über den gleichen Gegenstand wie Herwig angestellt; das Verfahren war erheblich empfindlicher und bequemer als das von Herwig und gab folgendes Resultat: „die Kraft, mit der die statischen Oberflächenladungen durchströmter Drähte im Dynamometer aufeinander wirken, ist, wenn die Dynamometerdrähte, wie üblich, besponnen sind, nicht constant, sondern wächst stundenlang fortwährend, wenn der Strom in allen Punkten derselbe bleibt. Das liegt offenbar daran, dass die freie Electricität der Oberflächenladungen allmählich auf die Seide der Bespinnung, die Holztheile etc., überkriecht." Dies einfache, von vornherein zu erwartende Ergebniss dürfte so ziemlich allen Lesern fremd sein; ich führe es an, um zu zeigen, wie wenig genau die Versuche sind, welche dem oben citirten Clausius'schen Satz zu Grunde liegen; denn bei keinem derselben ist von einer solchen Wahrnehmung die Rede.

Hiernach würde ich es für verfrüht halten, wenn man, um Gl. (27) auf das Clausius'sche Gesetz zu reduciren, die Annahme machen wollte, es sei allgemein $v = v_1$. Da muss erst eine genaue Bearbeitung des Gliedes A und ein Vergleich mit der Erfahrung auf Grund besonders angestellter Experimente vorgenommen werden. Das soll der Zukunft vorbehalten bleiben.

§ 11. **Zusammenstellung des Inhalts der Abhandlung.** Wir machen die Annahmen:

1) Der electrische Punkt ε verbreitet um sich einen Zustand Ω in dem kraftübertragenden Medium. Dieser Zustand pflanzt sich auf Strahlen nach allen Richtungen fort; er ist bestimmt a) durch den mittleren Abstand eines Strahls von seinen nächsten Nachbarn, b) durch die Wirkungsfähigkeit des einzelnen Strahls.

1) Herwig, Pogg. Ann. **149.** p. 44. 1873.

2) Die Strahlen besitzen, wenn ε ruht, die constante Geschwindigkeit c, wenn ε sich bewegt, die Geschwindigkeit $c + + v$.

3) Der electrische Punkt ε' recipirt aus Ω eine Kraftgrösse, welche in erster Linie das Maximalgefälle von Ω enthält.

4) In zweiter Linie ist sie abhängig von der geometrischen Differenz zwischen Geschwindigkeit des Strahls und Geschwindigkeit seiner Elemente; das Correctionsglied ist mit diesem Unterschied und mit dr/dt proportional.

5) In dritter Linie erhält jeder Strahl von Ω durch die Bewegung von ε einen motorischen Zusatz, der, wenn pqr drei aufeinander senkrechte Richtungen, und ijk die zu diesen Richtungen gehörigen Hamilton'schen Einheitsvectoren sind, proportional mit $(dp/dt)i + (dq/dt)j + (dr/dt)k$ ist. dp/dt etc. sind hier die drei Componenten von v.

6) Dem entsprechend erhält auch die Receptionsconstante von ε' einen analog gebildeten motorischen Zusatz.

7) Dagegen ist die Aussendung, Fortpflanzung und Aufnahme von Ω ganz unabhängig von den Beschleunigungen.

Diese Annahmen sind, mit Ausnahme der vierten, rein nach dem Grundsatz aufgestellt, dass die denkbaren Einflüsse der Bewegung so einfach wie möglich formulirt werden sollen; dagegen ist Annahme (4) etwas willkürlich nach dem Bedürfniss, ein erfahrungsmässig brauchbares Gesetz zu produciren, eingerichtet.

Aus den obigen Annahmen folgt ein Gesetz,

welches für alle Wirkungen auf geschlossene Ströme vollständig mit dem Clausius'schen übereinstimmt;

welches mit dem Clausius'schen Gesetz identisch wird, wenn man annimmt, dass die positive Electricität im galvanischen Strom dieselbe absolute Geschwindigkeit besitzt, wie die negative;

welches, wenn diese Annahme nicht gemacht wird, electroskopische Nebenwirkungen geschlossener Ströme liefern kann, die erst noch einer besonderen Untersuchung bedürfen.

Dabei ist auf das bestimmteste nachgewiesen, dass nur dies Gesetz die einfache Annahme (7) gestattet. Die Annahmen (1) bis (7) haben einstweilen nur, insofern sie die Fortpflanzungsform angeben, einen vorstellbaren Sinn; Emission und Reception sind nicht construirt, sondern blos hypothetisch formulirt; es bleibt die Aufgabe, diese Formulirung physikalisch zu deuten.

V. *Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielectrisch polarisirt wird; von G. Kirchhoff.*

(Aus den Sitzungsberichten der k. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin vom 11. Dec. 1884; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Ich erlaube mir, der Academie einige Anwendungen der Theorie der Formänderung vorzulegen, welch ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielectrisch polarisirt wird. Ich will anknüpfen an die Darstellung dieser Theorie, die ich in den Sitzungsberichten vom 28. Februar 1884[1]) gegeben habe, und die dort gebrauchten Bezeichnungen benutzen. Der betrachtete Körper ist dort als ein fester, elastischer vorausgesetzt; man braucht in den dort abgeleiteten Formeln aber nur die mit k'' bezeichnete Constante $= 0$ zu setzen, um sie auf den Fall anwendbar zu machen, dass der Körper eine Flüssigkeit, eine tropfbare oder gasförmige ist, wodurch man diejenigen Formeln erhält, die für diesen Fall Herr v. Helmholtz in einer Mittheilung an die Academie am 17. Februar 1881 abgleitet hat, und die wiederum in die früher schon von Sir W. Thomson und Cl. Maxwell aufgestellten übergehen, wenn die Constante $k' = 0$ gesetzt wird, was erlaubt ist, wenn die Flüssigkeit als incompressibel betrachtet werden darf, da dann ihre Gleichgewichtsfigur von dem Werthe von k' unabhängig ist. Auf diesen einfachsten Fall kommen die Versuche zurück, deren Beschreibung Hr.

---

1) s. auch Wied. Ann. 24. p. 52. 1885.

Quincke[1]) am 5. April 1883 und am 17. Januar 1884 der Academie vorgelegt, und durch die er die Dielectricitätsconstante und die von ihm sogenannte Diamagnetisirungsconstante für eine grosse Zahl von Flüssigkeiten bestimmt hat. Es sollen die nächsten Betrachtungen sich auf eine Anordnung beziehen, wie sie bei diesen Quincke'schen Versuchen stattfand.

1. Man denke sich ein magnetisches Feld, das durch einen electrischen Strom hervorgerufen ist, der nach Willkür erzeugt und unterbrochen werden kann. Bei den Quincke'schen Versuchen war dasselbe mit Hülfe eines kräftigen Electromagnets hergestellt, dessen ebene Polflächen in einem Abstande von einigen Millimetern voneinander sich befanden. In dem grössten Theile des Raumes zwischen den Polflächen war die magnetische Kraft nahezu constant, in der Nähe ihrer Ränder nahm sie schnell ab und war nahezu $=0$ in mässiger Entfernung von diesen Rändern ausserhalb jenes Raumes. In einem solchen magnetischen Felde seien verschiedene Körper, die einander berühren, theils feste, theils flüssige, vorhanden; die festen sollen als starr, die flüssigen als incompressibel angesehen werden, sowohl wenn sie tropfbar, als wenn sie gasförmig sind; die Aenderungen der Dichtigkeit sollen also vernachlässigt werden, ausser insofern, als sie Aenderungen des Druckes bedingen. Es handelt sich darum, die Bedingungen für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten zu bilden; als wirksam sollen dabei neben den magnetischen Kräften die Schwere und die Capillarkräfte angenommen werden. Der Index 1 beziehe sich auf eine der Flüssigkeiten, p_1 sei der Druck in einem Punkte derselben, der Druck, der abhängig ist von der in unendlich kleinen Grenzen variirenden Dichtigkeit, φ das magnetische Gesammtpotential, μ_1 die Dichtigkeit, g die Intensität der Schwere, und die Richtung der x-Axe sei die der Schwere. Aus dem p. 148 meiner citirten Abhandlung für die Kraft A aufgestellten Ausdrucke folgt dann:

$$(1) \qquad p_1 = \mu_1 g x + \frac{k_1'}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) + c_1,$$

1) Quincke, Wied. Ann. **19.** p. 705; **24.** p. 347.

wo c_1 eine Constante bezeichnet. Eine ähnliche Gleichung gilt für jede der vorhandenen Flüssigkeiten.

Für die Berührungsfläche zweier Flüssigkeiten, 1 und 2, hat die Differenz $p_1 - p_2$ einen von Null verschiedenen Werth. Derselbe rührt zum Theil von den Capillarkräften, zum Theil von den magnetischen her. Es seien r' und r'' die Hauptkrümmungsradien eines Elements der Berührungsfläche, positiv gerechnet, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit 1 eine convexe ist, n die nach dem Inneren der ersten Flüssigkeit gerichtete Normale des Elements, H eine von der Natur der beiden Flüssigkeiten abhängige Constante; dann ist:

$$(2)\quad \begin{cases} p_1 - p_2 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)^2 \\ \qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_1 - k_1'\right)\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_2 - k_2'\right)\left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)^2\right). \end{cases}$$

Man findet diese Gleichung aus den l. c. p. 147 für $A_x, A_y, \ldots$ aufgestellten Ausdrücken, wenn man eine der Coordinatenaxen mit der Normale n zusammenfallen lässt und benutzt, dass für die Berührungsfläche:

$$(3)\quad \begin{gathered} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{gathered}$$

ist. Subtrahirt man in die Gleichung (2) für p_1 den in (1) angegebenen Ausdruck, für p_2 den entsprechenden und eliminirt mit Hülfe von (3) φ_2, so erhält man:

$$(4)\quad \begin{cases} c_1 - c_2 = (\mu_2 - \mu_1)\, g x + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) \\ - \frac{2\pi (k_2 - k_1)^2}{1 + 4\pi k_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \end{cases}$$

Stossen drei verschiedenartige Körper in einer Linie zusammen, so wirken auf die Theile dieser Linie noch besondere, von der Capillarität herrührende Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht sein müssen. Fällt die Grenzlinie der Berührungsfläche zweier Flüssigkeiten in die Ober-

fläche eines festen Körpers, die hier keine scharfe Kante darbietet, so ist die Bedingung für dieses Gleichgewicht die, dass die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten die Oberfläche des festen Körpers unter einem bestimmten Winkel schneidet. Dieser Winkel muss derselbe sein, mögen magnetische Kräfte wirken oder nicht wirken.

2. Es kann der Fall stattfinden, dass das Gleichgewicht beim Eintritt der magnetischen Kräfte dadurch erhalten wird, dass man den Druck in geeigneter Weise verändert, ohne dass irgendwo die geometrischen Verhältnisse geändert werden. Sind nur zwei Flüssigkeiten, 1 und 2, vorhanden, und sind δc_1 und δc_2 die Vergrösserungen, welche die Constanten c_1 und c_2 erfahren, wenn die magnetischen Kräfte in Wirksamkeit treten und das Gleichgewicht erhalten wird, so muss nach (4) die Berührungsfläche:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta c_1 - \delta c_2 = -\frac{2\pi(k_2-k_1)^2}{1+4\pi k_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 \\ &+\frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) \end{aligned}\right. \quad \text{sein.}$$

Es werde nun angenommen, dass k_1 und k_2 als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Diese Voraussetzung ist bei den von Hrn. Quincke untersuchten Flüssigkeiten erfüllt. Diejenige von ihnen, bei der k seinen grössten Werth hatte, war eine wässerige Lösung von Eisenchlorid von der Dichtigkeit 1,51, und für diese fand er[1]):

$$k = 65 \,.\, 10^{-6},$$

wenn für atmosphärische Luft diese Grösse gleich Null gesetzt wird. Ausser den beiden Flüssigkeiten 1 und 2 mögen in dem magnetischen Felde noch feste polarisirbare Körper vorhanden sein, für welche die Constante k ebenfalls unendlich kleine Werthe besitzt. Die Gleichung (5) vereinfacht sich dann zunächst dadurch, dass das erste Glied ihrer rechten Seite gegen das zweite vernachlässigt werden kann.

1) Hr. Quincke hat aus seinen Messungen eine Grösse berechnet, die er $\mathfrak{k}$ genannt hat, und die mit dem hier eingeführten k in der Relation steht: $k = \mathfrak{k} \,.\, 2g$.

Ferner darf für φ_1 der Werth gesetzt werden, den das Potential haben würde, wenn überall in dem magnetischen Felde $k = 0$ wäre, oder wenn (was gleichbedeutend hiermit sein soll) atmosphärische Luft das ganze magnetische Feld erfüllte. Bezeichnet man durch φ diesen Werth, so wird die genannte Gleichung also:

$$\delta c_1 - \delta c_2 = \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Damit diese, für die Berührungsfläche von 1 und 2 geltende Bedingung erfüllt werden kann, muss die magnetische Kraft für diese Fläche eine constante Grösse haben.

Die Flüssigkeit 1 sowohl als die Flüssigkeit 2 soll bis zu Orten reichen, in denen die magnetischen Kräfte, wenn sie erregt sind, eine verschwindend kleine Intensität besitzen; der Gleichung (1) zufolge sind dann δc_1 und δc_2 die Vergrösserungen, die der Druck hier erfährt, wenn die magnetischen Kräfte in Thätigkeit gesetzt werden und das Gleichgewicht erhalten wird. Endlich möge die Anordnung getroffen sein, dass die Druckänderung $\delta c_2 = 0$ ist; die Druckvermehrung δc_1 ist dann:

$$(6) \qquad = \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Nach dieser Formel hat Hr. Quincke seine Versuche berechnet. Die Voraussetzungen, die derselben zu Grunde liegen, waren bei ihnen in zwei verschiedenen Weisen verwirklicht. Bei der einen Methode diente eine gläserne, U-förmige Röhre, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit theilweise gefüllt war, und deren einer Schenkel zwischen den Polflächen des Electromagnets, deren anderer ausserhalb derselben sich befand. Die zu untersuchende Flüssigkeit ist hier als die Flüssigkeit 1, die atmosphärische Luft als die Flüssigkeit 2 zu rechnen. Bei der anderen Methode erfüllte die zu untersuchende Flüssigkeit den grössten Theil des Raumes zwischen den horizontal gestellten Polflächen, während den Rest eine flache Luftblase einnahm, die beide Polflächen berührte und mit einem aussen befindlichen Ma-

nometer communicirte. Hier ist die zu untersuchende Flüssigkeit die Flüssigkeit 2, und die atmosphärische Luft die Flüssigkeit 1.

3. Die hier angestellten theoretischen Betrachtungen gelten auch, wenn statt der magnetischen Kräfte electrische thätig sind, und Hr. Quincke hat auch die Dielectricitäts-constanten verschiedener isolirender Flüssigkeiten durch Versuche bestimmt, die den zuletzt erwähnten magnetischen Versuchen ganz ähnlich sind. Zwischen zwei horizontale Condensatorplatten, die in einem mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Gefässe aufgestellt waren, hatte er eine flache Luftblase gebracht, die beide Platten berührte und durch eine in der oberen mündende Röhre mit einem Manometer communicirte, das ausserhalb des Gefässes sich befand. Wurde der Condensator geladen, so zeigte das Manometer eine Vermehrung des Druckes an. Auch für diese gilt der Ausdruck (6), obwohl hier die Grössen k_1 und k_2 nicht als unendlich klein zu betrachten sind, wenn nur die Dicke der Luftblase (also der Abstand der Condensatorplatten) unendlich klein ist gegen ihre horizontalen Dimensionen.

Es seien $x = 0$ und $x = a$ die Gleichungen der inneren Oberflächen der beiden Condensatorplatten, $\varphi = 0$ und $\varphi = P$ die Werthe des Potentials in diesen, wenn sie geladen sind. Alle in Betracht kommenden Grenzflächen heterogener Körper sollen Rotationsflächen sein, deren gemeinsame Axe die x-Axe ist. Welche Function φ von x, y, z in der Nähe des Randes der Luftblase ist, lässt sich mit den jetzigen Hülfsmitteln der Analysis allgemein nicht finden, aber man weiss Folgendes: Es ist φ überall eine Function von x und $\sqrt{y^2+z^2}$; für $x = 0$ und $x = a$ verschwinden an den Oberflächen der Condensatorplatten $\partial\varphi/\partial y$ und $\partial\varphi/\partial z$, und in einer Entfernung vom Rande der Blase, die gross genug gegen a ist, ist sowohl in ihr, als in der umgebenden Flüssigkeit:

$$\varphi = P\frac{x}{a}. \tag{7}$$

Nun fasse man einen unendlich kleinen Raum ins Auge, der begrenzt ist

durch die Ebenen $x = 0$ und $x = \alpha$,

einen Theil der xy-Ebene, in dem y positiv ist,

eine Ebene, die durch die x-Axe gelegt ist, mit der xy-Ebene den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet und zwischen den positiven Theilen der y-Axe und der z-Axe sich befindet,

und endlich zwei Cylinderflächen, die um die x-Axe mit den Radien β_1 und β_2 beschrieben sind.

Diese Radien sollen so gewählt sein, dass die erste Cylinderfläche in der Luft, die zweite in der äusseren Flüssigkeit in der Region sich befindet, in der der in (7) für φ angegebene Ausdruck gilt. Es muss dann $\beta_2 - \beta_1$ unendlich gross gegen α sein; dabei soll aber diese Differenz noch unendlich klein gegen die Werthe sein, die β_1 und β_2 selbst besitzen.

Es soll ausgedrückt werden, dass die Summe der y-Componenten der Kräfte verschwindet, welche auf die in dem bezeichneten Raume vorhandene Masse ausgeübt werden. Dabei sollen die electrischen Kräfte, welche hier wirksam sind, ersetzt werden durch die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte, durch die sie ersetzt werden können, und deren Componenten durch $A_x, B_x, \ldots$ bezeichnet werden mögen.

Für die Ebenen $x = 0$ und $x = \alpha$ ist $\partial\varphi / \partial y = 0$, und, da allgemein:

$$B_x = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ist, so tragen die Theile dieser Ebenen, welche zur Oberfläche des gedachten Raumes gehören, zu der gesuchten Summe nichts bei.

Was zu dieser Summe die Cylinderflächen, deren Radius β_1 und β_2 genannt sind, hinzubringen, ist, wenn man nur die Grössen der höchsten Ordnung berücksichtigt, den Index 1 auf die Luft und den Index 2 auf die umgebende Flüssigkeit bezieht:

$$(8) \qquad = \alpha \beta_1 \vartheta \frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2} \frac{P^2}{\alpha^2}.$$

Der Theil der xy-Ebene, der zur Begrenzung des gedachten Raumes gehört, trägt auch nichts zu der zu bildenden Summe bei, da allgemein:

$$B_z = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

und hier $\partial\varphi/\partial z = 0$ ist.

Die letzte Begrenzungsfläche des betreffenden Raumes hat die Grösse: $\alpha(\beta_2 - \beta_1)$,
und die y-Componente des auf die Einheit ihrer Fläche bezogenen Druckes ist $= C_z \vartheta$,
wo C_z unter der Annahme $z = 0$ zu berechnen ist. Dieses C_z ist von der Ordnung von P^2/α^2, und daher ist auch der Beitrag, den diese Fläche zu der in Rede stehenden Summe liefert, unendlich klein gegen das in (8) angegebene Glied.

Daher ist die Gleichgewichtsbedingung, welche gebildet werden sollte:

$$0 = \alpha\beta_1\vartheta\frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2}\frac{P^2}{\alpha^2} + \beta_1\vartheta\int_0^\alpha (p_1 - p_2)\,dx.$$

Drückt man hier p_1 und p_2 mit Hülfe von (1) aus, zieht von der dann entstehenden Gleichung diejenige ab, in die sie sich verwandelt, wenn man annimmt, dass die electrischen Kräfte ausser Thätigkeit gesetzt sind, gibt den Zeichen δc_1 und δc_2 die entsprechende Bedeutung, wie bei der Discussion der magnetischen Versuche des Hrn. Quincke, und setzt auch hier $\delta c_2 = 0$, so erhält man für δc_1:

$$\frac{k_2 - k_1}{2}\frac{P^2}{\alpha^2},$$

einen Ausdruck, für den auch der Ausdruck (6) geschrieben werden kann.

4. Hr. Quincke brachte zwischen seine, durch eine isolirende Flüssigkeit getrennten Condensatorplatten eine Luftblase, die nur die obere Platte berührte; wurde der Condensator geladen, so verlängerte sich die Blase in der Richtung der Kraftlinien und zog sich zusammen in den auf diesen senkrechten Richtungen. Zwischen den Polflächen seines Electromagnets zeigte unter entsprechenden Verhältnissen eine Luftblase diese Erscheinung nicht und auch ein hängen- Tropfen verschiedener magnetischer Flüssigkeiten erlitt keine

Formänderung, wenn der Magnetismus erregt wurde. Eine Anordnung, die ähnlich der eben erwähnten ist und keine Schwierigkeit der Rechnung darbietet, soll hier theoretisch verfolgt werden.

Der Raum, soweit er in Betracht kommt, sei von zwei Flüssigkeiten, 1 und 2, erfüllt, die, wenn die electrischen oder magnetischen Kräfte nicht wirken, durch eine Kugelfläche vom Radius R getrennt sind. Damit das der Fall sein kann, muss die Schwere unwirksam sein. Sind die electrischen oder magnetischen Kräfte erregt, so sollen sie ein Potential erzeugen, dass in der äusseren Flüssigkeit, der Flüssigkeit 2, in grosser Entfernung von der Flüssigkeit 1 der Gleichung:

$$\varphi_2 = -a_2 x \tag{9}$$

genügt, wo a_2 eine Constante ist. Es soll die Gestalt bestimmt werden, die dabei die Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten annimmt. Für dieselbe ergibt sich aus der Gleichung (4) die Bedingung:

$$\left\{\begin{aligned} \delta c_1 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}-\frac{2}{R}\right) - \frac{2\pi(k_2-k_1)^2}{1+4\pi k_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 \\ + \frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Es hat die Flüssigkeit 1 einen Mittelpunkt; in diesen lege man den Anfangspunkt der Coordinaten. Die gesuchte Fläche ist dann eine Rotationsfläche, deren Axe die x-Axe ist, und für ihren Schnitt mit der xy-Ebene ist daher:

$$\pm\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right) = \frac{1}{y}\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \frac{1}{dy}\,d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Setzt man:

$$x = \varrho\cos\vartheta \qquad y = \varrho\sin\vartheta,$$

nimmt ϑ als unabhängige Variable an und macht:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \varrho', \qquad \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = \varrho'',$$

so wird diese Gleichung:

$$\pm\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right) = \frac{\varrho'\cos\vartheta - \varrho\sin\vartheta}{\varrho\sin\vartheta\sqrt{\varrho'^2+\varrho^2}} + \frac{\varrho''\varrho - 2\varrho'^2 - \varrho^2}{(\varrho'^2+\varrho^2)^{3/2}}.$$

Man setze ferner:

$$\varrho = R(1+u)$$

und nehme u als unendlich klein an. Man erhält dann, indem man die Zweideutigkeit des Vorzeichens durch die Erwägung hebt, dass, wenn u verschwindet, $r' = r'' = R$ wird:

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{du}{d\vartheta} + 2u\right) \text{ oder:} \\ \qquad = -\frac{1}{R}\left((1-\mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + 2u\right), \end{cases}$$

wenn: $\mu = \cos\vartheta$.

Die Functionen φ_1 und φ_2 sind aus der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, der sie genügen müssen, der Bedingung (9) und den Bedingungen (3) zu bestimmen. Die letzten sind, da u als unendlich klein angenommen ist, zu erfüllen für $\varrho = R$. Daraus folgt:

$$\varphi_1 = -a_1\varrho\mu, \qquad \varphi_2 = -\left(a_2\varrho + \frac{b_2 R^3}{\varrho^2}\right)\mu,$$

wo:

$$a_1 = \frac{3(1 + 4\pi k_2)}{3 + 4\pi(k_1 + 2k_2)}a_2, \qquad b_2 = \frac{4\pi(k_2 - k_1)}{3 + 4\pi(k_1 + 2k_2)}a_2,$$

und: $$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 = a_1^2\mu^2, \quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 = a_1^2.$$

Substituirt man diese Werthe, sowie den Ausdruck (11) in die Gleichung (10), so erhält man:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + 2u = A - B\mu^2,$$

wo: $$A = -\frac{2R}{H}\left(\delta c_1 + \frac{k_1 - k_2}{2}a_1^2\right),$$

$$B = \frac{R}{H}\frac{4\pi(k_1 - k_2)^2}{1 + 4\pi k_2}a_1^2.$$

Wären A und $B = 0$, so wäre diese Gleichung die Differentialgleichung für die Kugelfunctionen erster Ordnung von einem Argument. Ein particuläres Integral der gefundenen Gleichung ist:

$$u = \frac{A}{2} - \frac{B}{4}(1 - \mu^2);$$

das allgemeine erhält man, wenn man die Ausdrücke:

$$\mu \text{ und } \tfrac{1}{2}\mu\log\frac{1+\mu}{1-\mu} - 1,$$

mit willkürlichen Constanten multiplicirt, hinzufügt. Diese Constanten sind hier aber gleich Null zu setzen, da u für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ endlich bleiben und denselben Werth annehmen muss, denselben Werth, da der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Flüssigkeit 1 gelegt ist. Die Annahme, dass dieselbe incompressibel sei, gibt eine Relation zwischen den Constanten A und B; in der That folgt aus ihr:

$$\int_{-1}^{+1} u\,d\mu = 0, \quad \text{d. h.} \quad A = \tfrac{1}{3}B,$$

sodass sich ergibt: $$u = \frac{B}{4}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Hiernach erleidet die Flüssigkeit 1 in der Richtung der Kraftlinien eine Dilatation, die:

$$= \frac{B}{6} \text{ d. h. } = \frac{R}{3H}\,\frac{2\pi(k_1 - k_2)^2}{1 + 4\pi k_2}\,a_1^2,$$

in jeder darauf senkrechten Richtung eine Contraction, die halb so gross ist. Die Dilatationen und Contractionen, die stattfinden, sind mit dem Quadrate der Differenz $k_1 - k_2$ proportional; darauf beruht es, dass sie im electrischen Felde, wo diese Differenz einen erheblichen Werth hat, sich zeigen, während sie im magnetischen Felde, wo dieselbe ungemein klein ist, sich der Beobachtung entziehen.

5. Es soll schliesslich die Formänderung berechnet werden, die eine Kugel von Eisen erfährt, wenn sie durch eine constante magnetische Kraft magnetisirt wird.

Diesem Falle entspricht es, dass in grosser Entfernung von der Kugel: $$\varphi = -Jx$$
ist; J ist dann die Intensität der magnetisirenden Kraft, die Richtung der x-Axe ihre Richtung. Für die umgebende Luft werde $k = 0$ gesetzt und das Zeichen k auf das Eisen bezogen, dann ist im Inneren der Kugel:

$$\varphi = -\frac{J}{1 + \frac{4\pi}{3}k}\,x.$$

Daraus folgt, dass die in meiner citirten Abhandlung[1])

1) G. Kirchhoff, Sitzungsber. d. Berl. Acad. v. 28. Febr. 1884. p. 148.

mit A, B, C bezeichneten Kräfte verschwinden, und die mit $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ bezeichneten Druckkräfte, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Kugel legt und ihren Radius mit R bezeichnet, diese Werthe annehmen:

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{A} = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^3 + \dfrac{k-k'-k''}{2} R^2 x\right), \\ \overline{B} = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^2 y + \dfrac{k-k'}{2} R^2 y\right), \\ \overline{C} = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^2 z + \dfrac{k-k'}{2} R^2 z\right). \end{cases}$$

Nennt man u, v, w die Componenten der Verrückung, welche infolge der Magnetisirung der materielle Punkt der Kugel erfährt, welcher vorher die Coordinaten x, y, z hatte, und setzt:

$$(13)\quad \begin{cases} X_x = -2K\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \Theta\sigma\right), & Y_z = Z_y = -K\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ Y_y = -2K\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \Theta\sigma\right), & Z_x = X_z = -K\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Z_z = -2K\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} + \Theta\sigma\right), & X_y = Y_x = -K\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

so hat man infolge davon, dass die Kräfte A, B, C gleich Null sind:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

und für $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist:

$$(15)\quad \begin{cases} R\overline{A} = -(xX_x + yX_y + zX_z), \\ R\overline{B} = -(xY_x + yY_y + zY_z), \\ R\overline{C} = -(xZ_x + yZ_y + zZ_z). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (12), (13), (14), (15) sind u, v, w zu berechnen. Ihre Ausdrücke lassen sich, wie die in (12) angegebenen Ausdrücke von $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ aus je drei Theilen zusammensetzen, von denen der erste den Factor $2\pi k^2$, der zweite den Factor $(k-k')/2$, der dritte den Factor $-k''/2$ enthält; man kann daher setzen:

$$(16)\quad \begin{cases} u = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 u_1 + \dfrac{k-k'}{2}u_2 - \dfrac{k''}{2}u_3\right), \\ v = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 v_1 + \dfrac{k-k'}{2}v_2 - \dfrac{k''}{2}v_3\right), \\ w = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 w_1 + \dfrac{k-k'}{2}w_2 - \dfrac{k''}{2}w_3\right). \end{cases}$$

u_1, v_1, w_1 oder u_2, v_2, w_2 oder u_3, v_3, w_3 müssen dann den Gleichungen genügen, die aus den für u, v, w aufgestellten entstehen, wenn man (12) ersetzt durch:

$$(17)\qquad \overline{A} = \frac{x^3}{R^3},\qquad \overline{B} = \frac{x^2 y}{R^3},\qquad \overline{C} = \frac{x^2 z}{R^3},$$

oder durch:

$$(18)\qquad \overline{A} = \frac{x}{R},\qquad \overline{B} = \frac{y}{R},\qquad \overline{C} = \frac{z}{R},$$

oder durch:

$$(19)\qquad \overline{A} = \frac{x}{R},\qquad \overline{B} = 0,\qquad \overline{C} = 0.$$

Den für u_1, v_1, w_1 geltenden Bedingungen kann man durch die Annahme:

$$(20)\quad \begin{cases} u_1 = a_1\, x^3 + b_1\,(y^2+z^2)x + c_1\, R^2 x \\ v_1 = a_1'\, x^2 y + b_1'(y^2+z^2)y + c_1'\, R^2 y \\ w_1 = a_1'\, x^2 z + b_1'(y^2+z^2)z + c_1'\, R^2 z \end{cases}$$

genügen, wenn man die sechs Constanten a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1' passend bestimmt. Bei dieser Annahme geben die Gleichungen (13):

$$\begin{aligned} \sigma &= (3a_1 + 2a_1')x^2 + (b_1 + 4b_1')(y^2+z^2) + (c_1 + 2c_1')R^2, \\ X_x &= -2K\left(3a_1 x^2 + b_1(y^2+z^2) + c_1 R^2 + \Theta\sigma\right) \\ Y_y &= -2K\left(a_1' x^2 + b_1'(3y^2+z^2) + c_1' R^2 + \Theta\sigma\right) \\ Z_z &= -2K\left(a_1' x^2 + b_1'(y^2+3z^2) + c_1' R^2 + \Theta\sigma\right) \end{aligned}$$

$$Y_z = Z_y = -4Kb_1'yz$$
$$Z_x = X_z = -2K(a_1' + b_1)zx$$
$$X_y = Y_x = -2K(a_1' + b_1)xy.$$

Hiernach reduciren sich die Gleichungen (14) auf beiden Relationen zwischen den eingeführten Constanten

$$0 = 3a_1 + a_1' + b_1 + \Theta(3a_1 + 2a_1')$$
$$0 = a_1' + b_1 + 8b_1' + 2\Theta(b_1 + 4b_1').$$

Die Gleichungen (15) ergeben bei Rücksicht auf (wenn man $x^2 + y^2 + z^2$ für R^2 in den Ausdrücken X_x, Y_y, Z_z setzt:

$$\frac{1}{2KR^2} = 3a_1 + c_1 + \Theta(3a_1 + 2a_1' + c_1 + 2c_1')$$
$$0 = a_1' + 2b_1 + c_1 + \Theta(b_1 + 4b_1' + c_1 + 2c_1')$$
$$\frac{1}{2KR^2} = 2a_1' + b_1 + c_1' + \Theta(3a_1 + 2a_1' + c_1 + 2c_1')$$
$$0 = 3b_1' + c_1' + \Theta(b_1 + 4b_1' + c_1 + c_1').$$

So hat man sechs Gleichungen für die sechs Unbekanten a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1'; ihre Auflösung gibt:

$$(21) \begin{cases} b_1 = (7 + 8\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}, \quad a_1' = -(7 + 6\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}, \quad b_1' = -2\Theta \\ c_1 = -\frac{7 + 31\Theta + 32\Theta^2}{1 + 3\Theta}\frac{a_1}{4\Theta}, \quad c_1' = \frac{6\Theta + 16\Theta^2}{1 + 3\Theta}\frac{a_1}{4\Theta} \end{cases}$$

und:
$$\frac{1}{2KR^2} = -(7 + 19\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}.$$

Man kann ferner:

$$(22) \qquad u_2 = a_2 x, \quad v_2 = a_2 y, \quad w_2 = a_2 z$$

setzen, woraus nach (13) folgt:

$$\sigma = 3a_2$$
$$X_x = Y_y = Z_z = -2K(1 + 3\Theta)a_2$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0;$$

dabei werden die Gleichungen (14) erfüllt, und die Gl chungen (15) geben mit Hülfe von (18):

$$(23) \qquad a_2 = \frac{1}{2K(1 + 3\Theta)}.$$

Endlich mache man:

$$(24) \qquad u_3 = a_3 x, \quad v_3 = b_3 y, \quad w_3 = b_3 z;$$

dabei wird:
$$\sigma = a_3 + 2b_3$$
$$X_x = -2K\big(a_3 + \Theta(a_3 + 2b_3)\big), \quad Y_y = Z_z - 2K\big(b_3 + \Theta(a_3 + 2$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Auch hier werden die Gleichungen (14) von selbst er-
llt, und die Gleichungen (15) geben bei Rücksicht auf (19):

5) $$a_3 = \frac{1 + 2\Theta}{2K(1 + 3\Theta)}, \quad b_3 = -\frac{\Theta}{2K(1 + 3\Theta)}.$$

Substituirt man in die Gleichungen (16) die in (20), (21),
2), (23), (24), (25) gegebenen Ausdrücke, so hat man die
ösung der vorgelegten Aufgabe.

Um die Werthe der Verrückungen u, v, w numerisch
rechnen zu können, muss man zunächst die Grösse k
nnen. Es ist dieselbe in der hier zu Grunde gelegten
heorie als eine Constante vorausgesetzt, man weiss aber,
ss sie thatsächlich in hohem Grade veränderlich ist; man
hliesst sich, bei beliebiger Gestalt des Eisenkörpers und
liebig gegebenen magnetisirenden Kräften, näher an die
irklichkeit an, wenn man k als eine durch Beobachtungen
bestimmende Function von:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

nimmt. Bezeichnet man dieses Argument durch $\mathfrak{R}$ und
mmt als Einheit dafür:

$$\frac{g^{1/2}}{cm^{1/2}\,.\,sec}$$

, eine Einheit, die zehnmal so gross ist, als die von
auss für magnetische Kräfte eingeführte, so ergeben die
n Hrn. Stoletow[1]) ausgeführten Messungen, dass k von
,5 bis 174 zunimmt, wenn $\mathfrak{R}$ von 0,43 bis 3,2 wächst und
s 42,1 sinkt, wenn $\mathfrak{R}$ weiter bis 31 vergrössert wird. Für
ne Eisenkugel, die unter dem Einfluss einer constanten
agnetisirenden Kraft J steht, gelten die unter der An-
hme, dass k eine Constante ist, abgeleiteten Formeln auch
i Rücksicht auf die Veränderlichkeit dieser Grösse, nur
t der Werth derselben verschieden zu setzen je nach dem
erthe von J; er ist zu bestimmen aus der Beziehung
ischen k und $\mathfrak{R}$ und der Gleichung:

$$\mathfrak{R} = \frac{J}{1 + \frac{4\pi}{3}k}.$$

1) Stoletow, Pogg. Ann. **146**. p. 461. 1872.

Es wäre:

$$k = 21{,}4 \text{ oder } = 175 \text{ oder } 42{,}1$$
$$\text{für } J = 39{,}1 \text{ oder } = 2340 \text{ oder } 5450.$$

Ueber die Werthe von k' und k'' hat man gar kei
Erfahrung. Setzt man aber voraus, dass sie nicht gr
gegen k sind, und nimmt an, dass die Kraft J zwischen d
kleinsten und dem grössten der eben angeführten Wert
liegt, so braucht man bei der Berechnung der für die V
rückungen u, v, w in (16) gegebenen Ausdrücke k' und
und auch k, nicht genauer zu kennen; man kann dann k
unendlich gross betrachten und schreiben:

$$(26) \qquad u = \frac{9}{8\pi} J^2 u_1, \quad v = \frac{9}{8\pi} J^2 v_1, \quad w = \frac{9}{8\pi} J^2 w_1.$$

Ist E der Elasticitätscoëfficient des Eisens, so ist:

$$E = 2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta},$$

und setzt man mit Poisson:

$$\Theta = \tfrac{1}{2},$$

so geben daher die Gleichungen (21):

$$a_1 = -\frac{5}{33}\frac{1}{ER^2}, \quad b_1 = -\frac{5}{6}\frac{1}{ER^2}, \quad c_1 = \frac{61}{66}\frac{1}{ER^2}$$
$$a_1' = \frac{25}{33}\frac{1}{ER^2}, \quad b_1' = \frac{5}{66}\frac{1}{ER^2}, \quad c_1' = -\frac{7}{33}\frac{1}{ER^2}.$$

Aus (20) und (26) folgt hiernach:

$$u = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(-10x^3 - 55(y^2+z^2)x + 61R^2x\right),$$
$$v = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(50x^2y + 5(y^2+z^2)y - 14R^2y\right),$$
$$w = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(50x^2z + 5(y^2+z^2)z - 14R^2z\right).$$

Für die räumliche Dilatation σ ergibt sich dabei:

$$\sigma = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(70x^2 - 35(y^2+z^2) - 33R^2\right).$$

Ein Radius der Kugel, der die Richtung der magn
tisirenden Kraft hat, erleidet die Verlängerung:

$$\frac{153}{176\pi}\frac{J^2}{E}R,$$

ein Radius, der senkrecht zu dieser Kraft ist, die Verkürzung:

$$\frac{27}{176\pi}\frac{J^2}{E}R.$$

Ein magnetisches Feld, wie es hier vorausgesetzt ist, kann mit Hülfe eines electrischen Stromes hervorgebracht werden, der eine Spirale durchfliesst, welche die Eisenkugel umgibt und so lang ist, dass die magnetische Kraft des Stromes in dem Raume, den die Kugel einnimmt, als constant betrachtet werden kann. Ist n die Zahl der Windungen, die auf ein Centimeter in der Richtung der Länge der Spirale kommen, und i die Intensität des Stromes in Ampères ausgedrückt, so ist dann:

$$J = \frac{4\pi}{10} n\, i \,\frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2} . \mathrm{sec}};$$

setzt man für den Elasticitätscoëfficienten des Eisens:

$$E = 1{,}88 . 10^{12} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm} . \mathrm{sec}^2},$$

so ergibt sich die Verlängerung eines Radius der Kugel, der der Axe der Spirale parallel ist:

$$= n^2 i^2 . 2{,}32 . 10^{-13} . R.$$

Schon im Jahre 1847 hat Joule[1]) die Verlängerungen gemessen, die Eisenstäbe erfahren, wenn sie in einer Spirale magnetisirt werden, Verlängerungen, welche im Maximum 1,4 Milliontel der Länge betrugen. Aehnliche Messungen bei einer Kugel auszuführen, würde wegen der Kleinheit der Formänderungen kaum möglich sein.

---

1) Joule, Phil. Mag. **30**. p. 76, 225. 1847.

VI. *Bestimmung einiger Reibungscoëfficienten und Versuche über den Einfluss der Magnetisirung und Electrisirung auf die Reibung der Flüssigkeiten; von Walter König.*

Es dürfte von Interesse sein, einige Reibungscoëfficienten mitzutheilen, welche ich in dem hiesigen physikalischen Institute gelegentlich bestimmt habe. Die Messungen wurden für jede Flüssigkeit sowohl nach der Methode der schwingenden Scheiben, als auch nach der des Ausflusses durch Capillarröhren angestellt, und in beiden Fällen Apparate von der Form der von Hrn. Grotrian beschriebenen[1] benutzt. Ich gebe zunächst die Dimensionen dieser Apparate.

I. Schwingungsapparat.

	Grosse Scheibe	Kleine Scheibe
Durchmesser der Scheibe: $2R$	12,0073 cm	5,9974 cm
Dicke der Scheibe: δ	0,2818 „	0,1563 „
Aeusserer Durchmesser des Ringes .	11,9996 „	6,0020 „
Innerer „ „ „ .	9,9842 „	3,9931 „
Gewicht des Ringes	155,4314 g	75,4063 g
Trägheitsmoment des Ringes	4734,336 g cm²	489,853 g cm²
Schwingungsdauer ohne Ring T_0 . .	25,2303″	9,1767″
„ „ mit „ T_1 . .	34,4509″	11,8584″
Trägheitsmoment M des Apparates .	5476,559 g cm²	731,279 g cm²
Logarithmisches Decrement in Luft λ_0	0,006 328″	0,006 067 „

Aus dem logarithmischen Decrement λ_1 beim Schwingen in der betreffenden Flüssigkeit und aus dem specifischen Gewichte s der Flüssigkeit berechnet dann Hr. Grotrian den Reibungscoëfficienten η in g-cm-sec. mittelst der Formel:

$$\eta = \frac{8M^2}{\pi T_0 (R^4 + 2R^3\delta)^2}\frac{1}{s}\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\pi} + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\pi}\right)^2 + \tfrac{5}{4}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\pi}\right)^3 + \tfrac{9}{4}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\pi}\right)^4 + \cdots\right]^2 .$$

$$\dim.\eta = \frac{M}{LT}.$$

1) Grotrian, Pogg. Ann. **157.** p. 130—146. 237—257. 1876; Wied. Ann. 8. p. 529—554. 1879.

II. Ausflussapparat.

Volumen, das unter dem constanten Drucke P in der Zeit T ausfliesst: $V = 38{,}0003$ ccm bei 15,9° C. Kurze Capillarröhre: Länge $l = 9{,}87842$ cm; Radius $r = 0{,}01977$ cm. Lange Capillarröhre: Länge $l = 16{,}0832$; Radius $r = 0{,}01994$. Höhe der Mitte der Ausflussöffnung über der Mitte der Kugel: $h = 12{,}59$ cm. Ist dann H die Quecksilberhöhe im Manometer, s das specifische Gewicht der Flüssigkeit und g die Beschleunigung durch die Schwere, so lautet die von Hrn. Grotrian zur Berechnung benutzte Gleichung:

$$\eta = \frac{\pi r^4 P T}{8 v l} - \frac{s \cdot v}{2^{10/8} \pi g l} \cdot \frac{1}{T},$$

worin der Druck P gegeben ist durch:

$$P = H.13{,}5953 - hs.$$

Die Dimension von η ist nach dieser Formel MT/L^2. Hr. Grotrian wählt mg-cm-sec zu Einheiten und gelangt auf diese Weise zu Werthen, welche mit den nach der Formel für schwingende Scheiben berechneten Werthen von η die gleiche Grössenordnung haben. Es wird dadurch leicht der Anschein erweckt, als ob die beiden so erhaltenen Werthe von η miteinander vergleichbar wären. Das sind sie aber in Wirklichkeit nicht, wie schon aus der Verschiedenheit der Dimension hervorgeht. η ist nach der letzten Formel in conventionellem, nach der ersten in absolutem Maasse gegeben.[1]) Um diesem Uebelstande abzuhelfen und die Zahlen miteinander vergleichbar zu machen, muss man den Druck P in absolutem Maasse messen, d. h.:

$$P = (H.13{,}5953 - hs)\,g$$

und dementsprechend im Nenner des Correctionsgliedes das g fortlassen, weil die Masse der bewegten Flüssigkeit einfach durch das Gewicht der Volumeneinheit, d. h. durch s, gemessen wird. Dadurch wird die Dimension von η auch nach dieser Formel M/LT, und man kann den Berechnungen

1) Vgl. H. Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Maasse. Leipzig 1880. p. 18—20, 31—32.

in beiden Fällen die gleichen Einheiten zu Grunde legen. Die Umrechnung der Grotrian'schen Zahlen für den zweiten Fall auf die Maasse des ersten würde also einfach in einer Multiplication mit $g/1000$ bestehen. Die sämmtlichen unten mitgetheilten Reibungsconstanten sind in diesem absoluten Maasssystem nach g·cm-sec berechnet.

Die Messungen bezogen sich hauptsächlich auf Flüssigkeiten, welche Hr. Prof. Quincke bei seinen electrischen Untersuchungen[1]) verwandt hatte. Ich füge zur Vergleichung der Resultate, die an den von mir benutzten Apparaten erhalten wurden, mit den Beobachtungen anderer die Werthe für destillirtes Wasser hinzu. Die Temperatur t wurde bei dem Schwingungsapparat vor und nach jedem Versuch in der Flüssigkeit selbst bestimmt, bei dem Ausflussapparat während des Versuches mehrfach an einem in unmittelbarer Nähe der Capillarröhre angebrachten Thermometer abgelesen.

Schwingungsapparat				Ausflussapparat				
	λ_1	t	η		H	T	t	η
1. Destillirtes Wasser.								
					cm			
Kleine Scheibe	0,095 347	16,8°	0,01595	Kurze Röhre	22,49	253,2''	17,0°	0,01112
					7,74	794,4	15,5	0,01134
Grosse Scheibe	0,301 571	16,6	0,01587	Lange Röhre	10,08	884,2	16,9	0,01084
					10,09	916,8	17,0	0,01126
					6,11	1546,4	18,1	0,01077
2. Schwefelkohlenstoff (s = 1,2657 bei 16,9°).								
Kleine Scheibe	0,060 582	14,6°	0,00459	Kurze Röhre	10,12	246,2	17,7	0,00406
					6,45	390,0	17,5	0,00398
Grosse Scheibe	0,188 724	15,4	0,00451	Lange Röhre	10,09	346,8	17,6	0,00390
					6,11	604,2	17,7	0,00387
3. Aethyläther (s = 0,7213 bei 15,9°).								
Kleine Scheibe	0,039 209	14,9	0,00293	Kurze Röhre	11,855	159,6	17,8	0,00324
					10,070	170,0	18,0	0,00288
Grosse Scheibe	0,116 466	15,2	0,00274		9,855	172,8	17,5	0,00287
					6,000	263,2	18,4	0,00265
					5,297	295,2	17,5	0,00261
				Lange Röhre	10,090	222,2	18,1	0,00258
					6,115	366,0	17,4	0,00254

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 725. 1883.

Schwingungsapparat				Ausflussapparat				
	λ_1	t	η		H	T	t	η
4. Leichtes Benzol (s = 0,8064 bei 18,8°).								
Kleine Scheibe	0,058 075	19,4	0,00654	Kurze Röhre	14,870	198,8	16,9	0,00547
					9,870	303,6	16,5	0,00556
Grosse Scheibe	0,178 629	19,2	0,00627		9,850	287,6	17,1	0,00522
					5,115	594,4	16,7	0,00535
					5,085	582,8	18,1	0,00520
				Lange Röhre	10,085	424,4	17,8	0,00520
					6,115	738,0	17,5	0,00526
5. Schweres Benzol (s = 0,8792 bei 16,7°).								
Kleine Scheibe	0,070 027	16,3	0,00915	Lange Röhre	10,08	558,0	17,1	0,00686
Grosse Scheibe	0,214 615	16,7	0,00862		6,10	978,0	17,1	0,00691
6. Terpentinöl (s = 0,8719 bei 11,8°).								
Kleine Scheibe	0,124 400	11,9	0,03256	Lange Röhre	10,02	1486,2	13,7	0,01845
Grosse Scheibe	0,362 575	11,8	0,02836		6,07	2597,6	14,6	0,01886

Bei den Bestimmungen mit schwingenden Scheiben ergibt die kleine Scheibe stets grössere, zum Theil bedeutend grössere Werthe, als die grosse. Ebenso führt beim Ausflussapparat die Anwendung der kurzen Röhre durchschnittlich zu grösseren Werthen von η, als die der langen, und ausserdem ist ersichtlich, dass die Stärke des Druckes, unter dem die Flüssigkeit ausströmt, bei der kurzen Röhre einen Einfluss auf das Resultat hat. Besonders auffallend ist dies beim Aethyläther, wo mit der kurzen Röhre der Reibungscoëfficient regelmässig um so grösser ausfiel, je grösser der Druck war, während mit der langen Röhre für ähnlich verschiedene Drucke nahezu gleiche Resultate erhalten wurden. Offenbar sind die am Anfang und Ende der Röhre im Fliessen auftretenden Unregelmässigkeiten so stark, dass sie bei der kurzen Röhre noch nicht gegen den Einfluss der Röhre selbst verschwinden. Immer jedoch stimmen die Resultate für denselben Apparat unter sich besser überein, als mit denen des anderen Apparates. Hier zeigen sich starke Differenzen, wie die folgende Zusammenstellung der Mittelwerthe für die beiden Apparate übersichtlicher erkennen lässt. Es sind in derselben aber nur die zuverlässigeren

Zahlen, d. h. die mit der grossen Scheibe und der langen Röhre erhaltenen berücksichtigt. Die Differenzen habe ich sowohl absolut als in Procenten der grösseren der beiden Zahlen beigefügt.

	Schwingungs-apparat	Ausfluss-apparat	Differenz	Differenz in Proc.
Aethyläther . . .	0,00274	0,00256	0,00018	6,6
Schwefelkohlenstoff .	0,00451	0,00388	0,00063	14,0
Leichtes Benzol . .	0,00627	0,00523	0,00104	16,6
Schweres Benzol .	0,00862	0,00688	0,00174	20,2
Destillirtes Wasser .	0,01587	0,01096	0,00491	31,2
Terpentinöl . . .	0,02836	0,01865	0,00971	34,2

Die mit schwingenden Scheiben erhaltenen Werthe sind stets grösser als die mit dem Ausflussapparat gefundenen, und wenn auch die Temperatur bei den Versuchen der ersten Art stets etwas niedriger war als bei denen der zweiten, so sind die Differenzen der η doch zu gross, als dass sie davon allein herrühren könnten. Die Tabelle zeigt ferner, dass diese Differenzen, sowohl die absoluten als die procentischen, um so grösser sind, je grösser die Reibungsconstante selbst ist. Uebrigens zeigen die Beobachtungen von Hrn. Grotrian dieselben Differenzen, wie überhaupt die von mir gefundenen Werthe für destillirtes Wasser mit den von Hrn. Grotrian nach denselben Methoden bestimmten Werthen nahezu übereinstimmen.

Die electrischen Untersuchungen, mit welchen Hr. Prof. Quincke zu gleicher Zeit beschäftigt war, legten die Frage nahe, ob magnetische oder electrische Kräfte bei der starken Einwirkung, die sie auf die Theilchen magnetischer oder diëlectrischer Flüssigkeiten ausüben, auch die innere Reibung dieser Flüssigkeiten zu beeinflussen im Stande wären, und es möchte nicht unnützlich sein, die hierüber angestellten Versuche zu beschreiben, obwohl sie — um dies vorweg zu nehmen — ein negatives Resultat ergeben haben.

Zur Prüfung des Einflusses magnetischer Kräfte auf die Reibung wurde natürlich eine Flüssigkeit von besonders stark magnetischen Eigenschaften gewählt: concentrirte Lö-

sung von Mangansulfat. Die Magnetisirung wurde mit Hülfe eines Ruhmkorff'schen Electromagnets[1]) in der Weise bewerkstelligt, dass der capillare Theil des Ausflussapparates zwischen die auf ca. 7 mm genäherten Polflächen des Magnets gebracht wurde. Um einen verhältnissmässig grossen Theil der Capillarröhre im magnetischen Felde zu haben, wurde die kurze Röhre für diese Versuche gewählt, und um ein möglichst starkes Feld zu erzielen, die zugeschärften Pole mit rechteckigen Endflächen bei horizontaler Lage der langen Kante benutzt.[2]) Erregt wurde der Magnet durch 3 und durch 6 Bunsen'sche Elemente. Die Stärke des Feldes wurde nicht bestimmt; doch lässt sie sich aus den in der soeben citirten Abhandlung von Hrn. Prof. Quincke gegebenen Daten abschätzen auf ca. 6300—6400 cm-g-sec. für 3, und auf ca. 7200—7300 cm-g-sec. für 6 Elemente. Ich erhielt folgende Werthe für die Ausflusszeiten:

	H	t	T
Ohne Magnetisirung . .	$H =$ 13,99 cm;	$t =$ 17,8° ;	$T =$ 17' 16,8''
Magnetisch (3 E.) . .	13,99	17,65	17 19,2
Magnetisch (6 E.) . .	13,96	15,75	17 54,4
Ohne Magnetisirung .	13,97	15,5	17 57,2

Die Ausflusszeiten und folglich, da die Drucke gleich waren, auch die Reibungscoëfficienten, sind also nahezu gleich; die geringen Verschiedenheiten hängen offenbar mit den Veränderungen der Temperatur zusammen.

Für die Einwirkung electrischer Kräfte lag es nahe, den Schwingungsapparat zu benutzen und die Scheibe desselben geradezu als die eine zur Erde abzuleitende Platte eines Condensators zu verwerthen, indem man ihr eine andere, auf ein gewisses Potential geladene Platte gegenüberstellte. Es wurde zu diesem Zweck das Glasgefäss, in welchem sich sonst die die Scheibe umgebende Flüssigkeit befand, durch ein anderes mit geradem, metallenem Boden ersetzt, der auf isolirender Unterlage ruhend, mit einer Leydener Batterie in Verbindung gesetzt werden konnte. Es zeigte sich jedoch, dass es unmöglich war, Scheibe und Boden so zu einander parallel zu stellen, dass die Scheibe beim Electrisiren nicht

1) G. Quincke, Wied. Ann. **24.** p. 348 ff. 414. 1885.
2) a. d. O.

aus ihrer Gleichgewichtslage herausgebracht worden wäre. Auch das Anbringen einer zweiten durchbohrten Platte, die mit dem Boden des Gefässes in leitender Verbindung stand und sich in gleichem Abstande über, wie dieser unter der schwingenden Scheibe befand, konnte diesem Uebelstande nicht abhelfen und die Scheibe nicht frei schwingend machen, wie in unelectrischem Zustande. Es blieb also nichts übrig, als die Electrisirung in ähnlicher Weise zu bewirken, wie die Magnetisirung, indem man einfach den capillaren Theil des Ausflussapparates in das Feld eines Condensators brachte. Als Flüssigkeit wurde Schwefelkohlenstoff gewählt. Die gewöhnliche Capillarröhre wurde durch eine solche aus Flintglas ersetzt, die aussen zu noch besserer Isolirung mit Schellack überzogen wurde. Die Dimensionen dieser Röhre waren:

$$l = 25{,}098 \text{ cm} \qquad r = 0{,}03393 \text{ cm}.$$

Eine zweite, engere Röhre von elliptischem Querschnitt, die später auch noch benutzt wurde, hatte die Länge $l = 24{,}956$ cm und den mittleren Radius $r = 0{,}01582$ cm.

Die vernickelten Condensatorplatten hatten einen Durchmesser von 15,16 cm und waren in horizontaler Lage oberhalb und unterhalb der Capillarröhre in einem Abstand von 0,75 bis 1 cm voneinander angebracht. Die eine war dauernd zur Erde abgeleitet; die andere mit der inneren Belegung einer Batterie von zwei Leydener Flaschen verbunden, welche während des Versuchs durch einen Gehülfen mittelst einer Influenzmaschine auf constantem Potential gehalten wurde. Um die Grösse und Constanz des Potentials beurtheilen zu können, war mit der inneren Belegung der Leydener Flaschen ausser dem Condensator noch ein Righi'sches Reflexionselectrometer[1]) verbunden, das mit Fernrohr und Scala abgelesen wurde. Die Constante desselben wurde in der Weise bestimmt, dass das Instrument mit der inneren Belegung einer Maassflasche mit Messingkugeln von 20 mm Durchmesser verbunden und die Abweichungen der Nadel für diejenigen Potentiale gemessen wurden, welche zur Entladung bei 1, 2, 3, 4 und 5 mm Abstand der beiden Kugeln erforderlich waren. Die Grösse dieser Potentiale wurde der von

1) G. Quincke, Wied. Ann. **19.** p. 564—568. 1883.

Hrn. Prof. Quincke mitgetheilten Tabelle[1]) entnommen. Mittelst der in dieser Weise einmal bestimmten Constanten des Electrometers konnten dann die bei den einzelnen Versuchen benutzten Potentiale berechnet werden. Sie waren bei allen Versuchen nahezu gleich und betrugen im Mittel ungefähr 13000 Daniell oder 48,64 cm-g-sec.

Ich gebe im Folgenden die Resultate in der Reihenfolge, wie die Versuche hintereinander bald ohne, bald mit Electrisirung angestellt worden waren. Da die Temperatur und möglicherweise auch der Druck auf den Werth des Reibungscoëfficienten von Einfluss sind, so füge ich die Werthe für t und P (den corrigirten Druck) hinzu.

I. Röhre mit rundem Querschnitt.

Nr.	t	P	η	
		cm		
1	17,5°	2,876	0,00413	
2	16,8	0,887	0,00447	
3	17,6	0,912	0,00418	Electrisirt
4	18,6	1,924	0,00411	
5	17,8	1,515	0,00422	
6	17,8	1,530	0,00420	Electrisirt
7	16,2	2,124	0,00410	
8	16,1	2,129	0,00414	Electrisirt
II. Röhre mit elliptischem Querschnitt.				
9	16,7	8,739	0,00422	
10	17,1	8,949	0,00417	
11	19,2	8,925	0,00409	
12	19,1	8,925	0,00406	Electrisirt
13	18,9	8,925	0,00409	
14	18,7	8,896	0,00411	
15	18,7	8,906	0,00412	Electrisirt

Abgesehen von der zweiten Beobachtung, welche als fehlerhaft anzusehen ist, liegen die Differenzen der Werthe von η für die electrisirte und die nicht electrisirte Flüssigkeit völlig innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Trotz der beträchtlichen Stärke der angewandten Kräfte ist also durchaus keine merkliche Veränderung des Reibungscoëfficienten durch Magnetisiren oder Electrisiren der betreffenden Flüssigkeiten festzustellen gewesen.

Heidelberg, Mai 1885.

1) G. Quincke, Wied. Ann. **19.** p. 568. 1883.

VII. *Ueber die Löslichkeit von Salzgemischen; von Fr. Rüdorff.*

(Aus den Sitzungsberichten der phys.-math. Classe der k. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin vom 16. April 1884; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

I. Im 148. Bde. p. 456 und 555 der Ann. für Pysik u. Chemie habe ich die Resultate einer Untersuchung über die Löslichkeit von Salzgemischen in Wasser mitgetheilt. Wenn ich auf denselben Gegenstand jetzt nochmals zurückkomme, so geschieht dieses aus dem Grunde, weil die Fortsetzung der Versuche zu Resultaten geführt hat, welche ein über die Kenntniss der Thatsache hinausreichendes, allgemein chemisches Interesse in Anspruch nehmen dürften.

In der oben citirten Abhandlung habe ich die Salzgemische in Bezug auf ihre Löslichkeit in zwei Gruppen getheilt, und zwar in

1. Gemische, bei welchen eine chemische Umsetzung nicht eintreten kann, also Salzgemische mit gleichem Metall oder gleicher Säure.

2. Gemische, bei welchen eine chemische Umsetzung eintreten kann, in welchen also Salze zweier Metalle und zweier Säuren vorhanden sind.

Durch Versuche mit Salzgemischen der ersten Art habe ich gezeigt, dass es Gemische gibt, von welchen sich gesättigte, und zwar identische Lösungen herstellen lassen, wenn man nur einen Ueberschuss beider Salze anwendet, gleichgültig, in welchem Mengenverhältniss man im übrigen beide Salze dem Wasser zum Lösen darbietet. Hierher gehört z. B. ein Gemisch von Kaliumnitrat und Bleinitrat, von Chlorammonium und Chlorbarium, von Chlorammonium und Ammoniumnitrat. Bei anderen Salzgemischen ist es in Bezug auf die Zusammensetzung der resultirenden Lösung von Einfluss, in welchem Verhältniss man beide Salze der zu ihrer Lösung unzureichenden Wassermenge darbietet; ein Ueberschuss des einen Salzes verdrängt eine bestimmte Menge des anderen, sodass man von dem Gemisch dieser Salze keine gesättigte, d. h. keine Lösung herstellen kann, auf welche das eine wie das andere Salz ohne Einfluss ist.

Hierher gehören die Gemische von Kalium- und Ammoniumsulfat, von Ammonium- und Kupfersulfat und andere. Man muss also bei den Salzgemischen, bei welchen eine chemische Umsetzung nicht eintreten kann, unterscheiden:

1. Gemische, von denen sich eine gesättigte Lösung herstellen lässt und

2. Gemische, von denen keine gesättigte Lösung zu erhalten ist.

Die für diese beiden Arten von Salzgemischen in der früheren Mittheilung gegebenen Beispiele mögen im Folgenden durch einige neue Salzgemische vermehrt werden. Um aber das Gesammtbild zu vervollständigen, werde ich die Resultate der früheren Versuche hier einflechten.

II. Die Herstellung der Lösungen der Salzgemische wurde in der früher angegebenen Weise bewirkt. Die beiden Salze wurden in grossem Ueberschuss in gepulvertem Zustande mit einer bestimmten Menge Wasser unter Schütteln erwärmt und dadurch entweder völlig oder zum grösseren Theil gelöst. Dann wurde die Lösung der Abkühlung auf fast Zimmertemperatur überlassen, indem gegen das Ende der Abkühlung ein Stück beider Salze und bei Doppelsalzen auch noch ein Stück desselben in die Lösungen geworfen wurde, um eine Uebersättigung zu verhüten. Die Lösung wurde von dem ausgeschiedenen Salz abgegossen, und in 15 bis 25 ccm derselben wurden je 3 bis 6 g des einen und ebenso in 15 bis 25 ccm 3 bis 6 g des anderen Salzes unter Erwärmen gelöst. Dann wurden die drei Lösungen unter häufigem Umschütteln abgekühlt und nachdem ein Stück der festen Salze in die Lösungen geworfen war, der völligen Abkühlung während 12 bis 15 Stunden überlassen. Nach wiederholtem Schütteln wurden dann die Lösungen von den ausgeschiedenen Salzen durch ein trockenes Filter getrennt und auf ihren Salzgehalt untersucht.

Bei solchen Salzen, welche wie Lithiumsulfat in warmem Wasser weniger leicht löslich sind, als in kaltem, wurden die beiden zu lösenden Salze in sehr fein gepulvertem Zustande in grossem Ueberschuss mit Wasser Tage lang wiederholt geschüttelt. Ein bestimmter Theil dieser Lösung wurde

dann mit je 3 bis 6 g des einen wie des anderen Salzes ebenso behandelt. Die Temperatur des Raumes, in welchem die Lösungen der völligen Abkühlung überlassen wurden, war nur sehr geringen Schwankungen unterworfen.

Es mag aber noch erwähnt werden, dass es bei einigen Salzen, welche sich in beträchtlicher Menge in Wasser lösen, und deren Lösung eine merklich dickflüssige Beschaffenheit zeigt, sehr schwer hält, eine bei einer bestimmten Temperatur gesättigte Lösung zu erhalten. Bei einigen dieser Lösungen scheidet sich der Ueberschuss des gelösten Salzes selbst bei Berührung mit festem Salz und starkem Schütteln nur sehr langsam, bisweilen selbst bei zwölfstündigem Stehenlassen nicht völlig aus.

III. Die von mir angestellten Versuche beziehen sich zunächst auf das Verhalten solcher Salzgemische, deren Bestandtheile sich zu Doppelsalzen vereinigen. Bei den früher von mir angestellten Versuchen hatte sich herausgestellt, dass jeder der Bestandtheile eines Doppelsalzes den anderen aus der gesättigten Lösung verdrängt. Dasselbe zeigte sich auch bei den folgenden Salzpaaren:

1. Ammonium- und Aluminiumsulfat.

I. Gesättigte Lösung des Ammonium-Aluminiumalauns.

II. 20 ccm der Lösung I und 6 g kryst. Aluminiumsulfat.

III. 20 ccm der Lösung I und 4 g Ammoniumsulfat.

100 Theile der auf 18,5° abgekühlten Lösungen enthielten:

	$(NH_4)_2SO_4$		$Al_2 3SO_4$
I.	1,42	und	3,69
II.	0,45	„	16,00
III.	20,81	„	0,29

In 100 Theilen Wasser sind also in I. 5,35 Theile des wasserfreien Doppelsalzes gelöst.

2. Ammonium- und Cadmiumsulfat.

I. Gesättigte Lösung des Doppelsalzes

$$(NH_4)_2SO_4 + CdSO_4 + 6H_2O.$$

II. 20 ccm Lösung I und 3 g Ammoniumsulfat.

III. 20 ccm Lösung I und 4 g kryst. Cadmiumsulfat.

Die auf 20,8° abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

I. 15,58 $(NH_4)_2SO_4$ und 24,57 $CdSO_4$
II. 23,64 " " 15,80 "
III. 12,56 " " 32,52 "

In 100 Theilen Wasser lösen sich also bei 20,8° (Lösung I) 112,3 Theile des kryst. Doppelsalzes.

3. Ammonium- und Nickelsulfat.

I. Gesättigte Lösung des Doppelsalzes
$(NH_4)_2SO_4 + NiSO_4 + 6H_2O$.
II. 20 ccm Lösung I und 4 g Ammoniumsulfat.
III. 20 ccm Lösung I und 6 g Nickelsulfat.

In 100 Theilen der auf 14° abgekühlten Lösungen war enthalten:

I. 3,00 $(NH_4)_2SO_4$ und 3,53 $NiSO_4$
II. 18,16 " " 0,39 "
III. 0,52 " " 13,90 "

In I. waren also in 100 Theilen Wasser 10,2 Theile des kryst. Doppelsalzes gelöst.

Versuche mit den Salzpaaren: Kalium- und Kupfersulfat, Ammonium- und Zinksulfat, Ammonium- und Magnesiumsulfat, Ammonium- und Kupfersulfat, Ammonium- und Kupferchlorid ergaben ein ähnliches Resultat: es findet eine gegenseitige Verdrängung der Bestandtheile statt. Ich habe bereits früher[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn man in ähnlicher Weise, wie es oben geschehen, auf dieselbe Lösung zu wiederholten malen den einen Bestandtheil wirken lässt, die Verdrängung des anderen Bestandtheils vollständig oder fast vollständig gelingt.

IV. Bei den im Vorstehenden mitgetheilten Versuchen über die Lösungen der Bestandtheile der Doppelsalze zeigt sich also eine sehr starke Verdrängnng des einen Bestandtheils durch den anderen, oder wohl besser eine Verdrängung des Doppelsalzes durch jeden der Bestandtheile desselben. Da die obigen Versuche in der Weise angestellt waren, dass

1) F. Rüdorff, Pogg. Ann. **148.** p. 557. 1873.

in der gesättigten Lösung des Doppelsalzes der eine wie der andere Bestandtheil durch Erwärmen aufgelöst wurde und beim Abkühlen der eine gelöste Theil den anderen aus der Lösung verdrängt, so entseht die Frage, wie sich wohl der eine oder andere Bestandtheil im festen Zustande gegen die gesättigte Lösung des Doppelsalzes verhalten würde. Es wurde deshalb ein Theil der gesättigten Lösung des Doppelsalzes mit dem einen, ein anderer mit dem anderen Bestandtheile in höchst fein gepulvertem Zustande tüchtig geschüttelt und dann die Lösungen untersucht. Das Resultat war ein ganz ähnliches wie in den obigen Versuchen, die Bestandtheile der Lösung wirkten im festen Zustande ebenso verdrängend auf das Doppelsalz, indem sie selbst in Lösung gingen.

Es lässt sich auf diesem Wege die gegenseitige Verdrängung der Salze aus ihren Lösungen in sehr auffallender Weise als Vorlesungsversuch zeigen. Man fülle zwei mit Glasstöpseln zu verschliessende Cylinder von angemessener Höhe (oder auch zwei Reagensgläser von gleichen Dimensionen) bis zu zwei Dritttheilen mit der gesättigten Lösung des Doppelsalzes Ammonium-Kupfersulfat, füge zu der einen Lösung einige Messerspitzen voll sehr fein gepulvertes Ammoniumsulfat und schüttele einige Minuten tüchtig. Nach einigen Augenblicken der Ruhe ist die Flüssigkeit fast entfärbt, jedenfalls sehr viel weniger gefärbt, als die zur Probe daneben stehende ursprüngliche Lösung des Doppelsalzes.

V. Bei der Anstellung einiger Versuche über die Löslichkeit von Gemischen isomorpher Salze wurden die mit I. bezeichneten Lösungen dadurch erhalten, dass in 100 ccm Wasser unter Erwärmen ein beträchtlicher Ueberschuss des Gemenges beider Salzes gelöst wurde, und je ein Theil dieser bis auf etwa Zimmertemperatur abgekühlten Lösung mit je 4 bis 6 g der einzelnen Salze erwärmt wurde.

Meistens lösen sich die zugesetzten Mengen der Salze nicht völlig auf. Die Lösungen wurden dann unter den oben angegebenen Vorsichtsmaassregeln der völligen Abkühlung überlassen.

4. Eisenammoniak- und Aluminiumammoniak-Alaun.

I. 15 g des einen und 15 g des anderen kryst. Doppelsalzes wurden in 100 ccm Wasser gelöst. Aus der auf Zimmertemperatur abgekühlten Lösung hatten sich Mischkrystalle beider Alaune ausgeschieden.

II. 25 ccm der Lösung I und 3 g Aluminiumalaun.
III. 25 ccm der Lösung I und 3 g Eisenalaun.

In den auf 15,7° abgekühlten Lösungen fand ich:

I.	7,81 Eisenalaun	und	7,46	Aluminiumalaun.
II.	7,29 „	„	9,88	„
III.	13,6 „	„	6,71	„

5. Ammonium-Cadmiumsulfat und Ammonium-Kupfersulfat.

I. 20 g Cadmiumdoppelsalz und 20 g Kupferdoppelsalz in 6 g Wasser gelöst. Aus der Lösung hatten sich beim Abkühlen auf Zimmertemperatur (20°) hellblaue Mischkrystalle ausgeschieden.

II. 20 ccm der Lösung I und 5 g Cadmiumdoppelsalz.
III. 20 ccm der Lösung I und 5 g Kupferdoppelsalz.

Die auf 16,6° abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

I.	7,8 $CuSO_4+(NH_4)_2SO_4$	und	16,9	$CdSO_4+(NH_4)_2SO_4$
II.	4,7 „ „	„	26,1	„ „
III.	8,3 „ „	„	15,0	„ „

Die isomorphen Salze Zinksulfat und Magnesiumsulfat, Kupfersulfat und Eisensulfat, Bleinitrat und Baryumnitrat, Kaliumnitrat und Ammoniumnitrat zeigen ein ganz ähnliches Verhalten. Es zeigt sich also auch bei den Gemischen isomorpher Salze ein Verdrängen des einen durch das andere Salz aus der Lösung des Gemisches.

VI. Die mit den Gemischen einiger anderer Salze angestellten Versuche ergaben folgende Resultate:

6. Chlorbarium und Chlornatrium.

I. 35 g kryst. Chlorbarium und 30 g Chlornatrium wurden mit 50 g Wasser längere Zeit erwärmt.

II. 20 ccm Lösung I und 4 g kryst. Chlorbarium.
III. 20 ccm Lösung I und 4 g Chlornatrium.

In 100 Theilen der auf 19,4° abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 2,9 $BaCl_2$ und 24,9 NaCl.
II. 2,6 „ „ 25,1 „
III. 2,9 „ „ 24,8 „

7. Bleinitrat und Natriumnitrat.

I. In 50 ccm Wasser wurden 25 g Bleinitrat und 45 g Natriumnitrat gelöst.
II. 20 ccm Lösung I und 6 g Natriumnitrat
III. 20 ccm Lösung I und 6 g Bleinitrat.

In 100 Theilen der auf 15° g abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 15,3 PbN_2O_6 und 38,8 $NaNO_3$.
II. 15,3 „ „ 38,6 „
III. 15,1 „ „ 39,0 „

8. Natriumsulfat und Nickelsulfat.

I. 40 g kryst. Nickelsulfat und 15 g entwässertes Natriumsulfat in 50 ccm Wasser gelöst.
II. 20 ccm Lösung I und 4 g kryst. Natriumsulfat.
III. 20 ccm Lösung I und 4 g kryst. Nickelsulfat.

In 200 Theilen der auf 20° abgekühlten Lösungen wurde gefunden:

I. 14,1 Na_2SO_4 + 22,4 $NiSO_4$.
II. 14,0 „ + 22,7 „
III. 14,2 „ + 22,1 „

9. Natriumsulfat und Natriumphosphat.

I. 6 g kryst. Natriumsulfat und 40 g kryst. Natriumphosphat in 100 ccm Wasser gelöst.
II. 25 ccm Lösung I und 4 g kryst. Natriumphosphat.
III. 25 ccm Lösung I und 4 g kryst. Natriumsulfat.

Bei 14,8° enthielten 100 Theile der Lösungen:

I. 8,81 Na_2SO_4 und 2,15 Na_2HPO_4.
II. 8,96 „ „ 2,09 „
III. 8,83 „ „ 2,02 „

Aus der früheren Mittheilung gehören hierher Gemische von:

Chlornatrium und Kupferchlorid,
Natriumsulfat und Kupfersulfat,
Kaliumnitrat und Bleinitrat,
Chlorammonium und Chlorbarium.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die drei zusammengehörigen Lösungen identisch sind, dass also bei diesen Salzgemischen eine Verdrängung des einen Salzes durch das andere nicht stattfindet.

Da die meisten Salze im Gemisch mit anderen eine Verminderung ihrer Löslichkeit zeigen, so tritt die Verschiedenheit der oben angegebenen Gruppen in Bezug auf ihre gegenseitige Verdrängung am auffallendsten hervor, wenn man in der gesättigten Lösung des einen Salzes steigende Mengen des anderen Salzes unter Erwärmen löst und die auf Zimmertemperatur abgekühlten Lösungen auf den Gehalt des in der gesättigten Lösung enthaltenen Salzes untersucht. Ich wähle als Repräsentanten für die eine Gruppe von Salzen Barium- und Ammoniumchlorid, und für die andere das Doppelsalz Ammonium-Kupfersulfat und Ammoniumsulfat.

Nach der Einwirkung von:

0 10 20 30 35 40 50 g NH_4Cl

auf 100 ccm einer bei Zimmertemperatur gesättigten Lösung von Chlorbarium fand ich in 100 g der auf 15° abgekühlten Lösungen:

25,6 18,0 11,5 8,16 8,10 8,10 8,20 g $BaCl_2$.

Man sieht, wie mit gesteigertem Zusatz von Salmiak der Gehalt an Bariumchlorid sich vermindert, wie das letzte Salz durch das erste aus der Lösung verdrängt wird. Aber diese Verdrängung geht nur bis zu einer bestimmten Grenze, eine über 30 g steigende Menge von Salmiak bewirkt keine weitere Ausscheidung von Bariumchlorid, sondern es scheidet sich die überschüssig zugesetzte Menge Salmiak beim Abkühlen wieder aus.

Dagegen waren nach Einwirkung von:

0 5 10 20 30 50 70 80 100 g $(NH_4)_2SO_4$ auf je 100 ccm einer gesättigten Lösung von Ammonium-Kupfersulfat bei 16,6° in 100 g der Lösungen enthalten:

15,6 9,9 5,8 2,9 1,6 1,04 0,68 0,45 0,35 g Doppelsalz.

Es ist klar, dass hier das eine Salz, wenn es in gesteigerter Menge auf die Lösung des anderen einwirkt, dieses Schritt für Schritt fast vollständig aus der Lösung verdrängt.

VII. Wenn man die unter III, V und VI untersuchten Salzgemische miteinander vergleicht, so zeigt sich, dass dieselben auch in anderer Beziehung in drei verschiedene Gruppen zerfallen, die erste Gruppe enthält Salzgemische, deren einzelne Bestandtheile sich miteinander zu wohlgeformten Doppelsalzen verbinden.

Die zweite Gruppe enthält Salzpaare, welche untereinander isomorph sind, und es ist bekannt, dass auch diese, wenn auch nicht in Doppelsalzen, so doch in sogenannten isomorphen Mischungen zusammen krystallisiren.

Von den Salzpaaren der dritten Gruppe sind weder Doppelsalze, noch isomorphe Mischungen bekannt; aus der gemischten Lösung dieser Salze krystallisirt jedes derselben neben dem anderen.

Aus den Versuchen mit den oben angeführten Salzgemischen aber geht deutlich hervor, dass diejenigen Salze, welche entweder untereinander Doppelsalze oder Krystalle isomorpher Mischungen bilden, also bei ihrem Ausscheiden aus einer gemeinsamen Lösung eine moleculare Attraction aufeinander ausüben, sich gegenseitig aus der Lösung verdrängen, während dieses bei den Salzen, die nicht zusammen krystallisiren, nicht der Fall ist.

Es schien mir von Interesse zu sein, diese Beziehung zwischen der gegenseitigen Verdrängung gewisser Salzpaare und der Eigenschaft derselben, zusammen zu krystallisiren, an noch einigen anderen Salzpaaren zu erproben. Ich richtete mein Augenmerk besonders auf Salze solcher Metalle, welche von den Metallen, mit welchen sie gewöhnlich in eine

Gruppe zusammengestellt werden, in ihren chemischen Eigenschaften nicht unerheblich abweichen. Es sind dies die Metalle Lithium, Natrium, Beryllium und Cadmium. In Betreff des Lithiums und Natriums mag hier nur daran erinnert werden, dass, während das Kalium, Rubidium und Caesium in ihren Sulfaten und Chloriden mit den entsprechenden Verbindungen vieler Schwermetalle gut krystallisirende Doppelsalze bilden, dieses bei den Salzen des Lithiums gar nicht, und bei denen des Natriums in nur wenigen Fällen geschieht. Rammelsberg[1]) und Scheibler[2]) geben an, dass es ihnen nicht gelungen sei, Doppelsalze des Lithiumsulfates mit den Sulfaten des Aluminiums, Zinks, Kupfers und anderer Metalle zu erhalten. Ich erhielt folgende Resultate mit einem Gemisch aus:

10. Lithiumsulfat und Kupfersulfat.

I. Eine gesättigte Lösung von Kupfersulfat wurde mit gepulvertem Kupfersulfat und überschüssigem Lithiumsulfat während mehrerer Tage fleissig geschüttelt.

II. 20 ccm der Lösung I mit 3 g gepulvertem Kupfersulfat.

III. 20 ccm der Lösung I mit 3 g Lithiumsulfat längere Zeit geschüttelt.

Bei 22° enthielten 100 Theile der Lösungen:

I.	8,87 $CuSO_4$	und	21,15 Li_2SO_4
II.	8,70 „	„	21,47 „
III.	9,00 „	„	21,47 „

Die Lösungen sind demnach identisch, eine gegenseitige Verdrängung der Salze findet nicht statt.

Wenn die Lithiumverbindungen in Beziehung auf die Bildung von Doppelsalzen von der entsprechenden Kalium- und Ammoniumverbindung auch erheblich abweichen, so bilden sie doch mit den Salzen der übrigen Alkalimetalle den isomorphen Mischungen ähnliche Krystalle. So sind z. B. Mischungen von Ammonium-Lithiumsulfat bereits von dem Entdecker des Lithiums Arfvedson[3]) in schönen

1) Rammelsberg, Berl. Monatsber. 1848. p. 385.
2) Scheibler, Journ. f. prakt. Chem. **67.** p. 485. 1855.
3) Arfvedson, Schweigger Jahrb. d. Ch. u. Ph. **34.** p. 217. 1822.

Krystallen dargestellt. Die mit den Mischungen dieser beiden Salze angestellten Lösungsversuche hatten folgendes Resultat.

11. Ammoniumsulfat und Lithiumsulfat.

I. 30 g kryst. Lithiumsulfat und 40 g Ammoniumsulfat in 50 ccm Wasser.

II. 15 ccm der Lösung I und 3 g Ammoniumsulfat.

III. 15 ccm der Lösung I und 3 g kryst. Lithiumsulfat.

Die Lösungen wurden dadurch erhalten, dass die obigen Salzmengen in feingepulvertem Zustande mit Wasser mehrere Tage fleissig umgeschüttelt wurden. Bei 16,7° enthielten 100 Theile der Lösungen:

I.	25,67 $(NH_4)_2SO_4$	und	12,16	Li_2SO_4
II.	32,85 „	„	9,37	„
III.	16,67 „	„	18,37	„

Die gegenseitige Verdrängung ist eine ebenso starke, wie sie unter ähnlichen Verhältnissen die eigentlichen Doppelsalze zeigen.

12. Chlorammonium und Chlorlithium.

I. 50 g Chlorlithium und 20 g Chlorammonium in 50 ccm Wasser gelöst.

II. 15 ccm der Lösung I und 3 g Chlorammonium.

III. 15 ccm der Lösung I und 3 g Chlorlithium.

Bei 12,6° enthielten 100 Theile der Lösungen:

I.	41,7 LiCl	und	5,05	NH_4Cl
II.	41,1 „	„	5,64	„
III.	44,3 „	„	2,88	„

Auch hier zeigt sich eine wenn auch geringe Verdrängung.

VIII. Es ist bereits oben unter VI. gezeigt worden, dass die Sulfate des Nickels und Kupfers mit Natriumsulfat sich in den Lösungen nicht verdrängen, während diese Sulfate mit Ammonium- und Kaliumsulfat Doppelsalze bilden und sich in den Lösungen mit diesen verdrängen. Doppelsalze von Natriumsulfat mit Nickel- und Kupfersulfat sind

nicht bekannt. Dagegen sind Doppelsalze des Natriumsulfats mit Zink- und Cadmiumsulfat bekannt. Das Salz:

$$Na_2SO_4 + ZnSO_4 + 4H_2O$$

ist von F. C. Bucholz[1]) und schon von Karsten[2]) dargestellt.

Das Salz:

$$Na_2SO_4 + CdSO_4 + 2H_2O$$

beschreibt von Hauer.[3])

Versuche über die Löslichkeit der Doppelsalze im Gemisch mit den dieselben zusammensetzenden Einzelsalzen ergaben:

13. Natrium- und Cadmiumsulfat.

I. 45 g kryst. Cadmiumsulfat und 15 g entwässertes Natriumsulfat in 50 ccm Wasser gelöst.

II. 20 ccm der Lösung I und 5 g kryst. Cadmiumsulfat.

III. 20 ccm der Lösung I und 4 g entwässertes Natriumsulfat.

Bei 15,1° enthielten 100 Theile der Lösung:

I.	33,64	$CdSO_4$	und	11,59 Na_2SO_4.
II.	33,56	„	„	10,34 „
III.	30,37	„	„	12,48 „

14. Natrium- und Zinksulfat.

I. 100 g kryst. Zinksulfat und 30 g kryst. Natriumsulfat in 50 ccm Wasser gelöst.

II. 15 ccm Lösung I mit 3 g entwässertem Natriumsulfat,

III. 15 ccm Lösung I mit 3 g entwässertem Zinksulfat.

100 Theile der Lösungen enthielten bei 12,5°:

I.	28,7	$ZnSO_4$	und	6,58 Na_2SO_4.
II.	26,9	„	„	7,36 „
III.	30,2	„	„	5,55 „

Die drei zusammengehörigen Lösungen sind nicht identisch, es findet eine gegenseitige Verdrängung der Salze statt. Aber es ist auffallend, dass diese Verdrängung sehr viel gegeringer ist, als bei den Lösungen der oben angeführten

1) F. C. Bucholz, Lieb. Ann. (2) **127.** p. 66. 1866.
2) Karsten, Gmelin Handbuch (6. Aufl.) **3.** p. 47.
3) v. Hauer, Journ. f. prakt. Chem. **64.** p. 477. 1854.

Doppelsalze unter sonst ähnlichen Verhältnissen; es ist aber auch bekannt, dass diese letztgenannten Doppelsalze nur schwierig darzustellen sind und, wie es scheint, nur innerhalb enger Temperaturgrenzen entstehen.

Eine ähnliche geringe Verdrängung zeigen auch einige Salzpaare, welche aus ihrer gemeinsamen Lösung in Mischungen von sehr wechselnder Zusammensetzung krystallisiren, ohne isomorphe Mischungen in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes zu bilden. Es gehören hierher:

15. Kalium- und Silbernitrat.

I. 110 g Silbernitrat und 20 g Kaliumnitrat in 30 ccm Wasser gelöst.

II. 10 ccm Lösung I und 3 g Silbernitrat.

III. 10 ccm Lösung I und 3 g Kaliumnitrat.

Bei 14,8° enthielten 100 Theile der Lösungen:

I.	65,1	$AgNO_3$	und 8,5	KNO_3.
II.	65,3	„	„ 8,5	„
III.	60,6	„	„ 10,6	„

Aus einer gemischten Lösung von Kaliumnitrat und Silbernitrat krystallisiren nach H. Rose[1]) Krystalle von der Form des Kaliumnitrats, welche $3KNO_3 + AgNO_3$ sind. Das Salz $KNO_3 + AgNO_3$ wurde von Russel und Maskelyne[2]) erhalten.

16. Natriumnitrat und Silbernitrat.

I. 50 g Silbernitrat und 30 g Natriumnitrat in 30 ccm Wasser.

II. 10 ccm Lösung I und 10 g Silbernitrat.

III. 10 ccm Lösung I und 5 g Natriumnitrat.

In 100 Theilen der auf 16,0° abgekühlten Lösungen fand ich:

I.	42,5	$AgNO_3$	und 25,2	$NaNO_3$.
II.	43,3	„	„ 23,5	„
III.	40,4	„	„ 26,2	„

1) H. Rose, Pogg. Ann. **106.** p. 320. 1859.

2) Russel und Maskelyne, Proc. Roy. Soc. of London. **26.** p. 357. 1877.

Nach Angabe von H. Rose[1]) scheiden sich aus gemisch-
er Lösung von Natrium- und Silbernitrat, welche letzteres
Salz in grossem Ueberschuss enthält, zuerst Krystalle des
etzteren Salzes aus, dann Krystalle von der Form des
Natriumnitrats, welche auf 1 Mol. Silbernitrat und 2 bis 4,2
Mol. Natriumnitrat enthalten. Nach Rammelsberg[2]) er-
hält man aus der gemischten Lösung beider Salze Krystalle,
welche auf 1 Ag bis 10 Na enthalten. Wir haben es hier
also mit Mischungen von sehr wechselnder Zusammensetzung
zu thun, sodass die Annahme nahe liegt, dass viele der hier
n Frage stehenden Krystalle nur Natronsalpeter seien, wel-
cher wechselnde Mengen von Silbernitrat eingeschlossen ent-
hält. Die obigen Versuche über das Verhalten der Lösungen
von Gemischen dieser Salze lassen eine solche Annahme als
sehr unwahrscheinlich erscheinen.

17. Natriumnitrat und Natriumsulfat.

I. 50 g Natriumnitrat und 20 g entwässertes Natrium-
ulfat in 50 ccm Wasser gelöst.

II. 20 ccm der Lösung I und 5 g Natriumnitrat.

III. 20 ccm der Lösung I und 5 g entw. Natriumsulfat.

Die auf 17,8° abgekühlten Lösungen enthielten in 100
Theilen:

I. 39,5 $NaNO_3$ und 5,41 Na_2SO_4
II. 43,9 „ „ 2,69 „
III. 34,5 „ „ 8,5 „

Es findet also eine sehr merkliche gegenseitige Ver-
drängung dieser beiden Salze statt. Aus der gemischten
Lösung dieser Salze erhielt Marignac[3]) das Salz $2(NaNO_3 + Na_2SO_4) + 3H_2O$ in dünnen zweigliedrigen Tafeln.

18. Natriumsulfat und Ammoniumsulfat.

I. 50 g Ammoniumsulfat und 21 g Natriumsulfat in
0 ccm Wasser gelöst.

II. 20 ccm Lösung I und 3 g Ammoniumsulfat.

III. 20 ccm Lösung I und 5 g kryst. Natriumsulfat.

1) H. Rose, Pogg. Ann. **102.** p. 436. 1857.
2) Rammelsberg, Krystallographische Chemie p. 354.
3) Marignac, Ann. des Mines (5) **12.** p. 44. 1855.

In 100 Theilen der auf 11,5° abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 8,9 Na_2SO_4 und 30,5 $(NH_4)_2SO_4$
II. 6,5 " " 36,3 "
III. 12,8 " " 23,8 "

Die Salze verdrängen sich gegenseitig. Aus der gemischten Lösung derselben krystallisirt das Salz $Na_2SO_4 + (NH_4)_2SO_4 + 4H_2O$, wie schon von Link[1]) beobachtet wurde.

IX. Aus den oben unter V. mitgetheilten Versuchen geht hervor, dass die Salze, welche in isomorphen Mischungen krystallisiren, sich in gemeinsamer Lösung gegenseitig verdrängen. In Anknüpfung an diese Versuche mögen hier noch einige Versuche Platz finden, welche ich mit den Lösungen einiger Cadmiumsalze im Gemenge mit den Salzen einiger anderer Metalle angestellt habe.

19. Cadmiumsulfat und Kupfersulfat.

I. 80 g kryst. Cadmiumsulfat und 20 g kryst. Kupfersulfat in 50 ccm Wasser gelöst.

II. 20 ccm der Lösung I mit 3 g kryst. Cadmiumsulfat.

III. 20 ccm der Lösung I mit 3 g kryst. Kupfersulfat.

In 100 Theilen der auf 16,8° abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 38,20 $CdSO_4$ und 5,42 $CuSO_4$
II. 38,19 " " 5,89 "
III. 38,30 " " 5,34 "

20. Cadmiumsulfat und Zinksulfat.

I. 60 g kryst. Cadmiumsulfat und 60 g kryst. Zinksulfat in 50 ccm Wasser gelöst.

II. 20 ccm der Lösung I mit 3 g kryst. Cadmiumsulfat.

III. 20 ccm der Lösung I mit 3 g kryst. Zinksulfat.

In 100 Theilen der auf 14,7° abgekühlten Lösungen fand ich:

I. 29,3 $CdSO_4$ und 15,1 $ZnSO_4$
II. 29,3 " " 15,2 "
III. 29,7 " " 15,2 "

1) Link, Crell Chem. Ann. 1796. p. 30.

Die drei zusammengehörigen Lösungen dieser Salzpaare sind also identisch, eine gegenseitige Verdrängung findet nicht statt. Mischkrystalle von Cadmium- mit Kupfer- oder Zinksulfat sind nicht bekannt.

Von den Sulfaten des zur Magnesiumgruppe gehörenden Berylliums gibt zwar Klatzo[1]) an, isomorphe Mischungen mit den Sulfaten des Zinks, Kupfers, Magnesiums u. s. w. erhalten zu haben. Dieser Angabe widersprechen jedoch die Versuche von Marignac[2]), welcher zeigt, dass aus den gemischten Lösungen des Berylliumsulfats mit den Sulfaten der oben genannten Metalle keine Mischkrystalle, sondern die beiden Sulfate nebeneinander anschiessen. Ich habe Versuche in Bezug auf die Löslichkeit eines Gemisches von

21. Berylliumsulfat und Kupfersulfat

angestellt. 8 g kryst. Kupfersulfat und 40 g kryst. Berylliumsulfat wurden in 40 ccm Wasser gelöst. In der erkalteten Lösung fanden sich Krystalle ausgeschieden, welche schon durch ihre Farbe erkennen liessen, dass beide Salze nebeneinander auskrystallisirt waren, namentlich waren die Krystalle des Berylliumsulfats völlig farblos und enthielten nicht eine Spur Kupfer.

I. Obige Lösung.
II. 10 ccm der Lösung I und 3 g kryst. Berylliumsulfat.
III. 10 ccm der Lösung I und 3 g kryst. Kupfersulfat.

Die auf 17,2° abgekühlten Lösungen enthielten in 100 Theilen:

	$BeSO_4$		$CuSO_4$
I.	25,89	und	3,65
II.	25,40	„	4,38
III.	25,80	„	4,00

Die Lösungen sind als identisch zu betrachten, eine Verdrängung des einen Salzes durch das andere findet nicht statt, eine Thatsache, welche für die Ansicht Marignac's spricht.

X. Aus den im Vorstehenden mitgetheilten Versuchen geht als Resultat hervor, dass von den angeführten Salzpaaren

1) Klatzo, Journ. f. prakt. Chem. **106.** p. 241. 1868.
2) Marignac, Ann. de chim. et de phys. (4) **30.** p. 45. 1873.

sich einige aus ihren gemeinsamen Lösungen verdrängen, wenn auf diese ein Ueberschuss des einen oder des anderen Salzes einwirkt, dass aber bei anderen Salzpaaren eine solche Verdrängung nur diejenigen Salzpaare zeigen, welche entweder in Doppelsalzen oder in Mischkrystallen aus der gemeinsamen Lösung sich ausscheiden. Aber es geht aus den Versuchen auch hervor, dass bei diesem Kampfe um das Gelöstsein die Masse der einzelnen Salze eine Rolle spielt.

Ich möchte noch darauf hinweisen, dass diese Verdrängung des einen Salzes durch ein anderes wohl bei folgenden Erscheinungen mitwirkt.

Bekanntlich wachsen gewisse Krystalle in den Lösungen isomorpher Salze weiter, ein Octaëder von Chromalaun überzieht sich in regelmässiger Weise in einer gesättigten Lösung von gewöhnlichem Alaun mit einer farblosen Schicht des letzteren. Wenn man einen Krystall von Chromalaun in eine gesättigte Lösung von gewöhnlichem Alaun hängt, so dürfte sich wohl zunächst eine wenn auch noch so dünne Schicht des Krystalles auflösen, dadurch wird aber aus der den Krystall unmittelbar berührenden Schicht der Lösung des gewöhnlichen Alauns eine gewisse Menge desselben verdrängt, also ausgeschieden. Dieser Theil setzt sich an dem festen Chromalaun ab, überzieht denselben sofort mit einer für das Lösungsmittel undurchdringlichen Schicht festen Alauns, und es setzt sich nun bei weiterer Abkühlung oder bei Verdunstung des Lösungswassers Schicht auf Schicht des gelösten Alauns ab.

Die bekannten Pseudomorphosen von Rotheisenstein nach Kalkspath verdanken ihre Entstehung wohl einem ähnlichen Vorgange. Die Lösung von Eisencarbonat in kohlensäurehaltigem Wasser kommt mit dem Kalkspath in Berührung. Es löst sich etwas Kalkcarbonat auf, dadurch wird aber aus der unmittelbar berührenden Lösung ein entsprechender Theil des isomorphen Eisencarbonats verdrängt und lagert sich an der Stelle der aufgelösten Kalkverbindung ab. Der Uebergang von Eisencarbonat in Eisenoxyd wird dann als secundärer Process durch später hinzutretenden Sauerstoff der Luft bewirkt.

Die oft beobachtete Erscheinung, dass gewisse Doppelsalze aus ihrer Lösung besser krystallisiren, wenn ein Ueberschuss des einen Bestandtheils vorhanden ist, findet ihre Erklärung in obigen Versuchen: der eine Bestandtheil verdrängt das Doppelsalz, indem er dasselbe schwerer löslich macht.

Aehnlich bei den Mischkrystallen isomorpher Salze. Aus der gemeinsamen Lösung derselben scheiden sich Mischkrystalle erst dann aus, wenn, sei es durch Abnahme der Temperatur, sei es durch Verdunstung des Lösungswassers, für beide Salze die Lösung eine gesättigte geworden ist. Da aber in einer für ein bestimmtes Paar dieser Salze gesättigten Lösung diese in sehr verschiedenem Verhältniss enthalten sein können, so ist klar, dass auch die sich ausscheidenden Mischkrystalle eine sehr verschiedene Zusammensetzung zeigen.

VIII. *Zur Theorie der Fluorescenz; von E. Lommel.*

In seinem „Lehrbuch der Experimentalphysik“ hat Hr. Wüllner[1]) gegen meine Theorie der Fluorescenz[2]) einige Einwendungen erhoben.

Die Einwände betreffen folgende drei Punkte: 1) die Theorie erkläre nicht den stationären Bewegungszustand, in welchem sich der fluorescirende Körper offenbar befindet; 2) die Definition des homogenen Lichts, welche der Theorie zu Grunde liegt, sei unzulässig; 3) die Theorie gebe keine Erklärung von dem Unterschied zwischen Absorption ohne Fluorescenz und Absorption mit Fluorescenz.

Diese Punkte, welche Hr. Wüllner zur Sprache bringt, bedürfen allerdings der Erläuterung, welche zu geben der Zweck der folgenden Zeilen ist.

1) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4. Aufl. 2. p. 330 bis 334. 1883.

2) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 251. 1878.

Der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial x}{\partial t} + p^2 x + f\sin(qt+\varphi) = 0,$$

welche die Bewegung eines unter dem Einflusse eines periodischen Impulses schwingenden Körpertheilchens definirt, genügt das vollständige Integral:

$$x = M\sin(qt+\varphi-\alpha) + Ne^{-kt}\sin(rt+\psi),$$

wenn:

$$M = -\frac{f\sin\alpha}{2kq}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2-q^2}, \quad r^2 = p^2 - k^2$$

ist, und N und ψ willkürliche Constante bedeuten.

Bestimmen wir letztere mit Hülfe der Werthe x' und v', welche die Verschiebung x und die Geschwindigkeit $\partial x/\partial t$ zur Zeit $t = t'$ besitzen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} N^2 r^2 e^{-2kt'} = {} & p^2 x'^2 + 2kx'v' + v'^2 + M^2 q^2 \\ & - Mf\sin(qt'+\varphi)\sin(qt'+\varphi-\alpha) \\ & - 2M(p^2 x' + kv')\sin(qt'+\varphi-\alpha) \\ & - 2M(kqx' + qv')\cos(qt'+\varphi-\alpha)\ ^{1)} \end{aligned}$$

und:

$$\operatorname{tg}(rt'+\psi) = \frac{rx' - Mr\sin(qt'+\varphi-\alpha)}{kx'+v'-Mk\sin(qt'+\varphi-\alpha) - Mq\cos(qt'+\varphi-\alpha)}.$$

Diese Werthe der Constanten N und ψ bleiben so lange gültig, als der von der Lichtquelle ausgehende periodische Impuls $f\sin(qt+\varphi)$ ungeändert bleibt.

Tritt aber zu irgend einer Zeit eine plötzliche Aenderung der Amplitude f oder der Phase φ oder beider Grössen zugleich ein, so erfolgt auch eine plötzliche Aenderung der Werthe von N und ψ, indem nicht nur f und φ, sondern auch x' und v' andere, diesem Zeitpunkt entsprechende Werthe annehmen, und die durch das Glied:

$$Ne^{-kt}\sin(rt+\psi)$$

ausgedrückte Bewegung des Körpertheilchens beginnt jetzt mit veränderten Werthen von N und ψ von neuem.

Die Bewegung des Theilchens der Lichtquelle, von wel-

1) Der in meiner Abhandlung angegebene einfachste Werth von N:

$$N^2 r^2 = M^2 q^2$$

ergibt sich hieraus, wenn man $\varphi = 0$ und für $t' = 0$ auch $x' = 0$ und $v' = 0$ annimmt.

chem der Wellenzug $f \sin(qt + \varphi)$ ausgeht, darf man sich nun nicht als eine fortdauernd regelmässige einfache Pendelbewegung vorstellen. Es werden vielmehr innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes zahlreiche plötzliche und regellose Aenderungen nicht nur der Schwingungsrichtung, sondern auch der Amplitude und Phase eintreten.

Innerhalb desselben kurzen Zeitraumes muss daher die Bewegung des von diesem Wellenzug erregten Körpertheilchens ebenso oft mit neuen Werthen von N und ψ einsetzen; oder es werden während dieses kurzen Zeitintervalles in der Gesammtbewegung des Körpertheilchens nacheinander die verschiedensten Werthe von N, von dem grössten, welcher bei der Intensität der Anregung möglich ist, bis zu sehr kleinen herab, und ebenso die verschiedensten Werthe von ψ vertreten sein.

Die Lichtquelle besteht aber niemals aus nur einem einzigen Theilchen, sondern enthält im engen Raume zahlreiche Theilchen, welche unabhängig voneinander schwingen und dem betrachteten Körpertheilchen daher gleichzeitig Wellenzüge von allen möglichen Amplituden, welche unterhalb einer gewissen Grenze liegen, und von allen möglichen Phasen zusenden.

Es müssen daher in der Bewegung des Körpertheilchens in jedem Augenblick gleichzeitig alle möglichen Stadien der Schwingung $Ne^{-kt} \sin(rt + \psi)$ vertreten sein, mit allen möglichen Werthen von N, von einem grössten Werthe an abwärts.

Der Bewegungszustand des Körpertheilchens ist daher in jedem Augenblick der nämliche, wie im vorhergehenden oder im nachfolgenden Augenblick, er ist stationär, und bleibt stationär, solange der Bewegungszustand der Lichtquelle ebenfalls stationär bleibt.

Man könnte diesen stationären Zustand ersetzt denken durch eine Bewegung von der Form $Ne^{-kt} \sin(rt + \psi)$, welche mit einem unverändert bleibenden Werthe von N, den man als stationären Werth bezeichnen könnte, nach sehr kurzen Zeitintervallen immer wieder von neuem beginnt, darum aber

nicht minder in jedem Augenblick dem durch diesen Ausdruck vorgeschriebenen Bewegungsgesetz gehorcht.

Nicht nur die Fluorescenz (und Phosphorescenz, denn auch diese wird von der in Rede stehenden Theorie mit umfasst), sondern jedes Selbstleuchten oder überhaupt die Emission von Strahlen beruht nach meiner Anschauung auf einem derartigen Bewegungszustand der strahlenden Körpertheilchen. In einem glühenden Körper z. B. schwingen dessen Theilchen (Molecüle) unter dem Einfluss der zwischen den Molecülen thätigen intermolecularen Kräfte, wie im Molecül eines fluorescirenden Körpers die Atome unter dem Einfluss intramolecularer Kräfte, jedoch nicht ohne einen Widerstand zu erleiden, der die Schwingungen nach dem obigen Gesetz dämpft. Durch immer neue von verschiedenen Seiten kommende Impulse, welche das schwingende Theilchen empfängt (durch Wärmezufuhr, chemische und electrische Processe u. s. w.) wird dasselbe in den soeben geschilderten stationären Bewegungszustand versetzt, welcher erst dann aufhört, stationär zu sein, wenn jene Impulse erlahmen oder ganz aufhören. Dann erst tritt das Abklingen der ganzen Bewegung ein, welches bei fluorescirenden Körpern in sehr kurzer Zeit (es ist nur bei wenigen im Phosphoroskop überhaupt wahrnehmbar), bei phosphorescirenden und glühenden Körpern in längerer Zeit verläuft.[1])

Schreiben wir aber den Theilchen der Lichtquelle einen stationären Bewegungszustand von dieser Beschaffenheit zu, so erhellt, dass das Zusammenwirken zahlreicher Theilchen der Lichtquelle, wie es oben vorläufig angenommen wurde, gar nicht einmal nothwendig ist, um den stationären Zustand eines fluorescirenden Körpertheilchens herbeizuführen, sondern dass hierzu schon die Anregung durch ein einziges Theilchen der Lichtquelle ausreichen würde.

Wir gehen nun über zu dem zweiten Punkte, nämlich zum Begriffe des homogenen Lichtes.

---

1) Ich habe die hier ausführlicher dargelegte Anschauung über den Schwingungszustand strahlender Körper bereits in einem früheren Aufsatz (Wied. Ann. **16.** p. 440. 1882) durch die Worte „immer neue Anregung“ angedeutet.

Homogen nennen wir, unabhängig von jeder Theorie, Licht von ganz bestimmter, für ein und dasselbe Mittel unveränderlicher Brechbarkeit.

Im Sinne der Wellentheorie ist das Licht als periodische Bewegung oder als zusammengesetzt aus periodischen Bewegungen anzusehen. Jede periodische Bewegung aber lässt sich als eine Summe betrachten aus periodischen Bewegungen der einfachsten Art, die nach dem Sinusgesetz erfolgen, oder sie kann linear in solche einfachste Bewegungen zerlegt werden, deren jede durch die Gleichung:

$$x = A \sin (qt + \varphi)$$

ausdrückbar ist, wo $q/2\pi$ die Schwingungszahl, φ eine beliebige Phase der schwingenden Bewegung bedeutet.

Jede auf dem Boden der Wellenlehre stehende besondere Lichttheorie, wie sie auch sonst geartet sein mag, formulirt die ihr zu Grunde liegenden Ideen in einem System partieller linearer Differentialgleichungen, welche die Vorgänge bei der Fortpflanzung des Lichtes in irgend einem Mittel definiren.

Um die Bedingungen dieser Fortpflanzung in einem isotropen Mittel (auf welches wir uns hier beschränken) kennen zu lernen, ist es hinreichend, die Fortpflanzung einer solchen einfachen pendelartigen Bewegung zu verfolgen, indem man:

$$\xi = A e^{-Ky} \sin \left(qt - \frac{q}{c} y - \psi \right),$$

wo y den Abstand eines schwingenden Theilchens des fortpflanzenden Mittels vom Anfangspunkt, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und K den Absorptionscoëfficienten bedeutet, in die Differentialgleichungen substituirt, und nun die Constanten c, K und ψ so bestimmt, dass den Gleichungen genügt wird.

Es ergeben sich alsdann c, K und ψ als Functionen der willkürlich bleibenden Grösse q.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ist demnach einzig von der Schwingungszahl $q/2\pi$ der fortgepflanzten einfach pendelartigen (Sinus-)Schwingung abhängig. Einer solchen schwingenden Bewegung kommt demnach eine ganz bestimmte

Fortpflanzungsgeschwindigkeit und sonach kraft des Huygens'schen Princips eine ganz bestimmte Brechbarkeit zu.

Homogenes Licht wird daher nur durch einfach pendelartige, d. i. nach dem reinen Sinusgesetz erfolgende Schwingungen hervorgebracht.

Dieser Satz ist, wie man aus den vorstehenden Darlegungen ersieht, bisher allgemein, wenn auch stillschweigend als selbstverständlich angenommen worden. Er bildet ein wesentliches Fundament sämmtlicher Lichttheorien, welche ohne ihn sofort in sich zusammenbrechen.

Besteht die von der Lichtquelle ausgehende Bewegung:

$$x = \sum A_n \sin(q_n t + \varphi_n)$$

aus mehreren, oder vielen, oder sogar unendlich vielen einfachen pendelartigen Schwingungen von beliebig verschiedenen Perioden, so ergibt sich wegen der linearen Natur der Differentialgleichungen deren entsprechendes Integral:

$$\xi = \sum A_n e^{-K_n y} \sin\left(q_n t - \frac{q_n}{c_n} y - \psi_n\right),$$

welches zeigt, dass in einem lichtbrechenden Mittel jede Sinusschwingung, deren Schwingungszahl $q_n/2\pi$ ist, sich mit der zugehörigen Geschwindigkeit c_n fortpflanzt.

Durch die Dispersion in einem Prisma wird daher jene zusammengesetzte Lichtbewegung in einfache pendelartige Schwingungen zerlegt, welche, wenn die Werthe q_n eine discontinuirliche Reihe bilden, als getrennte helle Linien im Spectrum erscheinen. Die Spectralanalyse ist als Zerlegung zusammengesetzten Lichts in seine homogenen Bestandtheile ganz analog der Zerlegung eines Klanges in seine einfachen Partialtöne, nur dass die Optik in der Dispersion (und der Diffraction) über ein vollkommneres Mittel zu dieser Zerlegung verfügt, als die Akustik, welche, da es keine Dispersion des Schalles gibt, auf die Anwendung der Resonanz zu diesem Zwecke beschränkt ist.

In dem obigen Ausdruck für die Theilchen der Lichtquelle sind A_n, φ_n und q_n willkürliche Grössen, welchen wir jeden beliebigen besonderen Werth beilegen können. Setzen wir z. B.:

$$A_n = \frac{k\delta}{\pi(k^2 + n^2\delta^2)}, \qquad q_n = r + n\delta, \qquad \varphi_n = \varphi,$$

so entspricht der Bewegung der Lichtquelle:

$$x = \frac{k}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin\left((r + n\delta)t + \varphi\right)}{k^2 + n^2\delta^2} \delta$$

die im brechenden Mittel fortgepflanzte Bewegung:

$$\xi = \frac{k}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-K_n y} \cdot \frac{\sin\left((r + n\delta)t - \frac{r + n\delta}{c_n} y - \psi_n\right)}{k^2 + n^2\delta^2} \delta,$$

wo K_n, c_n, ψ_n bekannte (aus den Differentialgleichungen bestimmte) Functionen von $r + n\delta$ sind, und δ eine beliebige Grösse ist, die man so gross oder so klein annehmen kann, als man nur immer will.

Lassen wir δ unendlich klein ($= dz$) werden, und setzen wir $n\delta = z$, so verwandeln sich die vorstehenden Ausdrücke in die bestimmten Integrale:

$$x = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left((r + z)t + \varphi\right)}{k^2 + z^2} dz$$

und:
$$\xi = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ky} \cdot \frac{\sin\left((r + z)t - \frac{r + z}{c} y - \psi\right)}{k^2 + z^2} dz,$$

von denen das letztere den Differentialgleichungen der Lichtbewegung in dem brechenden Mittel als particuläres Integral genügt, falls c, K und ψ als Functionen von $r + z$ diesen Gleichungen gemäss bestimmt sind.[1]

---

1) Man kann den obigen Gedankengang noch allgemeiner fassen. Genügt:

$$\xi = e^{-Ky} \sin\left(qt - \frac{q}{c} y - \psi\right)$$

den linearen partiellen Differentialgleichungen, indem c, K und ψ als Functionen von q entsprechend bestimmt sind, und betrachtet man nun q als eine beliebige Function einer Veränderlichen z, so genügt auch das Integral:

$$\xi = \int_a^b e^{-Ky} \sin\left(qt - \frac{q}{c} y - \psi\right) dz$$

Das erstere Integral ist aber identisch mit dem Ausdruck $e^{-kt}\sin(rt+\varphi)$, d. h. man hat, wenn k nicht Null ist

$$\frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left((r+z)t+\varphi\right)}{k^2+z^2}dz = e^{-kt}\sin(rt+\varphi).$$

Die nach dem Schwingungsgesetz:

$$x = Ne^{-kt}\sin(rt+\varphi)$$

erfolgende Bewegung stellt demnach kein homogenes Licht dar, sondern sie ist gleichbedeutend mit einer Reihe von unendlich vielen pendelartigen Schwingungen mit unendlich kleinen Amplituden, deren Schwingungszahlen sich in stetiger Aufeinanderfolge der „Hauptschwingungszahl“ $r=\sqrt{p^2-k^2}$ zu beiden Seiten anschliessen, während die Amplituden von dieser mittleren Hauptschwingung nach beiden Seiten hin stetig abnehmen.

In einem brechenden Mittel pflanzt sich jede dieser pendelartigen Schwingungen mit der zugehörigen Geschwindigkeit $c=F(r+z)$ fort.

Das jenes Schwingungsgesetz befolgende Licht wird daher durch das Prisma in ein continuirliches Spectrum ausgebreitet, welches sich von der der Hauptschwingungszahl r entsprechenden Stelle aus nach beiden Seiten hin mit abnehmender Intensität erstreckt.

Diese Sätze sind eine unausweichliche Consequenz des obigen, als selbstverständlich allgemein angenommenen Satzes.

Sie sind anwendbar nicht blos auf Fluorescenz und Phosphorescenz, sondern auch auf die Strahlung glühender oder überhaupt warmer Körper, von welchen wir, wie oben bereits erwähnt wurde, annehmen, dass ihre intermolecularen Schwingungen, welche nichts anderes als Wärmeschwingungen sind, nach demselben Gesetze vor sich gehen.

---

jenen Differentialgleichungen, da jedes seiner Elemente ihnen schon für sich Genüge leistet.

Der Fourier'sche Lehrsatz ist, wie man sieht, zur Ableitung dieser Resultate nicht nothwendig.

Die lebendige Kraft dieser Schwingungen der Molecüle ist dem Quadrate des stationären Werthes N proportional, oder N^2 ist proportional der absoluten Temperatur des strahlenden Körpers und nur von dieser abhängig.

Damit die Strahlung auf unsere Sinne oder auf unsere Instrumente wirke und dadurch wahrgenommen werde, muss sie eine gewisse Intensität erreicht haben, bei welcher sie, wie wir sagen wollen, die „Wahrnehmungsschwelle" überschreitet.

In dem continuirlichen Strahlencomplex, in welchen jene schwingende Bewegung sich zerlegen lässt, werden, wenn wir zu höheren Temperaturen, also zu grösseren Werthen des Factors N übergehen, zuerst die intensivsten Bestandtheile, nämlich die Hauptschwingung und die ihr zunächst benachbarten, die Wahrnehmungsschwelle erreichen und überschreiten.

Da wir nun bei einem Körper von relativ niedriger Temperatur nur dunkle ultrarothe Strahlen beobachten, so schliessen wir, dass die Hauptschwingung der intermolecularen Wärmebewegung in das ultrarothe Gebiet fällt.

Wächst die Temperatur und mit ihr der stationäre Werth von N, so dehnt sich das Spectrum von dieser ultrarothen Hauptschwingung an nach beiden Seiten hin aus, indem immer neue Schwingungen über die Wahrnehmungsschwelle sich erheben und die bei niedrigerer Temperatur bereits wahrnehmbar gewordenen ihre Intensität steigern.

Der Körper fängt an, in dunkler Rothgluth sichtbar zu werden, wenn die Temperatur so weit gestiegen ist, dass die Intensität der äussersten rothen Strahlen die Empfindungsschwelle unseres Auges überschreitet. Dann kommen bei den höheren Hitzegraden immer brechbarere Strahlengattungen hinzu, bis das Spectrum bei der höchsten Weissgluth bis ins Ultraviolett sich erstreckt.

Dabei bleibt das Maximum der Strahlungsintensität, indem es sich verstärkt, im Ultraroth an der Stelle der Hauptschwingung liegen.

Da der stationäre Werth von N, von dessen Grösse es abhängt, ein wie grosser Theil des Strahlencomplexes über

die Wahrnehmungsschwelle emporragt, nur von der Temperatur abhängig ist, so folgt noch, dass die verschiedenen Stadien des Glühens, die dunkle und helle Rothgluth, die Gelbgluth, die Weissgluth bei allen festen Körpern bei derselben Temperatur eintreten.

Hr. Wüllner meint, „man könne in diesem Falle“ (nämlich wenn man, wie ich es thue, nur die nach dem reinen Sinusgesetz vor sich gehenden Schwingungen als homogenes Licht gelten lässt) „überhaupt kein künstliches homogenes Licht darstellen, da wir keine Lichtquelle von absolut constanter Intensität besitzen; jede Schwankung in der Lichtstärke müsste sich dann in ähnlicher Weise geltend machen. Denn während der Aenderung der Lichtstärke ist die Amplitude eine Function der Zeit, welche sich nach dem Fourier'schen Satze in eine Sinusreihe entwickeln lässt. Es müsste daher, wenn man dieser Zerlegung eine physische Bedeutung beilegen dürfte, jede Lichtquelle uns ein mehr oder weniger zusammengesetztes, und zwar, da das Gesetz der Schwankung der Lichtstärke nicht immer dasselbe ist, ein sehr variables Spectrum liefern“.

Als homogene Lichtquellen verwenden wir glühende Gase oder Dämpfe, z. B. die Natriumflamme.

Für jede der zahlreichen Einzelschwingungen von der Form $Ne^{-kt}\sin(rt+\varphi)$, welche die Lichtquelle gleichzeitig aussendet, ist der Factor N, wie die Differentialgleichung der Bewegung es fordert, von der Zeit unabhängig. Wenn die Intensität sich ändert, z. B. abnimmt, so geschieht dies, indem die Schwingungen mit den grössten Werthen von N spärlicher werden oder ganz verschwinden, und dadurch die mittlere lebendige Kraft der Gesammtbewegung, d. i. die Temperatur, sich verringert. Die Beschaffenheit des Spectrums des ausgestrahlten Lichtes, welche nur von den dem strahlenden Körper eigenthümlichen Werthen von k und $r=\sqrt{p^2-k^2}$ abhängt, ändert sich dabei nicht oder höchstens in der Weise, dass von der Hauptschwingung entferntere Strahlenarten unter die Schwelle der Wahrnehmbarkeit herabsinken oder bei steigender Temperatur sich darüber erheben. Ist insbesondere der leuchtende Körper ein Gas, für welches nach unserer

Annahme[1]) k Null oder nahezu Null ist, so ist das Licht der Einzelschwingung $N \sin(pt + \varphi)$ homogen und bleibt homogen, wie auch die Lichtstärke sich ändern mag.

Homogenes Licht erhalten wir ferner, indem wir das von einem glühenden Körper kommende Licht in ein reines continuirliches Spectrum ausbreiten und aus diesem mittelst eines Spaltes eine schmale Partie herausschneiden. Es ist nach dem bereits Gesagten von selbst klar, dass auf diesen Spalt stets Licht von der nämlichen Brechbarkeit treffen muss, wie auch die Intensität der Lichtquelle sich verändern mag.

Hr. Wüllner fährt fort: „Die Unzulässigkeit dieser Deutung einer verklingenden Welle tritt noch klarer hervor, wenn wir die analogen Erscheinungen des Schalles betrachten. Jeder Ton einer Stimmgabel, jeder Ton einer geschlagenen Saite, ja jeder durch einen Resonanzboden verstärkte Klang nimmt nach einem ähnlichen Gesetze ab. Unser Ohr nimmt nun in der That die einfachen Theiltöne eines Klanges wahr. Würde demnach die mathematische Zerlegung einer verschwindenden Welle in eine Sinusreihe auch physikalische Wirklichkeit zuzuschreiben sein, so könnte es keinen reinen Stimmgabelton geben; die Stimmgabel, jede schwingende Saite, jedes mit einem Resonanzboden versehene Instrument müsste bei jeder Erregung das wirreste Tongemisch geben. Wir wissen dagegen, dass der Stimmgabelton bis zum vollen Verschwinden derselbe und ganz rein bleibt, ebenso bleibt die Farbe eines verschwindenden Klanges gleich derjenigen, welche der Klang bei constanter Stärke besass.“

Eine in der Luft schwingende Stimmgabel, Saite u. s. w. erfährt nur sehr geringe Dämpfung, sie vollführt sehr viele Schwingungen, ehe die Amplitude sich merklich ändert; es ist in diesem Falle k nahezu gleich Null, und wir vernehmen deshalb einen reinen einfachen Ton. Um Verhältnisse herbeizuführen, welche denjenigen der Fluorescenz analog sind, muss man stärkere Dämpfung anwenden, indem man die Stimmgabel in einer Flüssigkeit, in Wasser, Quecksilber u. s. w.

---

1) Lommel, Wied. Ann. **3.** p. 266. 1878.

schwingen lässt. Dass unter diesen Umständen ein tieferer Ton entsteht, ist schon mehrfach[1]) beobachtet worden. Durch einen sehr einfachen Versuch kann man sich davon überzeugen. Taucht man die Zinken einer schwingenden Stimmgabel in Quecksilber, so sinkt der Ton sofort in die Tiefe und verklingt sehr rasch. Man bemerkt aber ausserdem, dass dieser tiefere Ton ein andere Klangfarbe besitzt, als ein reiner Stimmgabelton, er klingt nicht so rein und so weich, wie der einer frei schwingenden Stimmgabel von derselben Tiefe. Das Ohr wird naturgemäss die Tonlage nach der in dem Klange am stärksten vertretenen Hauptschwingung $r = \sqrt{p^2 - k^2}$ taxiren, und die Abweichung von der reinen Sinusschwingung nur als Aenderung der Klangfarbe wahrnehmen. „Das wirreste Tongemisch," welches Hr. Wüllner befürchtet, tritt allerdings nicht ein und ist nach der Theorie auch nicht zu erwarten.

Die aus der Akustik herangezogenen Analogien sprechen also nicht gegen, sondern für meine Theorie.

Wir kommen nun zu dem dritten Einwurf, nämlich, dass die Theorie den Unterschied zwischen Absorption ohne Fluorescenz und Absorption mit Fluorescenz nicht erkläre.

Die Theorie verlangt, dass die Hauptschwingung ($r = \sqrt{p^2 - k^2}$), d. i. das Intensitätsmaximum des Fluorescenzspectrums, tiefer liege, als das Maximum der Absorption; sie verlangt aber nicht, dass sie nothwendig in das Bereich des sichtbaren Spectrums falle. Sie kann vielmehr, und mit ihr das ganze Fluorescenzspectrum, soweit es über die Wahrnehmungsschwelle reicht, wenn k hinreichend gross ist, in dem Ultraroth liegen und demnach unsichtbar bleiben.

Hr. Linhardt[2]) hat für eine Reihe fluorescirender Substanzen die Werthe von k nach meiner Theorie berechnet, indem er den Werth für das Chlorophyll als Einheit annahm. Diese Werthe erheben sich von $k = 1$ bis $k = 4{,}65$. Nehmen wir beispielsweise für das stark absorbirende Cyanin, dessen

---

1) Auerbach, Wied. Ann. **3.** p. 157. 1878. — Montigny, Bull. de l'Ac. Roy. Belg. (2) **50.** p. 158. 1880. Beibl. **5.** p. 248. 1881.

2) Linhardt, Erlanger Sitzungsber. **14.** p. 128. 1882. Beibl. **7.** p. 600. 1883.

Absorptionsstreif bei $\lambda = 0{,}590$ liegt, den Widerstandscoëfficienten $k = 5$ an, also nur wenig höher als der grösste bei fluorescirenden Körpern gefundene Werth, so berechnet sich aus der Theorie die Wellenlänge des Fluorescenzmaximums $\lambda = 0{,}767$; dasselbe würde demnach ins Ultraroth fallen und nicht gesehen werden.

Die absorbirenden Körper, welche kein Fluorescenzlicht zeigen, können hiernach als solche betrachtet werden, deren durch Insolation erregte intramoleculare Strahlung ins Ultraroth fällt.

Der Satz, welcher in meiner Abhandlung den Uebergang von der Theorie der Absorption zu derjenigen der Fluorescenz bildet, nämlich: „Werden die Atome eines Körpers durch den periodischen Impuls zum Selbstleuchten gebracht, so nennen wir diesen Leuchtprocess Fluorescenz," ist sonach ganz correct; er sagt durchaus nicht, „dass alle absorbirenden Körper, welche im sichtbaren Spectrum Absorptionsstreifen zeigen, auch fluorescirende (d. i. sichtbare Strahlen emittirende) sein müssen". Er beschränkt nur den Ausdruck Fluorescenz dem herrschenden Sprachgebrauch gemäss auf eine sichtbare Strahlung, während die Theorie selbst eine mit der Fluorescenz dem Wesen nach identische unsichtbare Strahlung keineswegs ausschliesst.

Die Einwände, welche Hr. Wüllner gegen meine Theorie der Fluorescenz erhoben hat, sind demnach nicht haltbar.

IX. *Spectralphotometrische Untersuchungen einiger photographischer Sensibilisatoren;* *von J. B. Messerschmitt.*

Zahlreiche Forscher haben die Absorption diaphaner Medien zu ihrem Studium gemacht. Die meisten beschränkten sich darauf, die Lage der Absorptionsstreifen anzugeben, und erwähnten nur nebenbei die Intensität. Es dürfte aber gerade eine genaue Beachtung der Intensität für eine gewisse

Concentration, Schichtdicke und bei einem bestimmten Lösungsmittel als sehr wesentlich für die Charakteristik eines Absorptionsspectrums angesehen werden. Dass hierbei blosse Schätzungen nicht genügenden Anhalt zu geben im Stande sind, möge daraus hervorgehen, dass genaue Messungen des vielfach untersuchten Absorptionsspectrums des Chlorophylls andere Werthe für die Intensitätsvertheilung ergaben, als blosse Schätzungen. Während nämlich alle Beobachter den ersten Streifen im Roth für den dunkelsten hielten, ergab die spectralphotometrische Untersuchung von Wolkoff[1]), dass die stärkste Lichtabsorption im brechbareren Theile des Spectrums, etwa von F nach H hin stattfindet, und dass, selbst in den helleren Regionen zwischen den Streifen V und VI einer Chlorophylllösung, die Absorption stärker ist, als in Streifen I.

Ueber die Bestimmung der Lichtabsorption in farbigen Medien sind nur wenig ältere Untersuchungen vorhanden, so von Beer[2]) und Glan[3]). Dieselben beschränkten sich auf die Absorption des durch rothes Glas gegangenen Lichtes in Salzlösungen von verschiedenen Concentrationen. Bunsen und Roscoe[4]) untersuchten Lösungen von rother Tinte, und endlich Zöllner[5]) dunkelgrau erscheinende Mischungen verschiedener Salzlösungen. Durch diese Arbeiten wurde festgestellt, dass das Licht bei seinem Durchgange durch jede neue Schicht immer den gleichvielten Theil seiner Intensität verliert. Mit der Einführung des Spectralphotometers durch K. Vierordt[6]) wurde auch die Photometrie der Absorptionsspectra zu einem der wichtigsten Hilfsmittel sowohl der quantitativen chemischen Analyse, als auch zur Lösung

1) Wolkoff, „Die Lichtabsorption in den Chlorophyllösungen." Heidelberg 1876.

2) Beer, Pogg. Ann. **86**. p. 78. 1852.

3) Glan, Pogg. Ann. **141**. p. 58. 1870.

4) Bunsen u. Roscoe, Pogg. Ann. **101**. p. 235. 1857.

5) Zöllner, Pogg. Ann. **109**. p. 244. 1860.

6) Vierordt, Die Anwendung des Spectralapparates zur Messung farbigen Lichtes. Tübingen 1871. Die Anwendung des Spectralapparates zur Photometrie der Absorptionsspectren. Tübingen 1873. Die Anwendung des Spectralapparates zur quantitativen Analyse. Tübingen 1876.

mancher wichtiger Fragen auf dem Gebiete der Physik und durch die Arbeiten von Vierordt, Glan, Gouy, Trannien, H. C. Vogel, Govi, Crova, Hennig, Hüfner, Ketteler, Pulfrich u. a. wurde die Brauchbarkeit nach verschiedenen Richtungen genügend festgestellt.

In der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich, aus einer grösseren Reihe von mir im Winter 1884—85 untersuchter Absorptionsspectra einige Resultate mitzutheilen, und wähle hierzu farbige Lösungen, welche in der Photographie durch ihre sensibilisirende Wirkung von Bedeutung geworden sind. Ich benutzte zur Untersuchung das von Prof. H. C. Vogel modificirte Glan'sche Spectralphotometer[1]), welches das astrophysikalische Observatorium besitzt und mir von Hrn. Prof. Vogel gütigst zur Verfügung gestellt worden war. Als Lichtquelle bei den Messungen diente eine Petroleumflamme, deren Licht durch eine matte Scheibe ging, ehe es die Absorptionsflüssigkeit traf. Die Einstellungen geschahen immer doppelt, und wurde dasselbe Spectrum mehrfach betrachtet. Die Beobachtungen sind graphisch ausgeglichen, und sind die so erhaltenen Werthe auf 1—2 Proc. sicher.

Die photographischen Verfahren beruhen auf der Wirkung des Lichtes auf Silbersalze. Bei den letzteren (besonders bei Bromsilber), wie sie zu photographischen Platten verwendet werden, wirken bei mässig langer Belichtung nur die Strahlen von kürzeren Wellenlängen, nämlich die blauen, violetten und ultravioletten. Durch Zusatz von gewissen Substanzen wird die Lichtwirkung auf Silberhaloïde modificirt, und sind in dieser Beziehung gewisse Farbstoffe von Interesse, welche die Empfindlichkeit der photographischen Platten (resp. des Bromsilbers) für die Strahlen von längeren Wellenlängen vermehren. Solche Körper sind „optische Sensibilisatoren" genannt worden. Manche Körper zeigen aber die Eigenschaft, dass sie die Zersetzung durch das Licht im allgemeinen beschleunigen, und solchen wurde der Name „chemische Sensibilisatoren" beigelegt. Die optischen Sen-

1) H. C. Vogel, Monatsber. der Berl. Acad. März 1877. p. 104.

sibilisatoren verlangen die Gegenwart eines chemischen Sensibilisators. Mit Hülfe solcher Sensibilatoren gelingt es, das ganze Spectrum vom Roth bis zum äussersten Violett zu photographiren.

Draper[1]) hat zuerst gezeigt, dass alle Lichtstrahlen, welche auf eine Substanz chemisch wirken, von dieser absorbirt werden. Später stellte Schultz-Sellack darauf bezügliche Untersuchungen an und gelangte zu demselben Resultate. Die meisten Untersuchungen auf diesem Gebiete hat jedoch H. W. Vogel ausgeführt, und in neuester Zeit beschäftigte sich auch Eder eingehend mit diesen Beziehungen.

Um die Empfindlichkeit des Bromsilbers, wie solches zu Gelatinetrockenplatten hauptsächlich verwendet wird, für gewisse Farben (Grün, Gelb und Roth) zu erhöhen, bringt man, wie schon oben bemerkt, einen Farbstoff damit in Berührung, der jenen Theil des Spectrums absorbirt, für welchen man die Schicht empfindlich machen will. Der Farbstoff wird entweder der Bromsilberemulsion zugesetzt, oder die fertigen ungefärbten Platten werden in einer verdünnten Lösung desselben einige Minuten gebadet. Früher schon beim Collodionverfahren angewandt, ist es erst in neuerer Zeit gelungen, auch Gelatinetrockenplatten in der angegebenen Weise zu sensibilisiren. Merkwürdig ist es nun, dass das Maximum der hervorgebrachten photographischen (sensibilisirenden) Wirkung nicht genau mit dem Absorptionsstreifen, welchen die Substanz bei durchgehendem Lichte zeigt, zusammenfällt, sondern mehr nach Roth hin liegt. Vogel sucht diese Eigenthümlichkeit auf das Kundt'sche Gesetz zurückzuführen, wonach der Absorptionsstreifen nach Roth hinrückt, wenn das Brechungsvermögen des den Farbstoff einschliessenden Mediums zunimmt. Auch bei den folgenden Versuchen ist der Farbstoff mit dem Bromsilber in Gelatine, d. h. in einem stark brechbaren Medium eingeschlossen. Die photographischen Versuche habe ich in derselben Weise, wie Dr. Lohse[2]) ausgeführt, indem ich dabei englische Gelatine-

1) Draper, Phil. Mag. **19.** p. 195; **51.** p. 161.
2) Lohse, Phot. Archiv. **25.** p. 125.

platten und den von Dr. Lohse construirten Spectrographen[1]) benutzte[2]).

Eosin.

Eosin (gelbstichig) ist in Wasser leicht löslich, gibt eine orangefarbige Flüssigkeit und fluorescirt grün. Die sensibilisirende Wirkung desselben wurde zuerst von Waterhouse[3]) entdeckt und auf Collodionplatten mehrfach angewendet. In neuerer Zeit benutzt man es auch, um Gelatine-Trockenplatten damit für die weniger brechbareren Theile des Spectrums empfindlich zu machen. Lohse gab hierzu das folgende sehr einfache Verfahren[4]):

Belichtet man eine gewöhnliche Bromsilber-Gelatinetrockenplatte in einem Spectrographen, so geht die Wirkung vom äussersten Violett bis Grün (zwischen F und b). Badet man aber eine solche Platte in sehr verdünnter wässeriger Lösung von Eosin ca. 2 Minuten und belichtet dieselbe nach dem Trocknen, so findet noch eine photographische Wirkung bis D statt, und zwar ist zwischen D und E (genauer 585 bis 545 Milliontelmillimeter Wellenlänge) die Wirkung so stark wie im Blau, während zwischen E und F die Wirkung etwas schwächer ist. Hierbei ist es vortheilhaft, die Platte nach dem Bade gut abzuwaschen, um etwaige Fleckenbildung zu vermeiden.

---

1) Lohse, Zeitschr. für Instrumentenkunde. 5. Jahrg. p. 11. 1885.

2) Ueber die älteren Versuche mit Sensibilisatoren (beim Collodionverfahren) hat Eder: Ueber die chemischen Wirkungen des farbigen Lichtes, Wien 1879, eine umfangreiche Zusammenstellung gegeben. Ueber die neueren Versuche, besonders mit Gelatinetrockenplatten siehe O. Lohse, Liesegang's photograph. Archiv. **25.** p. 125, 141, 221. 1884. — H. W. Vogel, Photogr. Mittheilungen 1884. — Schumann, Photogr. Wochenschrift. 1884 — und besonders J. M. Eder, Wien. Ber. **90.** II. Abth. 1884, woselbst über Versuche mit einer grossen Anzahl Sensibilisatoren berichtet und der Zusammenhang zwischen Absorption der Farbstoffe und deren sensibilisirende Wirkung für Bromsilbergelatine besprochen wird.

3) Waterhouse, Pogg. Ann. **159.** p. 616. 1876. — Phot. Mitth. **14.** p. 16.

4) Lohse, Phot. Archiv **25.** p. 125. und Phot. Mitth. **21.** p. 118.

Betrachtet man das Absorptionsspectrum einer solchen Lösung direct, so fällt sofort auf, dass die photographische Wirkung des Eosins im Gelb nicht an der Stelle erscheint, wo der Absorptionsstreifen in wässeriger Lösung sich befindet, sondern mehr gegen Roth verschoben ist. Ein durch ein mit Eosin gefärbtes Gelatineplättchen[1]) gesehenes Spectrum zeigt auch den Absorptionsstreifen nach Roth hin verschoben, jedoch nicht so weit, wie die photographische Wirkung auf der Platte. Man ersieht dies deutlich aus folgenden Zahlen, welche Milliontelmillimeter der Wellenlängen angeben.

	Mitte
Sensibilisirende Wirkung auf der Platte	565
Absorption durch Eosin in Gelatine	536
„ „ „ „ Glycerin in 1 mm Schichtdicke	520
„ „ „ „ Wasser in 1 mm Schichtdicke	517

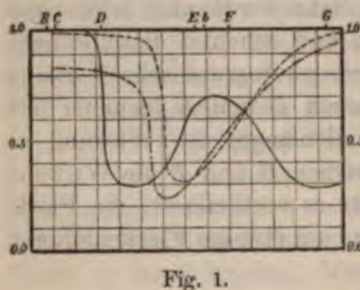


Fig. 1.

Am deutlichsten sieht man die Verschiebung bei Betrachtung von Fig. 1, in welcher die photometrisch gemessene Absorption von Eosin in wässeriger Lösung (Curve ----) und in Gelatine (Curve —·—·—·), nebst der photographischen Wirkung auf der Platte (Curve —) gegeben ist.

Um zu zeigen, in welcher Weise die Absorption von der Concentration der Farbstofflösung abhängt, möge folgende Tabelle dienen:

Concentration in Proc.	Schicht 10 mm		Schicht 1 mm		Gelatinefolie	
	Anfang	Ende	Anfang	Ende	Anfang	Ende
$^1/_2$	575	—	557	—	—	—
$^1/_4$	571	—	551	—	—	—
$^1/_8$	563	—	542	—	—	—
$^1/_{16}$	555	—	539	482	551	518
$^1/_{32}$	552	447	537	498	549	520
$^1/_{64}$	549	460	536	500	548	522
$^1/_{128}$	542	474	535	501	547	524
$^1/_{256}$	537	490	533	502	545	526

1) Die von mir benutzten Plättchen besassen eine Dicke von ca. 0,04 mm.

Hierin begrenzen die dreistelligen Zahlen Anfang und Ende des Absorptionsstreifens im Spectrum durch Angabe der Wellenlänge in Milliontelmillimetern. Die Werthe sind, wie nicht anders zu erwarten stand, bis zu drei Einheiten unsicher (namentlich im Blau), wo die Absorption nur allmählich beginnt. Bei starker Concentration verschwand das Violett fast ganz, es entstand dann ein völlig dunkler Absorptionsstreifen, der sich bei zunehmender Verdünnung der farbigen Lösung verschmälerte und allmählich selbst die Farbe hervortreten liess.

Zur Erläuterung der Helligkeitsvertheilung in einem solchen Absorptionsspectrum möge die nachfolgende Tabelle dienen:

Lichtabsorption von Eosin.

Wellen-länge Mill.-Mm.	$^1/_{512}$ Proc. in Wasser bei 1 mm Schicht-dicke		$^1/_{512}$ Proc. in Gelatinefolie		in Glycerin bei 1 mm Schicht-dicke	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
666	0,990	0,0044	0,830	0,0809	0,990	0,0044
598	0,978	0,0098	0,818	0,0873	0,972	0,0123
574	0,972	0,0123	0,800	0,0969	0,952	0,0214
552	0,955	0,0200	0,730	0,1367	0,800	0,0969
545	0,925	0,0339	0,470	0,3279	0,600	0,2219
539	0,886	0,0526	0,260	0,5850	0,410	0,3872
528	0,718	0,1439	0,225	0,6478	0,370	0,4318
517	0,580	0,2366	0,315	0,5017	0,385	0,4145
500	0,605	0,2183	0,470	0,3279	0,487	0,3125
485	0,700	0,1549	0,610	0,2147	0,600	0,2219
460	0,880	0,0555	0,870	0,0605	0,782	0,1068
439	0,980	0,0088	0,938	0,0278	0,867	0,0620

Hierin bedeuten die Zahlen in der Columne der „Lichtstärken“ die Intensitäten des durchgelassenen Lichtes, wenn die Intensität des ursprünglichen Lichtes gleich Eins gesetzt wird. Die Extinctionscoëfficienten sind die negativen Logarithmen der Lichtstärken. Die Zahlen beruhen auf mehreren Beobachtungen und sind graphisch ausgeglichen.

Eosin ist einer der charakteristischsten Sensibilisatoren, indem es die Wirkung sehr deutlich zeigt. Eder untersuchte ausser Eosin gelbstichig noch verschiedene ihm verwandte Eosinfarben und fand, dass sie sämmtliche gute Sensibilisatoren für Grün, Gelbgrün und eventuell für Gelb sind, und

dass die Wirkung derselben leicht nachzuweisen ist. Z
diesen Farbstoffen gehört auch das Cyanosin und das Me
thyleosin, von welchen ich ebenfalls spectralphotometrisch
Messungen gemacht habe.

Cyanosin

ist in Alkohol leicht löslich. Die rosafarbene Flüssigke
fluorescirt olivenbraun und zeigt einen kräftigen Absorption
streifen im Anfang des Grün. Durch Ammoniakzusatz i
keine Aenderung des Absorptionsstreifens zu bemerke
Photographisch wirkt Cyanosin ohne Ammoniak nur wen
sensibilisirend, nach Zusatz von Ammoniak dagegen fin
eine ausgesprochene Wirkung von *F* bis *D* statt, mit eine
Maximum bei 570 Milliontelmillimeter W. L. Zwischen 5
und 494 Milliontelmillimeter W. L. ist die Wirkung etw
schwächer. Das Maximum im Gelb ist jedoch nicht so sta
wie bei Eosin.

Spectralphotometrische Messungen ergaben folgend
Werthe:

Lichtabsorption von Cyanosin.

Wellen-länge Mill.-Mm.	1/100 Proc. in verdünntem Alkohol (ammoniakalisch) 1 mm Schichtdicke		1/100 Proc. in verdünntem Alkohol (ammoniakalisch) in Gelatine	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
666	0,974	0,0114	0,930	0,0315
598	0,907	0,0424	0,764	0,1169
573	0,733	0,1349	0,540	0,2676
559	0,505	0,2967	0,255	0,5935
552	0,400	0,3979	0,260	0,5850
545	0,290	0,5376	0,310	0,5086
533	0,145	0,8386	0,400	0,3979
517	0,168	0,7747	0,464	0,3335
500	0,300	0,5229	0,522	0,2823
485	0,500	0,3010	0,570	0,2441
460	0,770	0,1135	0,647	0,1891
439	0,914	0,0391	0,710	0,1488

Auch hier liegt das Maximum der sensibilisirenden Wir-
ung weiter gegen Roth, als der Absorptionsstreifen, wie
us folgenden Zahlen hervorgeht:

yanosin in verdünntem Alkohol — Maximum der Absorption	530 Mill.-Mm W. L.
asselbe in Gelatine — Maximum der Absorption	555 „ „ „
it demselben präparirte Platte — Maximum der Sensibilisirung	570 „ „ „ .

Methyleosin.

Methyleosin (Methylerithrin) ist in Wasser leicht löslich
nit rosarother Farbe und grüngelber Fluorescenz und zeigt
inen Absorptionsstreifen im Gelb. Durch Gelatine wird das
Absorptionsband nach Roth verschoben. Durch Zusatz von
Säure wird die Farbe hellgelb und zeigt zwei Absorptions-
treifen. Eine $^1/_{16}$ proc. Lösung ergab für das erste Band
30 bis 509 und für das zweite schwächere 492 bis 472 Mil-
iontelmillimeter W. L. Bis zum folgenden Tage hatte sich
liese Lösung vollständig entfärbt, und lag auf dem Boden
les Gefässes ein rother flockiger Niederschlag. Durch Zu-
atz von Ammoniak erhielt man die ursprüngliche Lösung
nit Fluorescenz und einem Absorptionsstreifen wieder.

Eine $^1/_{100}$ proc. Lösung in verdünntem Alkohol wirkt
ensibilisirend von *F* bis *D* (ca. 590 Milliontelmillimeter).
Von 550 bis 480 Milliontelmillimeter W. L. ist die Wirkung
vieder etwas schwächer. Nach Ammoniakzusatz ist die Wir-
ung ähnlich, nur etwas intensiver.

Die Verschiebung des Maximums der Sensibilisation
egen den Absorptionsstreifen ersieht man aus folgenden
ahlen:

ethyleosin in wässeriger Lösung — Maximum der Absorption	525 Mill.-Mm W. L.
asselbe in Gelatine	535 „ „ „
amit gefärbte photographische Platte — Maximum der Sensibilisirung	565 „ „ „

Lichtabsorption von Methyleosin.

Wellen-länge Mill.-Mm.	Conc. in Wasser 1 mm Schichtdicke		1/16 Proc. in angesäuertem Wasser, 19 mm Schichtdicke		1/4 Proc. in Wasser und Gelatine	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
666	0,865	0,0630	0,904	0,0438	0,895	0,0482
598	0,818	0,0870	0,868	0,0615	0,850	0,0706
590	0,792	0,1013	0,848	0,0716	0,820	0,0862
552	0,528	0,2774	0,568	0,2457	0,540	0,2676
539	0,270	0,5686	0,321	0,4935	0,270	0,5686
533	0,110	0,9586	0,210	0,6778	0,216	0,6656
528	0,018	1,7447	0,103	0,9872	0,280	0,5529
522	—	—	0,080	1,0969	0,348	0,4584
517	—	—	0,078	1,1079	0,394	0,4045
511	0,009	2,0457	0,090	1,0458	0,430	0,3665
500	0,036	1,4437	0,130	0,8861	0,480	0,3188
490	0,080	1,0969	0,128	0,8928	0,519	0,2848
485	0,117	0,9318	0,120	0,9208	0,538	0,2692
476	0,200	0,6990	0,140	0,8539	0,570	0,2441
460	0,400	0,3979	0,280	0,5529	0,634	0,1979
439	0,690	0,1612	0,330	0,4815	0,690	0,1612

Fluoresceïn.

Das dem Eosin chemisch nahe verwandte Fluoresceïn zeigt in ammoniakalischer Lösung eine ziemlich kräftige Sensibilisirung für Grün (von *F* bis ca. 550 Milliontelmillimeter W. L.) mit einem Maximum bei *E*. Dasselbe ist aber nur nach ziemlich langer Belichtung bei noch nassen Platten zu erhalten, während die trockenen Platten kein Maximum erkennen lassen.

Fluorescein ist in Wasser ziemlich schwer löslich, gibt eine gelbliche Flüssigkeit, welche lebhaft grün fluorescirt. Die Absorption ist nur eine einseitige, d. h., es wird die eine Hälfte des Spectrums (hier die blaue) ganz ausgelöscht. Durch Zusatz von Ammoniak wird die Lösung orange und fluorescirt lebhafter. Es zeigt sich dann in genügend dünner Schicht ein Absorptionsstreifen. In Alkohol ist Fluoresceïn leicht mit röthlicher Farbe löslich.

Die Verschiebung des Sensibilisirungsmaximums gegen den Absorptionsstreifen ersieht man aus folgenden Zahlen:

Alkoholische Lösung mit Ammoniak — Maximum der Absorption . . . . 497 Mill.-Mm W. L.
Wässerige Lösung mit Ammoniak — Maximum der Absorption . . . . 491 „ „ „
Mit derselben präparirte photographische Platte — Maximum der Sensibilisirung . . . . 528 „ „ „

Spectralphotometrische Messungen ergaben folgende Werthe:

Lichtabsorption von Fluoresceïn.

Wellenlänge Mill.-Mm.	1/30 Proc. in Alkohol. 1 mm Schichtdicke		1/128 Proc. in Alkohol u. Ammoniak. 1 mm Schichtdicke		Conc. in Wasser u. Ammoniak. 1 mm Schichtdicke		Conc. in Wasser und Gelatine	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
552	0,720	0,1427	0,880	0,0555	0,835	0,0783	0,978	0,0098
517	0,380	0,4202	0,300	0,5229	0,530	0,2840	0,955	0,0200
506	0,280	0,5529	0,101	0,9957	0,235	0,6289	0,947	0,0237
500	0,220	0,6576	0,025	1,6021	0,140	0,8539	0,932	0,0306
495	0,175	0,7570	0,020	1,6990	0,100	1,0000	0,918	0,0372
485	0,075	1,1249	0,072	1,1427	0,110	0,9586	0,888	0,0516
460	0,090	1,0458	0,270	0,5686	0,405	0,3926	0,804	0,0948
439	0,182	0,7399	0,510	0,2924	0,700	0,1549	0,784	0,1057

Cyanin.

Cyanin ist in Alkohol leicht mit blauer Farbe löslich und sehr lichtempfindlich. Die Lösung bleicht nach wenigen Tagen vollständig aus. Sie zeigt einen Absorptionsstreifen im Gelb. In Gelatine ist die Absorption schwach. In Wasser ist Cyanin sehr schwer löslich (in 40 ccm noch nicht 0,002 g) und bleicht noch rascher als die alkoholische Lösung aus.

Schumann[1]) und Eder[2]) fanden ziemlich gleichzeitig die sehr günstig sensibilisirende Wirkung des Jodcyanins auf Gelatinetrockenplatten für Orange und Roth. Auf Collodionplatten ist dasselbe schon früher angewendet worden[3]). Eder versuchte noch andere Cyaninverbindungen, welche ähnliche Resultate ergaben. Bei allen ist mit grosser

1) Schumann, Photogr. Wochenschrift. 1884.
2) Eder, Ueber das Verhalten der Haloidverbindungen etc. p. 1120.
3) Eder, Ueber die chemischen Wirkungen des Lichtes etc. p. 32.

Vorsicht bei sehr gedämpftem Lichte zu arbeiten, da sonst die Platten leicht Schleier bilden.

Eine Platte präparirt mit einer $^1/_{100}$ proc. Lösung in verdünntem Alkohol gibt eine bedeutende photographische Wirkung im Roth, und zwar bis *B*. Das Maximum der sensibilisirenden Wirkung ist zwischen *D* und *C* (620 Milliontelmillimeter W. L.). Zwischen *b* und *F* ist die Wirkung auf der Platte ein Minimum. Aehnliche Wirkung erhält man auch bei Zusatz von Ammoniak, nur tritt hierbei leicht Schleier auf. — Die Curven auf Fig. 2, welche ähnlich bezeichnet sind, wie für das Eosin, geben diese Verhältnisse. Benutzt man eine Lösung, die schon etwas verblichen ist, so findet keine Sensibilisirung statt. —

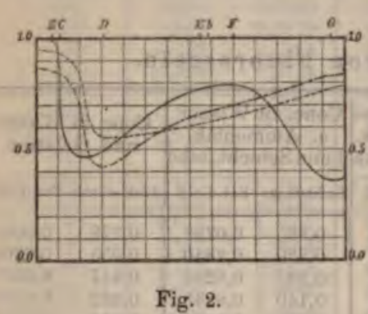


Fig. 2.

Spectralphotometrische Messungen[1]) ergaben:

Lichtabsorption von Cyanin.

Wellenlänge Mill.-Mm.	$^1/_{40}$ Proc. in Alkohol 1 mm Schichtdicke		Conc. in Wasser. 10 mm Schichtdicke		Verdünnter Alkohol mit Ammoniak in Gelatine	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
666	0,866	0,0625	0,980	0,0088	0,840	0,0757
640	0,490	0,3098	0,914	0,0391	0,747	0,1267
629	0,143	0,8447	0,850	0,0706	0,660	0,1805
618	0,060	1,2219	0,750	0,1249	0,540	0,2676
598	—	—	0,512	0,2907	0,430	0,3665
578	—	—	0,515	0,2882	0,540	0,2676
566	0,008	2,0969	0,520	0,2840	0,580	0,2366
552	0,020	1,6990	0,532	0,2741	0,620	0,2076
533	0,155	0,8097	0,551	0,2589	0,670	0,1739
517	0,360	0,4437	0,570	0,2441	0,705	0,1518
485	0,725	0,1397	0,608	0,2161	0,751	0,1244
460	0,870	0,0605	0,643	0,1918	0,767	0,1152
439	0,950	0,0223	0,672	0,1726	0,774	0,1113

1) Pulfrich hat in Wied. Ann. **14.** p. 177. 1881 eine Reihe spectralphotometrischer Beobachtungen für Cyanin in verschiedenen Concentrationen in Alkohol gegeben, auf welche hier noch verwiesen sein mag.

Der Unterschied zwischen dem Sensibilisationsmaximum und dem Absorptionsstreifen derselben Lösung in Gelatine ist auch hier vorhanden:

Maximum der Absorption . 598 Mill.-Mm W. L.
„ „ Sensibilisirung 620 „ „ „ „

Anilinschwarzblau

ist in Wasser leicht löslich, färbt intensiv schwarzblau und gibt einen Absorptionsstreifen im Gelb. Durch Ammoniakzusatz wird die Lösung violett, und verschiebt sich der Streifen nach Grün, wie aus der unten folgenden Tabelle hervorgeht. Durch Säurezusatz wird die Lösung goldgelb, und es entsteht ein Absorptionsstreifen im Gelb. Eine Platte mit ammoniakalischer Lösung präparirt, zeigte nur eine sehr schwache photographische Wirkung bis *D*.

Lichtabsorption von Anilinschwarzblau.

Wellenlänge Mill.-Mm.	1/100 Proc. in Wasser 1 mm Schichtdicke		1/100 Proc. in Wasser nebst 4 Proc. Ammoniak	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
666	0,790	0,1024	0,700	0,1549
629	0,655	0,1838	0,645	0,1905
598	0,550	0,2596	0,592	0,2277
552	0,560	0,2518	0,516	0,2874
517	0,652	0,1858	0,502	0,2993
485	0,734	0,1343	0,541	0,2668
460	0,792	0,1013	0,610	0,2147
439	0,830	0,0809	0,674	0,1714

Curcuma.

Curcumalösung erhöht nach Lohse ebenfalls die Empfindlichkeit der Gelatinetrockenplatten für Grün und Gelb, und zwar geht die Wirkung bis ca. 615 Milliontelmillimeter W. L., jedoch wird die Wirkung von *D* ab schwächer. Die sensibilisirende Wirkung schliesst sich hierbei so eng an das normale Spectrum auf Bromsilber an, dass keinerlei Unterbrechung zu bemerken ist.

Die Absorption der Lösung ist eine einseitige (für blau), wie man aus nachstehenden spectralphotometrischen Messungen sieht:

Lichtabsorption von Curcumalösungen.

Wellen-länge Mill.-Mm.	Conc. Alkohol 1 mm Schichtdicke		Conc. Alkohol mit Ammoniak 1 mm Schichtdicke		Conc. Alkohol in Gelatine	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
666	0,935	0,0292	0,860	0,0655	0,675	0,1707
598	0,886	0,0526	0,780	0,1079	0,660	0,1805
552	0,795	0,0996	0,433	0,3635	0,640	0,1938
517	0,543	0,2652	0,180	0,7447	0,616	0,2104
485	0,108	0,9666	0,060	1,2219	0,560	0,2518
460	0,036	1,4437	0,026	1,5850	0,460	0,3373
439	0,008	2,0969	0,007	2,1549	0,335	0,4750

Chrysanilin nitricum

absorbirt einseitig den violetten Theil des Spectrums. Eine $^1/_2$ Proc. starke wässerige Lösung absorbirt in einer 10 mm dicken Schicht von 513 und in Gelatine von 498 Milliontelmillimeter W. L. ab alle kürzeren Wellenlängen. Photographisch wirkt das salpetersaure Chrysanilin sowohl beschleunigend auf die Entwickelung, als auch sensibilisirend für Grün (bis *E*), und erstreckt sich die Wirkung bis *D*. Die sensibilisirende Wirkung für Grün schliesst sich hierbei so eng an das normale Spectrum für Bromsilber (wie bei Curcuma) an, dass kein Uebergang bemerklich ist. Dabei verschiebt sich das Maximum der photographischen Wirkung im Blau etwas gegen Grün, und erscheint die Curve derselben (wie auch Eder fand), verglichen mit jener der ungefärbten Bromsilbergelatine, weiter nach Grün verschoben. Nach Lohse ist 1:2000 die beste Verdünnung, und ist es gleichgültig, ob die Platte vor oder nach dem Belichten (wie bei unterschwefligsaurem Natron)[1]) in dieser Lösung gebadet wird. Es ist dies sehr bemerkenswerth, da von einer Absorption des Farbstoffes bei der belichteten ungefärbten Platte doch noch nicht die Rede sein kann.

Ich photographirte auch das Absorptionsspectrum einer 1 mm dicken Schicht einer $^1/_8$ proc. Lösung. Hierbei erstreckt sich das Spectrum auf der Platte von *E* (genauer 527 Milliontelmillimeter W. L.) bis fast nach *L*.

---

1) Für unterschwefligsaures Natron scheint 1 : 10000 die beste Verdünnung zu sein.

Die Lichtabsorption spectralphotometrisch gemessen, ergibt sich, wie folgt:

Lichtabsorption von Chrysanilin nitrium.

Wellenlänge Mill.-Mm.	in Wasser bei 1 mm Schichtdicke		in Gelatine	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
552	0,890	0,0506	0,745	0,1279
517	0,440	0,3566	0,270	0,5686
485	0,030	1,5229	0,055	1,2596

Amidoazobenzol

ist in Wasser schwer löslich. 0,02 g in 10 ccm Alkohol und 90 ccm Wasser gibt eine Lösung von goldgelber Farbe, welche in 10 mm dicker Schicht von 466 Milliontelmillimeter W. L. ab alles gegen Violett absorbirt. Bei 1 mm dicker Schicht ist das ganze Spectrum zu sehen. Photographisch ist es ohne besondere Wirkung.

Amidoazobenzol hydrochloratum

ist in Wasser mit röthlichbrauner Farbe löslich. $^1/_{50}$ proc. wässerige Lösung absorbirt in einer 10 mm dicken Schicht das Spectrum von 460 Milliontelmillimeter W. L. ab, in einer 1 mm dicken Schicht von 417 Milliontelmillimeter W. L. das Violett. Durch Zusatz von Ammoniak wird die Lösung goldgelb und absorbirt in 10 mm dicker Schicht das Violett von 472 Milliontelmillimeter W. L. und in 1 mm dicker Schicht von 406 Milliontelmillimeter W. L. Durch Zusatz von Säure wird die Lösung orange, und es erscheint ein Absorptionsstreifen bei 518 bis 460 Milliontelmillimeter W. L. — Photographisch erhöht dieser Stoff nur schwach die Empfindlichkeit für Grün.

Diamidoazobenzol

ist in Wasser mit orangener Farbe löslich und absorbirt einseitig die violette Seite des Spectrums. Bei $^1/_{30}$ proc. wässeriger Lösung geht das Spectrum in 10 mm Dicke bis

548 Milliontelmillimeter W. L. und in 1 mm Dicke bis 485 Milliontelmillimeter W. L. Bei $^{1}/_{60}$ proc. wässeriger Lösung in 10 mm Dicke bis 519 Milliontelmillimeter W. L., und in 1 mm Dicke ist das ganze Spectrum zu sehen. Durch Zusatz von Ammoniak wird die Lösung gelb und absorbirt eine $^{1}/_{30}$ proc. wässerige Lösung in 10 mm Dicke das Violett von 528 Milliontelmillimetern W. L. ab. In 1 mm Dicke ist das ganze Spectrum sichtbar.

Photographisch sensibilisirt Diamidoazobenzol für Grün und zeigt eine Wirkung bis *D*. Das Maximum der Sensibilisation ist bei *b*, und zwar von ca. 550 bis 500 Milliontelmillimeter W. L. Bei *F* ist die Wirkung ein Minimum, und von 470 Milliontelmillimeter W. L. beginnt die Wirkung, wie auf der ungefärbten Platte.

Diamidoazobenzol hydrochloratum

ist in Wasser mit orangener Färbung löslich und absorbirt einseitig das Violett. Eine $^{1}/_{250}$ proc. wässerige Lösung absorbirt in 10 mm dicker Schicht das blaue Ende des Spectrums von 520 Milliontelmillimeter W. L. ab. Bei 1 mm Dicke ist das ganze Spectrum zu sehen. Durch Zusatz von Ammoniak wird die Lösung gelb, und das Spectrum endet in 10 mm Dicke bei 513 Milliontelmillimeter W. L., während es in 1 mm dicker Schicht ganz sichtbar ist.

Photographisch wirkt Diamidoazobenzol hydrochloratum ohne Ammoniak nur wenig sensibilisirend, mit Ammoniak hingegen für Grün und Gelb. Dabei tritt ein Maximum der Wirkung zwischen *D* und *b* auf, und erstreckt sich die Wirkung selbst über *D* hinaus. Die Wirkung im Gelb ist etwa halb so stark wie im Blau. Zwischen *F* und 470 Milliontelmillimeter W. L. liegt ein Minimum der Wirkung. Es ist sehr bemerkenswerth, dass hierbei ein Maximum im Gelb auftritt, da doch der Farbstoff selbst keinen Absorptionsstreifen zeigt.

Spectralphotometrische Messungen der letzten vier Farbstoffe ergaben für eine 1 mm dicke Schicht folgende Werthe:

Lichtabsorption einiger Azofarbstoffe.

Wellen-länge Mill.-Mm.	Amidoazobenzol 1/50 Proc. in Wasser		Amidoazobenzol hydrochlor. 1/50 Proc. in angesäuert Wass.		Diamidoazobenzol 1/60 Proc. in Wasser	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
552	0,900	0,0458	0,670	0,1739	0,841	0,0752
517	0,840	0,0757	0,514	0,2890	0,663	0,1785
495	0,780	0,1079	0,460	0,3373	0,410	0,3872
485	0,740	0,1308	0,474	0,3242	0,281	0,5513
460	0,545	0,2636	0,595	0,2255	0,199	0,7012
439	0,260	0,5850	0,775	0,1107	—	—

Wellen-länge Mill.-Mm.	Diamidoazobenzol hydrochloratum			
	1/250 Proc. in Wasser		1/250 Proc. in Wasser mit 1/8 Proc. Ammon.	
	Lichtstärke	Ext.-Coëff.	Lichtstärke	Ext.-Coëff.
552	0,702	0,1537	0,814	0,0894
517	0,533	0,2733	0,710	0,1488
495	0,358	0,4461	0,611	0,2140
485	0,307	0,5129	0,550	0,2596
460	0,242	0,6162	0,368	0,4342
439	—	—	—	—

Chinin sulfuricum.

Schwefelsaures Chinin gibt in etwas angesäuertem Wasser bekanntlich eine schön blau fluorescirende Flüssigkeit. Badet man in einer solchen Lösung eine Bromsilber-Gelatinetrockenplatte, so scheint sich die Empfindlichkeit derselben zu erhöhen[1]). Eine mit saurem schwefelsauren Chinin präparirte Platte braucht zum Entwickeln nur den dritten Theil der Zeit, als eine gewöhnliche Platte, und die Wirkung bleibt, wie beim salpetersauren Chrysanilin und unterschwefligsauren Natron dieselbe, ob man die Platte vor oder nach dem Belichten badet. Am günstigsten wirkt eine Lösung von 1:300. Es ist dieses Resultat darum so interessant, als hier der Säurezusatz die Empfindlichkeit der Platte nicht schädigt, was doch sonst der Fall ist.

1) Eine sensitometrische Prüfung mittelst einer 16stufigen Papierscala (Belichtung 10 Secunden, Entfernung der Lichtquelle 2 Fuss rh.) ergab:
auf der unpräparirten Platte ist Nr. 12 bei 10 Minuten Entwickelung
auf der präparirten Platte ist Nr. 13 bei 4 Minuten Entwickelung
zu sehen. Die Platte war hierbei in einer 1/2 proc. Chininlösung zwei Minuten gebadet worden.

Nach meinen Versuchen beginnt die Absorption bei einer 1 proc. Lösung in 19 mm dicker Schicht bei ca. 400 Milliontelmillimeter W. L. merklich zu werden und erstreckt sich über das ganze Ultraviolett.

Sensibilisirend wirkt das saure schwefelsaure Chinin für die längeren Wellenlängen (Roth, Gelb und Grün) nicht, dagegen scheint es die Empfindlichkeit für Ultraviolett zu erhöhen. Es hängt dies vielleicht bei diesem bisher noch nicht untersuchten Stoffe mit der Fluorescenz zusammen, vermittelst welcher es ja auch möglich ist, die ultravioletten Strahlen dem blossen Auge sichtbar zu machen.

Aus den hier gegebenen Beobachtungen geht hervor, dass die Farbstoffe, welche sensibilisirend wirken, sich

1. in solche theilen lassen, welche das Spectrum vom Violett her allmählich fortschreitend absorbiren, und deren sensibilisirende Wirkung sich so eng an die gewöhnliche photographische anschliesst, dass kein Unterschied bemerkbar ist — Curcuma.

2. in solche, welche nur eine gleichmässige, über grössere Theile des Spectrums, vom violetten Ende an, sich erstreckende absorbirende Wirkung, aber photographisch ein Sensibilisationsmaximum im Gelb zeigen — Diamidoazobenzol.

3. in solche, welche einen Absorptionsstreifen im Spectrum und eine demselben örtlich entsprechende Steigerung der Lichtempfindlichkeit zeigen. Hierbei ist jedoch zu constatiren, dass ein genaues Zusammenfallen des Absorptionsstreifens mit dem Orte, wo im Spectrum die Farbenempfindlichkeit erhöht wird, bisher noch nicht beobachtet werden konnte. Es ist nur erwiesen, dass der Absorptionsstreifen keine genaue fixirte Lage im Spectrum einnimmt, und dass hierbei das den Farbstoff umschliessende Medium von Einfluss ist, dass eine Zunahme der Dichtigkeit des Mediums gleichbedeutend ist mit einer Verschiebung des Absorptionsstreifens nach Roth. Man kann sich hiernach vorstellen, dass es einen Stoff gibt, der den Absorptionsstreifen so weit verschiebt, dass er mit dem Orte der photographischen Sensibilisirung zusammenfällt. Experimentell ist dies noch nicht

gelungen festzustellen, aber man vermuthet, dass das Bromsilber, als Medium gedacht, diese Bedingung erfüllt, wodurch allerdings auch erst dann der definitive Beweis erbracht wäre, dass die Erscheinungen der Absorption und der dissociirenden Wirkung miteinander verknüpft sind, wenn die oben unter 2. aufgeführte Ausnahme erklärt ist.

Die Farbstofflösungen sind ferner meist in sehr starker Verdünnung am besten sensibilisirend. Betrachtet man z. B. das Spectrum einer solchen Lösung in einer 1 mm dünnen Schicht oder in dünner Gelatinefolie, so ist das Absorptionsband bereits sehr matt, und die gemessenen Zahlen der Intensitäten zeigen, dass der Unterschied zwischen der Intensität des Absorptionsstreifens und der übrigen Lichtstrahlen nur sehr gering ist. Bedenkt man nun, dass die photographischen Platten nach der Färbung gut abgewaschen werden können, so bleibt auf den Platten nur eine äusserst geringe Menge Farbstoff zurück[1]).

Ich möchte nach alledem den Zusammenhang zwischen der Absorption der Farbstoffe und deren sensibilisirender Wirkung auf Bromsilber nicht als erwiesen ansehen. Ganz besonders scheint mir das Verhalten des einfachen und des salzsauren Diamidoazobenzols dagegen zu sprechen. Beide haben — wie oben bemerkt — kein Absorptionsband, sondern absorbiren nur nach Maassgabe der Concentration und der Schichtdicke ein mehr oder minder grosses Stück vom brechbareren Theile des Spectrums, trotzdem zeigt sich auf der Platte im Gelb ein secundäres Maximum der photographischen Wirkung. Ebenso muss hier auf die Wirkung des salpetersauren Chrysanilins Rücksicht genommen werden, welches das gewöhnliche Maximum der photographischen Wirkung im Blau gegen Roth verschiebt. Da dieser Farbstoff nur einseitig absorbirt, so kann die erwähnte Eigenthümlichkeit nicht in Zusammenhang mit einem Absorptionsband gebracht werden.

April 1885.

1) Lohse, Photogr. Archiv. Nr. 501. p. 125. 1884. Eder, Ueber das Verhalten der Haloidverbindungen etc. p. 1132 ff.

X. *Berichtigung zweier Formeln;* *von W. Wernicke.*

In seiner Arbeit über „Zurückwerfung und Brechung des Lichtes durch dünne Metallschichten“[1]) hat Jochmann eine Gruppe von Formeln ohne Beweis und ohne Andeutung desselben mitgetheilt, welche in neuester Zeit durch die eingehenden theoretischen Untersuchungen von Hrn. W. Voigt[2]) eine erhöhte Bedeutung erhielten. Damals, vor zehn oder elf Jahren, hatte ich in den Fortschritten der Physik ein Referat über jene Arbeit veröffentlicht, aber die Formeln selbst nicht abdrucken lassen, weil ich die erste Hauptformel anders herausbekam. Durch eine sogleich zu erwähnende äussere Veranlassung habe ich jetzt meine alten Rechnungen durchgesehen und gefunden, dass wirklich die erste Hauptformel von Jochmann nicht richtig ist. Es fehlt nämlich im Zähler dieser Formel, welche die Intensität des durchgegangenen Lichtes angibt, der Factor:

$$q_3^2 = \frac{\sin^2\alpha_3 \cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_3 \sin^2\alpha_2}.$$

Alle anderen Formeln Jochmann's habe ich vollkommen identisch bekommen, sodass dieselben von denjenigen, welche sie anwenden wollen, als richtig betrachtet und benutzt werden können.

Die Jochmann'schen Formeln habe ich dadurch abgeleitet, dass ich zuerst die von den unendlich vielen parallelen Strahlen herrührenden Vibrationsgeschwindigkeiten summirte und aus dem erhaltenen Ausdrucke in bekannter Weise die Formeln für Intensität und Phase bildete. In die so erhaltenen allgemeinen — von einer besonderen Theorie der Reflexion unabhängigen — Ausdrücken wurden dann die aus Cauchy's Formeln abgeleiteten Werthe der Amplituden und Phasenänderungen eingesetzt.

Für die Intensität des von einer dünnen, zwischen zwei durchsichtigen Körpern befindlichen Metallschicht reflectirten

1) Jochmann, Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 620. 1871.

2) Voigt, Wied. Ann. 25. p. 95. 1883.

Lichtes ergab sich so die allgemeine, von jeder besonderen Reflexionstheorie unabhängige Formel:

$$I = \frac{\begin{array}{c} r^2 + 2r\varrho K^2 [d\delta \sin f \sin\eta - (d\delta + r^2)\cos f \cos\eta] \\ + \varrho^2 K^4 [(d\delta)^2 + 2r^2 d\delta \cos f + r^4] \end{array}}{1 - 2r\varrho K^2 \cos\eta + r^2\varrho^2 K^4}.$$

In derselben bedeuten r, ϱ; d, δ die Amplituden des reflectirten, resp. durchgegangenen Lichtes:

$$f = d_1 + d_1' - 2\delta_1 \qquad \eta = 2L + \delta_1 + \delta_2$$

$$K = e^{-2\pi \frac{\cos\alpha_2}{\lambda_2} \varDelta} \qquad L = 2\pi \frac{\cos\alpha_2}{\lambda_2} \varDelta,$$

worin d, d_1', δ_1 und δ_2 die Verzögerungen der Phasen durch die Brechung und Reflexion, $\varDelta$ die Dicke der Metallschicht, α_2 und λ_2 die (Cauchy'schen) Brechungswinkel und Wellenlängen im Inneren der Schicht bedeuten.

Setzt man in dieser Formel $K = 1$, so erhält man die von einer durchsichtigen Schicht zwischen zwei durchsichtigen Medien reflectirte Lichtintensität.

In meiner letzten Arbeit[1]) ist durch einen Lapsus calami der Zähler der Formel (1) unrichtig geworden, worauf mich Hr. Prof. Voigt gütigst aufmerksam gemacht hat. Für die daselbst[2]) stehende ist also die obige Formel mit der erwähnten Specialisirung für durchsichtige Körper zu setzen. — Auf die Methoden und Resultate der Beobachtungen, sowie auf die später aus denselben gezogenen Schlüsse hat jener Fehler nicht den geringsten Einfluss, und ist auch für die theoretische Verwerthung der Beobachtungsresultate ganz ohne Belang.

Berlin, den 10. Juni 1885.

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 25. p. 203. 1885.

2) l. c. Formel (1) p. 203.

XI. *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn F. Melde: Akustische Experimentaluntersuchungen*[1]; *von Adolf Elsas.*

Im 5. Abschnitt meiner Abhandlung: Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen gespannter Saiten[2] und in einem Aufsatz: Ueber einen neuen Fadenschwingungsapparat[3] habe ich eine Methode beschrieben, Transversalschwingungen einer Saite, resp. eines fadenförmigen Körpers durch die Rotationsbewegung einer Sirene zu unterhalten. Auf diese Methode gründete ich einen Apparat, der zu Demonstrationszwecken, nämlich zur Sichtbarmachung der Partialschwingungen der Saite und zum Nachweise der Mersenne'schen Gesetze, dienen soll. Ich bezeichnete denselben als Fadenschwingungsapparat, um anzudeuten, dass er mit den bekannten Melde'schen Einrichtungen verwandt ist.

Die neueste Abhandlung des Hrn. Melde veranlasst mich durch eine Kritik meiner oben citirten Veröffentlichungen und durch den Vorwurf, dass sich in den zur Orientirung über die Braucharkeit meines Apparates mitgetheilten Versuchsreihen Unrichtigkeiten befinden, zu folgenden Bemerkungen.

Es liegt nicht in dem Zwecke meines Apparates, „die Impulse des Wellenerregers in jeder beliebigen Richtung auf den Faden einwirken zu lassen"[4] oder „eigentlich exacte Messungen"[5] damit auszuführen. Es kann deshalb auch nicht als ein Mangel meiner Einrichtung bezeichnet werden, dass der Faden horizontal ausgespannt und nicht, wie beim Weber'schen Monochord, vertical aufgehängt wird. Uebrigens braucht man, wenn die Saite durchaus vertical ausgespannt werden soll, nur die Hebelvorrichtung etwas anders

1) F. Melde, Wied. Ann. **24.** p. 497—522. 1885.
2) A. Elsas, Wied. Ann. **23.** p. 173—202. 1884.
3) A. Elsas, Zeitschr. f. Instrumentenk. **4.** p. 333—338. 1884; Phil. Mag. (5) **19.** p. 68. 1884.
4) F. Melde, l. c. p. 500.
5) F. Melde, l. c. p. 501.

zu construiren, als ich es beschrieben habe, nämlich so, dass das Hebelchen in der Ebene des Rädchens liegt, und seine Axe der Sirenenaxe parallel ist.

Ich bedaure sehr, dass zwei Errata meines Manuscriptes zu Missverständnissen Anlass gegeben haben. Da ich nur zeigen wollte, dass und wie meine Einrichtung zur Demonstration der Saitenschwingungen benutzt werden kann, habe ich nicht daran gedacht, meine Beobachtungszahlen zur Bestimmung der absoluten Tonhöhe zu benutzen. Dadurch ist es mir entgangen, dass durch eine Verschiebung des Decimalkommas die Gewichte p der Tabelle IV zehnmal zu gross angegeben sind. Die Grösse p bedeutet übrigens, wie aus der Definition derselben deutlich hervorgeht, das Gewicht der Saite, nicht aber eines Drahtes von 4 m Länge. Berichtigt man mein Versehen, so stimmen meine Angaben sehr gut mit Hrn. Melde's Messungen überein, wie die folgende Zusammenstellung zeigt, die sich auf einen Messingdraht bezieht. In derselben bedeutet p das Gewicht der Saite in Grammen, P die Spannung in Grammen, n die Schwingungszahl:

	p	P	n (berechn.)	n (beob.)
M.	0,1787	200	53,1	54,5
E.	0,1604	200	55,3	56,5 resp. 57,2.

In meiner Abhandlung in den Annalen p. 197 Z. 18 v. u. sollte nach dem Worte nur stehen: (wozu ich bei der Anwendung kurzer Fäden meist gezwungen war). Das Ausfallen dieses Zwischensatzes wirkt nicht sinnentstellend, weshalb es mir beim Lesen der Correcturbogen entgangen ist. Die zweite Anfrage Hrn. Melde's erledigt sich nun wohl von selbst: ich musste bei vielen Versuchen ein Rad mit vier Zähnen anwenden. Es ergibt sich ferner aus dem Zusammenhang der betreffenden Satzconstruction von selbst, dass man stets mit dem excentrischen Rade ausreichen kann, wenn man weiche, schwach gespannte Fäden von mehreren Metern Länge anwendet.

Marburg, im Mai 1885.

XII. *Abänderung der Influenzmaschine; von E. Lommel.*

Eine kleine Aenderung, die ich an der Holtz'schen Influenzmaschine vornahm, ergab so günstige Resultate, dass ich eine Mittheilung darüber für gerechtfertigt halte.

Die feststehende Glasscheibe hat keine Ausschnitte. Die links und rechts auf ihre Hinterseite geklebten Papierbelege A und B umfassen je etwas mehr als einen Quadranten und haben die in der beigegebenen Skizze[1]) angedeutete Lage. Jeder Beleg, der links an seinem unteren, der rechts an seinem oberen Ende, ist mit einem auf die Scheibe gekitteten Metallstreifen in leitender Verbindung, deren jeder sich nach vorn um beide Scheiben herumbiegt und hier einen gegen die Vorderseite der drehbaren Scheibe gekehrten messingenen Spitzenkamm (α und β) trägt. Diese beiden Spitzenkämme vertreten die Papierspitzen der Holtz'schen Maschine, unterscheiden sich aber dadurch, dass die Spitzen sich nicht gegen die hintere, sondern gegen die vordere Fläche der drehbaren Scheibe wenden.



Der horizontale Conductor mit den Spitzenkämmen a und b und den Electroden n und p, sowie ein schräger Conductor mit den neutralen Kämmen γ und δ sind in bekannter Weise wie bei der Holtz'schen Maschine angebracht. Die sechs Kämme stehen links und rechts symmetrisch zur

1) Die Zeichnung ist weniger schematisch, als die Figuren, welche nach Bertin's Vorgang an die Stelle der Scheiben Cylinder setzen, sie gibt vielmehr ein Bild von der wirklichen Ausführung der Maschine. Ich zog diese Zeichnungsweise der Bertin'schen vor, weil bei letzterer die radiale Stellung der Kämme, welche doch wesentlich ist, nicht zum Ausdruck gebracht werden kann. Die Spitzen, welche in Wirklichkeit senkrecht gegen die Scheibe stehen, sind in der Figur so gezeichnet, dass sie durch ihre Richtung zugleich die Drehungsrichtung andeuten.

verticalen Mittellinie und haben jederseits unter sich einen Abstand von etwa 45°.

Die Maschine wird bei offenen Electroden durch einen Beleg, z. B. den zur Linken, gehaltenen geriebenen Kautschukstreifen erregt, während die vordere Scheibe sich rechtläufig (in der Richtung des Pfeiles) dreht. Die Erregung gelingt leichter, als bei der Holtz'schen Einrichtung, und selbst unter weniger günstigen äusseren Umständen. Die einmal vorhandene Ladung hält sich mehrere Stunden auf der ruhig stehenden Maschine; man kann sie daher im geladenen Zustand in andere Räume bringen, in welchen wegen ungünstiger Feuchtigkeitsverhältnisse die Erregung vielleicht nicht gelingen würde, und sie daselbst zu Versuchen benutzen.

Wurde der Beleg A ursprünglich negativ geladen, so strömt aus den Kämmen a und α positive, aus den Kämmen b und β negative Electricität auf die Vorderfläche der drehbaren Scheibe, wie man an den Lichtbüscheln im Dunkeln leicht erkennt. Entfernt man die Electroden über die Schlagweite, so kommen die Kämme γ und δ in Thätigkeit, indem der erstere positive, der letztere negative Electricität gegen die Scheibe ausströmt.

Die Maschine kehrt bei rechtläufiger Drehung ihre Polarität nicht um. Man kann aber die Umkehrung willkürlich bewirken, wenn man einige rückläufige Drehungen ausführt; man sieht alsdann im Dunkeln aus dem Spitzenkamm γ positive Electricität gegen die Scheibe strömen, welche von dem Kamm α aufgenommen und dem negativen Beleg zugeführt wird, der sich damit zunächst neutralisirt und sodann positiv ladet. Dreht man jetzt wieder rechtläufig, so wirkt die Maschine sofort wieder, jedoch mit umgekehrten Ladungen. Man kann diese Umkehrungen beliebig oft wiederholen.

Mit der Holtz'schen Verstärkungsröhre armirt, liefert die Maschine Funken bis zu 12 cm Länge, während die nämliche Maschine, als Holtz'sche montirt, nur eine Funkenlänge von 6 bis 7 cm gibt.

XIII. *Eine Ungenauigkeit in der Theorie des Goldblattelectroskops; von Dr. Th. Häbler.*

In den Beschreibungen des Ladens eines Electroskops mittelst Influenz wird ganz allgemein behauptet, dass, wenn man einen electrischen Körper dem Electroskop nähert und den Finger an die Kugel legt, die Goldblättchen zusammenfallen. Wenn dies in der That zutrifft, so liegt es nur daran, dass die Blättchen von Leitern (theilweiser Metallhülle oder Stanniolstreifen oder auch nur der Tischplatte) umgeben sind, welche auch influenzirt werden, weshalb die Blättchen keine Electricität enthalten können.

Stellt man aber — was doch in den Erklärungen des Vorgangs beim Laden vorausgesetzt wird — ein Electroskop mit Glashülle weit entfernt von allen Leitern auf und benutzt eine nicht gar zu schwache Electricitätsquelle, so sitzt nach Anlegen des Fingers Influenzelectricität erster Art nicht nur im Knopf des Instruments und im Finger, sondern auch in den Goldblättchen, und diese zeigen oft einen grösseren Ausschlag als vor der Verbindung mit der Erde.

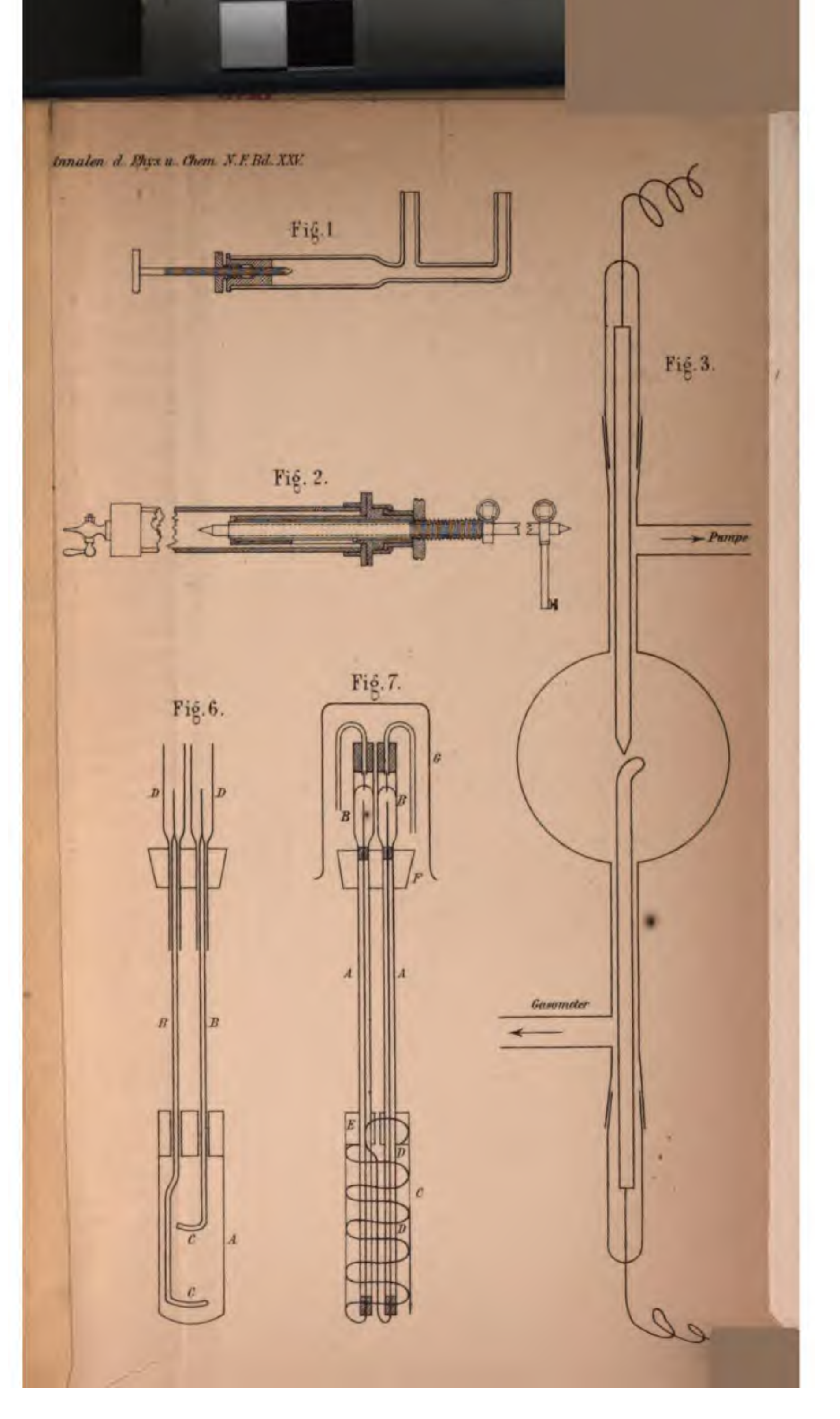
Grimma, Mai 1885.

Berichtigungen.

Bd. XXIV. (Bunsen) p. 325 in Formel (1) fällt s vor dem Gleichungszeichen fort.
p. 332 Z. 19 v. o. lies der Wanne statt des Wassers;
p. 335 Z. 3 v. u. lies ihnen statt ihrer.
p. 336 Z. 13 v. u. lies etwa statt nur etwa.

Bd. XXV. (Jahn) p. 56 Z. 6 v. u. lies Normalelement statt Stromelement.
p. 58 Z. 23 lies Ablesung statt Ablenkung.
p. 64 Z. 31 lies Potentialdifferenz statt electromotorische Kraft.
p. 65 Z. 4 lies Potentialdifferenz statt electromotorische Kraft.
p. 65 Z. 18 lies $(J_2+J_4+\cdots+J_{2\bar{n}-2})$ statt $(J_2+J_4+\cdots+J_{2n-1})$.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Pumpe
Gasometer
Fig. 6.
D
D
B
B
C
A
C
Fig. 7.
G
B
B
F
A
A
E
D
C
D

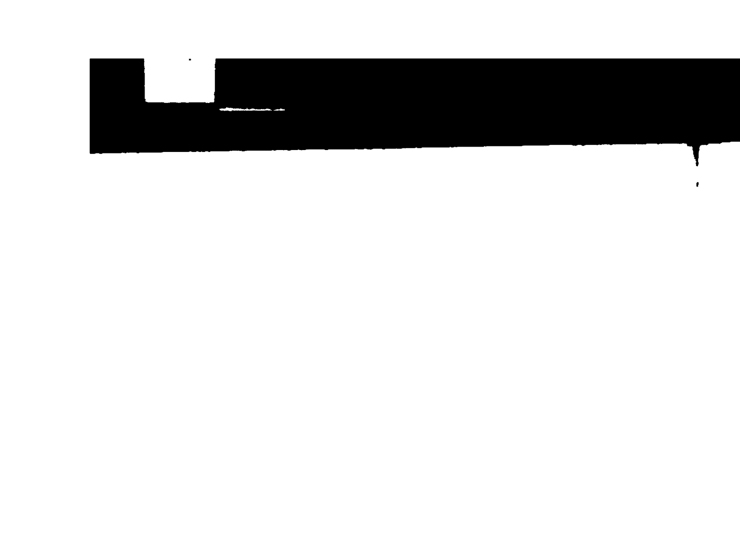


Fig. 5.

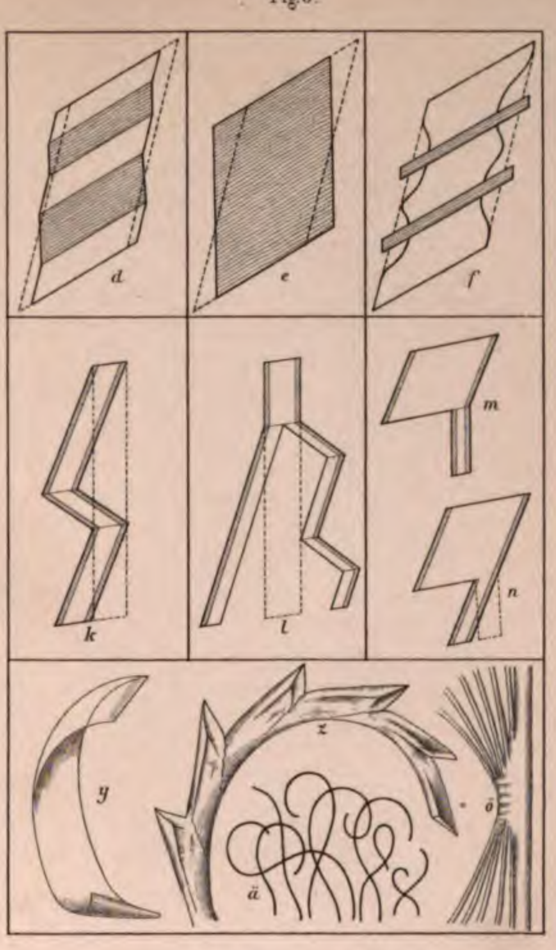


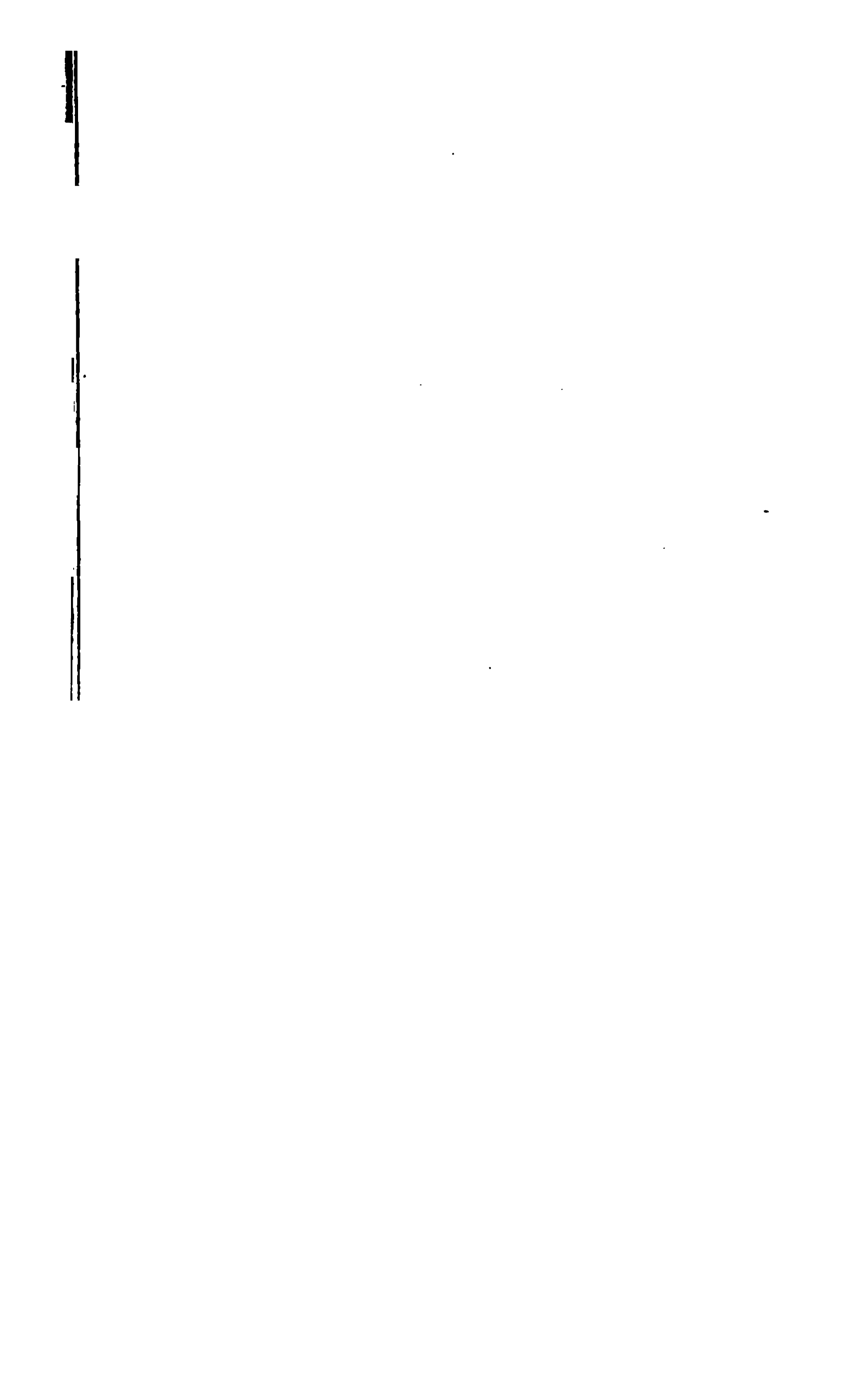
Fig. 7.

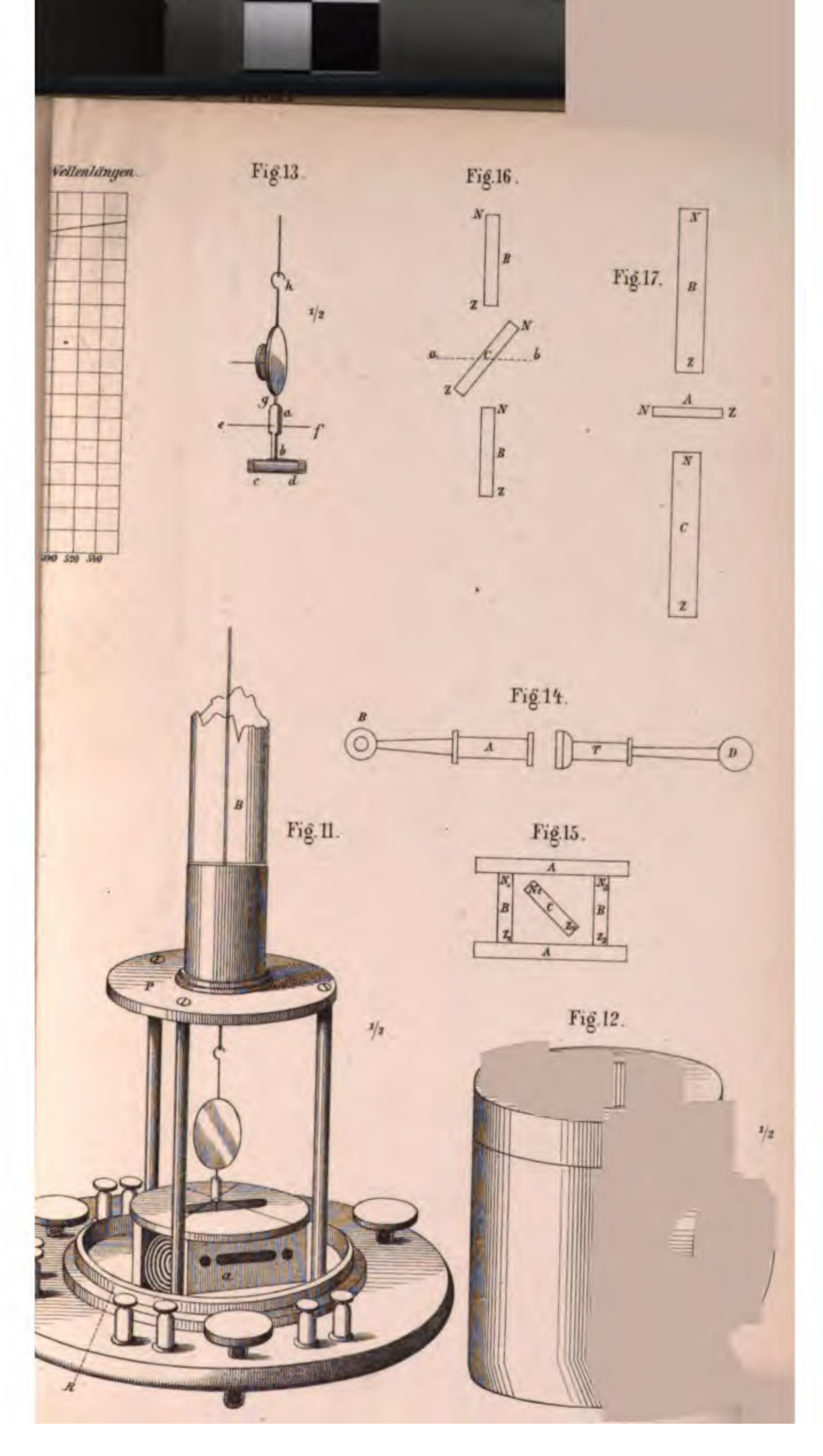
t u v

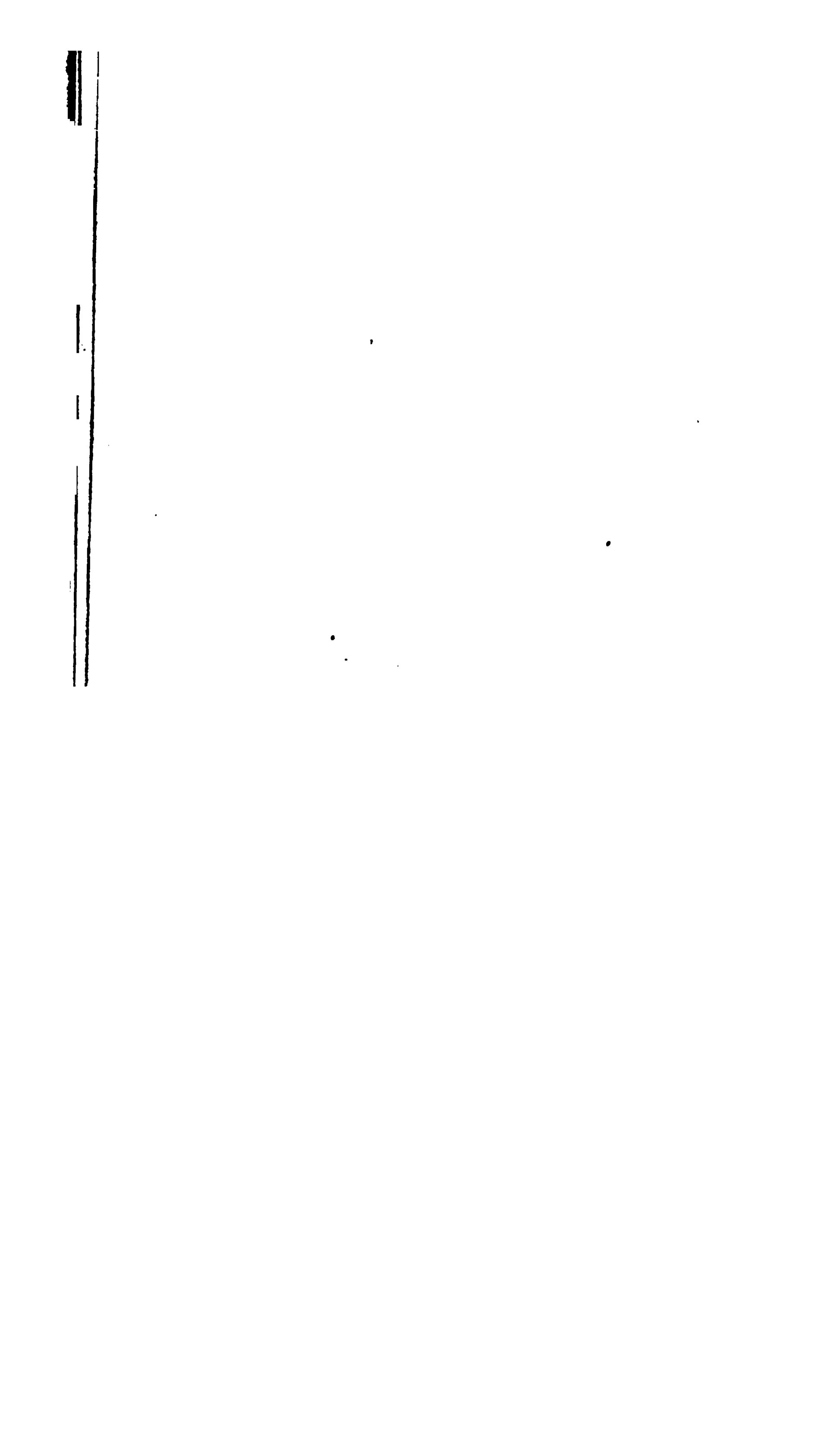
a

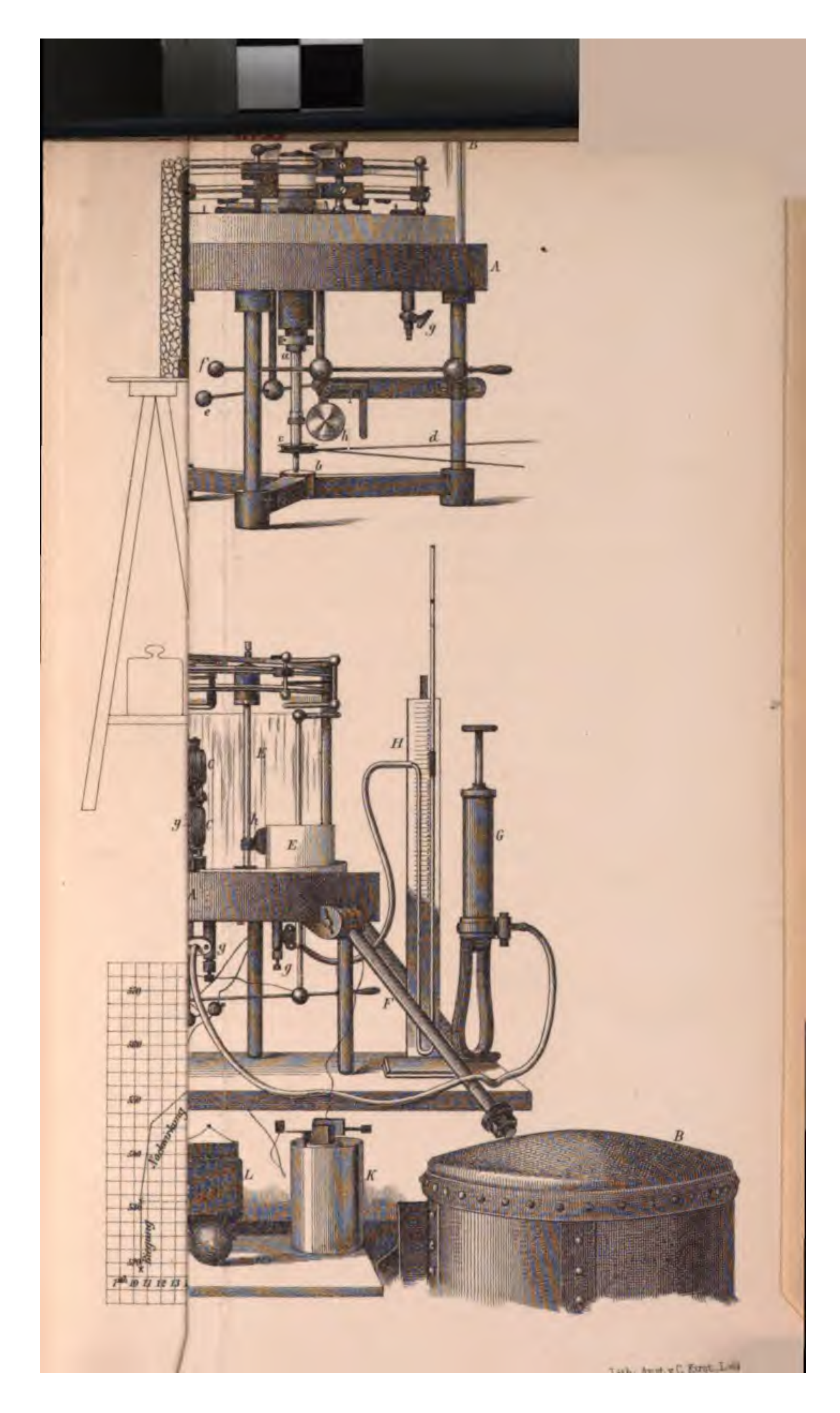
M
R_1
B B
K
R K

1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5




Wellenlängen.
500
520
540
Fig. 13.
h
1/2
g
a
e
f
b
c
d
Fig. 16.
N
B
Z
a
C
b
Fig. 17.
A
C
Fig. 14.
B
A
T
D
Fig. 11.
P
a
R
Fig. 15.
Fig. 12.
1/2
1/2




A
B
H
G
E
F
K
L
Lith. Anst. v. C. Kirst, Leip



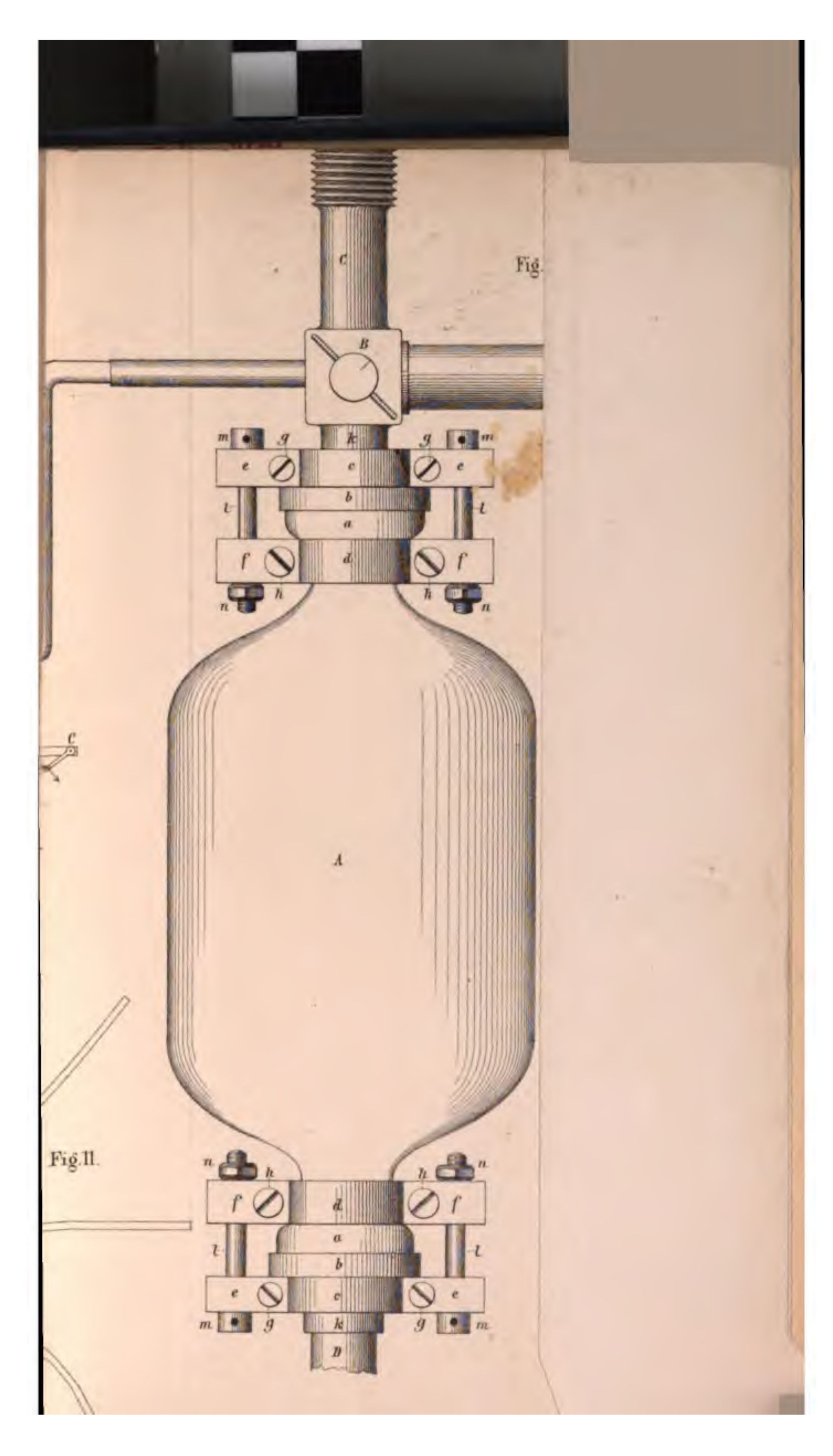
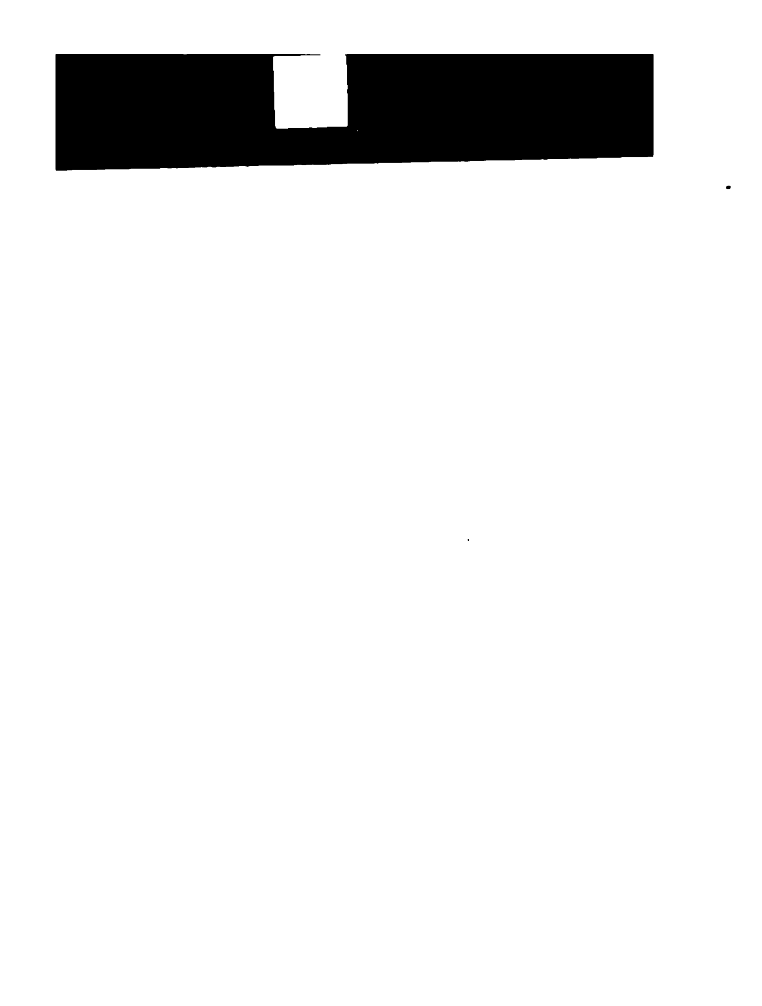


Fig.
C
B
A
D
Fig.11.








OCT 9 - 1939